

张启仁，北京大学教授，博士生导师。1935 年生于长沙，1956 年毕业于北京大学物理系，留校在技术物理系任教。长期从事理论物理与核物理的教学与研究，近期研究方向为核内介子与夸克自由度问题。曾多次出国合作研究与讲学。

北京大学物理学丛书

原子核理论

——它的深化与扩展

张启仁　著

北京大学出版社
北　京

图书在版编目(CIP)数据

原子核理论：它的深化与扩展/张启仁著. －北京：北京大学出版社，1999.5
(北京大学物理学丛书)
ISBN 7-301-04128-4

Ⅰ. 原… Ⅱ. 张… Ⅲ. 核物理学 Ⅳ. 0571

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 13478 号

书　　名：**原子核理论——它的深化与扩展**
著作责任者：张启仁
责 任 编 辑：周月梅
标 准 书 号：ISBN 7-301-04128-4/O·439
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址：http://cbs.pku.edu.en/cbs.htm
电　　话：出版部 62752015　发行部 62754140　编辑室 62752021
电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者：北京大学印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
850 毫米×1168 毫米　32 开本　14.125 印张　350 千字
1999 年 5 月第一版　1999 年 5 月第一次印刷
印　　数：0001～2000 册
定　　价：28.00 元

The Series of Advanced Physics of Peking University

Nuclear Theory

—— its deepening and extension

Zhang Qiren

Peking University Press
Beijing

《北京大学物理学丛书》编委会名单

前　言

物理学是自然科学的基础，是探讨物质结构和运动基本规律的前沿学科。几十年来，在生产技术发展的要求和推动下，人们对物理现象和物理学规律的探索研究不断取得新的突破。物理学的各分支学科有着突飞猛进的发展，丰富了人们对物质世界物理运动基本规律的认识和掌握，促进了许多和物理学紧密相关的交叉学科和技术学科的进步。物理学的发展是许多新兴学科、交叉学科和新技术学科产生、成长和发展的基础和前导。

为适应现代化建设的需要，为推动国内物理学的研究、提高物理教学水平，我们决定推出《北京大学物理学丛书》，请在物理学前沿进行科学研究和教学工作的著名物理学家和教授对现代物理学各分支领域的前沿发展做系统、全面的介绍，为广大物理学工作者和物理系的学生进一步开展物理学各分支领域的探索研究和学习，开展与物理学紧密相关的交叉学科和技术学科的研究和学习提供研究参考书、教学参考书和教材。

本丛书分两个层次。第一个层次是物理系本科生的基础课教材，这一教材系列，将在几十年来几代教师，特别是在北京大学教师的教学实践和教学经验积累的基础上，力求深入浅出、删繁就简，以适于全国大多数院校的

物理系使用。它既吸收以往经典的物理教材的精华，尽可能系统地、完整地、准确地讲解有关的物理学基本知识、基本概念、基本规律、基本方法；同时又注入科技发展的新观点和方法，介绍物理学的现代发展，使学生不仅能掌握物理学的基础知识，还能了解本学科的前沿课题和研究动向，提高学生的科学素质。第二个层次是研究生教材、研究生教学参考书和专题学术著作。这一系列将集中于一些发展迅速、已有开拓性进展、国际上活跃的学科方向和专题，介绍该学科方向的基本内容，力求充分反映该学科方向国内外前沿最新进展和研究成果。学术专著首先着眼于物理学的各分支学科，然后再扩展到与物理学紧密相关的交叉学科。

愿这套丛书的出版既能使国内著名物理学家和教授有机会将他们的累累硕果奉献给广大读者，又能对物理的教学和科学研究起到促进和推动作用。

《北京大学物理学丛书》编辑委员会

1997年3月

Preface

Physics is the foundation of natural sciences, a leading discipline of studying structures of matter and basic laws of motion. For several decades, driving by the demands of developing technology, the breakthrough in the studies of physical phenomenon and the laws of physics never end. During this period, all branches of Physics grew very fast and our knowledge of the basic laws governing the motion of the physical world was highly enriched. The growing of physics accelerated the progress of many physics related areas and technologies. The development of physics provided grounds and guidance for the birth and the growth of those new branches of physics, related areas and new technologies.

In order to catch up the main stream of the modernization and to give an impetus to scientific research and to improve teaching of physics in China, we decided to publish "*The Series of Advanced Physics of Peking University*". We invited those distinguished physicists and professors who worked in the frontier of physics to give series introductions to all branches of modern physics and recent developments in these fields. This series, as a consequence, provides textbooks and references for physicists and physics students in their studies of all branches of physics, related areas and technologies.

This series is divided into two sub-series of different levels, the first sub-series includes the textbooks of undergraduate

physics written by experienced teachers in Peking University in past decades. These textbooks were written concisely with deep insights and easier expressions, which adopt essences of physics textbook classics, explain fundamental concepts, laws and methods of physics in a systematic and rigorous way. In addition, these textbooks properly introduced the new approaches and the latest developments of physics for educational purposes. This sub-series is suitable for teaching of undergraduate physics for most universities and institutes in China. The second sub-series includes graduate textbook, references and academic writings. This sub-series focuses on the latest developments and accomplishments in the active subjects of relevant research with international interests and introductions to those of fast developing research fields. The topics of academic writings mainly cover all branches of physics, but it will be generalized to closely related areas.

We wish the publication of this series could provide an opportunity for leading physicists and physics professors in China to show their fruitful accomplishments to general audience and to give an impetus to teaching and research in physics.

Editorial board of

"The Series of Advanced Physics of Peking University"

March 1997

序

世纪之交的物理学

20 世纪即将过去。物理学的革命，这场革命推动的整个自然科学和应用技术的伟大变革，以及这些变革对人类社会的影响，将作为这个世纪的一个重要标志而载入史册。这段令人神往的历史，给正处在世纪之交的我们以什么样的启示呢？

首先的启示是作为研究物质结构和运动的基本规律的物理学，总是生机勃勃、不断地开辟自己前进的道路的。1803 年道尔顿提出了近代的原子论，认为世间万物都是由几十种不同种类的原子(那时只认识到三十来种)组成的。经过近一个世纪多方面的研究和争论，科学界接受了和发展了这个学说。到 19 世纪 60 年代，元素的数目增到六十多种，而且还认识到不同元素的性质是有内在联系的，门捷列夫的周期律描述了这种联系。19 世纪末，物理学家们发现了电子、α 粒子、放射性、X 射线……发现原子是可以改变的，原子不是物质构成的最小单元。20 世纪初卢瑟福建立了原子结构的"行星"模型。探讨原子结构模型和经典物理学之间的矛盾，导致了量子力学的诞生，产生了现代原子、分子物理、凝聚态物理、原子核物理……历史也许有某种类似性。在这个世纪之交，物理学又

正在进入一个新的层次。本世纪50年代，人们找到作为构成物质的基石的基本粒子有三十来种，也认识到它们之间的相互作用和相互转化。探索这些“基本”粒子的更深层次的构造的努力，近三十年来取得十分辉煌的成就。三代夸克和三代轻子的粒子模型、电弱统一理论和量子色动力学，这被称作粒子物理的标准模型的建立以及它在各方面的成功，正是标志着物理学正在进入物质世界的一个更深的层次，毫无疑问这将是物理学历史上一个具有划时代的意义的大事。但是，大多数的物理学家都会同意，从本质上说，目前的标准模型还是一个唯象的模型。在欢呼它取得的多方面的胜利时，也要看到同时提出了一系列带本质性的问题。也许可以说，进入这个新层次将带来的最本质的新的物理，还没有来到我们中间。19世纪末的物理学家没能猜测到，进入比原子更深层次的探索，会在什么时候和在哪点上带来新的物理，20世纪末的人们也不能奢望会比前辈高明多少！

20世纪物理学的革命，表现出人类理性思维的伟大胜利。狭义相对论，特别是广义相对论，以它深邃的思考，严整的形式和美丽的表述，震撼着一代又一代的物理学工作者的心灵。但是，爱因斯坦也在他那无与伦比的思考导致的宇宙模型面前困惑了。感谢近四十多年来一大批物理学家和天文学家辛勤的努力和非凡的勇气，这个难以想象的革命性的关于宇宙的概念和图象建立起来了，并得到科学界多数人的认同。在大致一百五十多亿年前，宇宙从一个具有无限大的密度和具有无限大的时空曲率

的点开始了。人们猜想，在宇宙膨胀、密度和温度降低中，到10^{-44}秒时，重力相互作用和其他相互作用分离开来；到10^{-36}秒时，强相互作用和电弱相互作用分离；直到10^{-10}秒时，弱相互作用才与电磁相互作用分离，世界变成了我们现在所处的有四种基本相互作用的世界。到10^{-6}秒时，夸克开始结合成强子，也许应当说，只有从此之后的物理才是当代物理学家可以比较有把握来谈论的。直到10^{12}秒（也就是三万多年）后，原子才开始出现。这样一个综合了亚核子尺度（小于10^{-14}厘米）的物理和宇观尺度（大于10^{24}厘米）的物理的宇宙演化模型的建立，可以说是人类认识史上一个最具有革命性的、划时代的伟大事件，当代人还难以全部理解它的意义。这个宇宙学的标准模型和近年来天体物理学家取得的辉煌的成就，在物理学的面前提出了十分严峻的具有本质的挑战。如何理解这样有限而无界的时空和它的奇点？什么是在这样演化中的物质和运动规律？为什么宇宙学中有那么多“巧合”？……总之，面对着如此壮观而又如此神奇的宇宙之谜，除了由衷的赞美和敬佩，人们不禁想起爱因斯坦的话：“自然界最不可理解的就是它竟然可以理解！”

本世纪物理学的发展给我们的又一个教益是：物质世界是有层次的，反映物质世界的物理学规律也是有层次的。每一层次的物理都植根于更深层次的物理学。但是，每个层次的物理都是在真实的意义上不可穷尽的。在大自然千姿百态的丰富性面前，那些断言某某学科将不会有什么发展的说法总是被事实所粉碎的。经典力学、经

典电动力学并不因为量子力学、量子电动力学的发展而被排斥出物理学，近年来我们还不停地学习它们新的、有深刻意义的进展。光学和凝聚态物理学半个世纪来的巨大的、令人应接不暇的发展提供了最能说服人的例子。也许人们常常由于赞颂它们在实际应用上的威力的同时，不够强调它们在物理学学科上的意义。但如果我们想到在当代粒子物理和宇宙学中最重要的观念，如相变、对称性破缺、拓扑性缺陷、红外发散等等，都首先来自凝聚态物理学，而当代凝聚态物理又都广泛地而且本质地使用量子场论的语言和技术时，我们就会确信物理学的丰富性、多样性和统一性，"只有一个物理学"！

在20世纪，物理学的基本概念和技术已被应用到所有的自然科学领域。物理学与其他自然科学学科之间的边缘领域，一定意义上是当代自然科学中最富于获得丰硕成果的机遇的领域。边缘领域的发展，又反过来丰富、边深和支持了物理学本身的发展。量子力学和现代物理实验技术的应用，大大推进了现代化学的发展。对分子结构、性能和反应机理的研究，又丰富和推动了现代物理的进步。而且，如果没有现代化学的支撑，现代物理学中好些分支学科都不能产生和发展。地球科学、生命科学与物理学的边缘领域的发展，也将会是类似的情景。特别令人感到兴奋的一个新事物是近二三十年复杂性科学的发展。数学、物理学，特别是物理学与化学、地球科学、生命科学、各种应用技术科学的边缘领域研究的发展，都使人们相信，在复杂性（多维度，多组元，非线性，非平衡和开

放的）系统的结构、性能和演化中，有一些具有普遍性的运动规律和运动模式。人们自然回想到，开始于上一世纪中叶的研究能量守恒和转化的热力学和分子运动论的发展，本世纪统计物理和涨落理论的发展。有理由相信一门有重要的基础科学意义的学科，复杂性物理正在形成。它现在已经显出可能对物理学中一些最基础的问题，如必然性和随机性，无序化的倾向和有序结构的生成，不同层次的结构的自相似性等，作出有深刻物理意义的回答。也许，历史会表明，这也是人类认识史上又一个划时代的事物，同时，无疑地会对化学、地球科学、生命科学、认知科学和各种应用技术发生巨大的影响。

物理学作为一门最基础的自然科学，它的发展动力是深深地植根于人类对真理的非功利的追求。但是，历史的发展将越来越有力地证明，正是这种非功利的追求给人类带来最大的收益。本世纪发生的主要源于物理学的进展的技术革命，就是最有说服力的例子。当代技术进步的主要推动力来自纯学科性的基础研究。研究室和实验室中纯学科性的研究转变为重要的应用技术，实际生产和社会发展中遇到的问题转化为有基础学科意义的研究课题，两者关系愈来愈密切，周期愈来愈短。与之相应，在现代，杰出的基础科学研究人材和优秀的应用技术开发人材在科学素质上的要求变得更加一致了。在世纪之交，无论是制造业还是服务业，也无论是材料、信息、能源、交通、环境等技术部门，都在呼唤着新的技术变革，而认真考察就会发现，多数这些变革都主要基于物理学近年的

进展。21世纪物理学毫无疑问仍是技术进步的主要源泉。

物理学的发展从来就对人类社会思想、文化发生巨大影响。20世纪的物理学革命就更是这样。人类社会进步的一个主要动力便是科学精神，现代科学精神的典范和集中的反映就是现代物理学。我国是一个文明古国，在历史上曾经对人类的文化和科学发展做出过光辉的贡献。但是，我国接受近代科学的时间还很短，现代科学的精神实质和思维方式扎根我国还要做艰苦的努力。有些人跟着西方一些比较浅薄的哲学流派的后面，宣扬一些贬低和反对现代科学精神的言论，甚至把当代社会中由于社会矛盾而造成的后果，都归罪到现代科学精神上。这当然是完全错误的。以现代物理学为代表的科学精神，是人类进步的一面旗帜，它将高高飘扬在未来的岁月中。

当我们站在新世纪的门槛上，回顾20世纪物理学的辉煌时，会更加确信，在21世纪物理学将会同样辉煌。那些有幸进入物理学工作者的行列的年青朋友，历史将会证明，你们的选择是完全正确的。

中国科学院院士 甘子钊

1997年4月

作者前言

原子核理论是一门发展中的理论．从积极方面讲，这是指它巨大的发展前景．当前一些极基本的研究，诸如10^{-15}m以内的物质结构与时空结构，10^{-4}s以内的宇宙早期发展史，以及各种相互作用的统一等等，无一不与对原子核的研究有关，特别与其中的高能重离子碰撞研究有关．从消极方面讲，则是指它至今还没有一个统一的基本理论，只有一些分片建立的模型理论．这种头痛医头脚痛医脚的落后局面使它的一些重大推测，如反常核态、介子激波和奇异物质等，可信度大为降低而失色．仔细考察却发现，这貌似相反的两方面同出一源，都由于研究领域极为丰富，深邃．本世纪70年代以前，人们曾努力在以二体核力相互作用的核子多体系非相对论量子力学基础上建立原子核的基本理论，结果与实验不能全面相符．究其原因在于，强作用使核内核子自由度不能从强子动力学中孤立出来．核内的非核子自由度，特别是介子自由度并未冻结．由于介子自由度的参与，相对论比原来想象的重要，原子核的基本理论不可能是非相对论的．于是人们又尝试将原子核的基本理论建立在相对论强子定域场论的基础上．这是长足的进步．然而理论与实验仍有原则性的矛盾，建立原子核基本理论的目标仍未达到．这次原因在于强子的夸克结构，它的外部表现是使强子不再是一个点，因而不能由定域强子场论描写．定域强子场论与核现象的一些矛盾确实就来自核子的有限大小．何况现已知，核内核子的夸克结构可以不同于自由核子的夸克结构．即是说核子内部的夸克结构在核内并未冻结，存在核内夸克自由度．从现在的知识看，原子核的基本理论最终应建立在夸克理论的基础上．按目前普遍接受的看法就是建立在量子色动力学的基础上．

近二三十年来原子核理论不断发展，因而要求新的教材和专著．这就是写这本书的动机．作为教材，本书兼顾了传统内容和理论

的新近发展. 其中传统内容包括了内容沿传统方向的发展,例如 IBM 理论及其发展、巨共振理论、以及核反应的统一理论等. 理论的新近发展则主要指核内介子自由度和夸克自由度方面的进展,它们已超出传统核理论的范围. 作为教材,本书采用讲清楚的原则,对选定的内容详作讲解和推导. 不适合放在正文中的内容就在附录中说明.

作为专著,本书用较大篇幅介绍理论的进展,其中包括著者本人的一些工作. 文献一直引到 1995 年. 有些工作还是首次发表. 这方面的取材就难免偏颇,望同仁们指正.

本书是著者的另作《原子核物理——它的成就、问题和发展》(山西教育出版社 1995)的姊妹篇. 核物理的许多叙述性,概念性和应用性的内容,例如壳模型与实验的详细比较、核天体物理、核裂变和核聚变应用等,均已收入该书. 这使著者可在本书中放心地作理论上的深入推导.

关于书名,原曾考虑过《原子核的现代理论》,最后采用了现在的名称. 原因一则为强调本书取材已属当前原子核理论的固有内容. 现在要写一本原子核理论,内容本当如此. 二则因为任何时期的《原子核理论》都是那个时期的现代理论,作者都会力图反映当时原子核理论的最新面貌. "现代"这个形容词实非必要. 不过我们还是加了一个副标题——它的深化与扩展. 这是对这个时期原子核理论发展主要趋势的描述. 从深度上讲,它从强子层次深入到了夸克层次. 从广度上讲,它从核子系统扩展到了一般强子系统,其中包括了奇异数非零的奇异核.

著者自问水平和见识都十分有限,要写好一本这样的书是心有余而力不足的. 写完后再看也觉很不满意. 但原子核理论需要一本这样的书,只好勉为其难. 希望抛砖能引玉,引出这方面的佳作来.

著者识

1995 年 9 月 20 日

于承泽园南院

目　录

CONTENTS

第 1 章　核子与强子

1.1　核子与 π 介子，同位旋与重子数

原子核的基本成分为质子与中子．它们质量相差仅千分之一，自旋相同，在结合成原子核的强相互作用中性质极为相似，因而被当作同一种粒子的两种不同状态，统称核子．用一个动力学变量的不同取值来区分它们．这个量只能有两个不同取值，对应两个不同本征态，即质子态与中子态．可以模仿$\frac{1}{2}$自旋的理论建立这个力学量的理论，并称它为同位旋．$\frac{1}{2}$ 同位旋的三个分量可用同位旋泡利矩阵

$$\tau_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad \tau_2=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix},\qquad \tau_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{1.1}$$

表示．同位旋第 K 分量为

$$T_K=\frac{1}{2}\tau_K. \tag{1.2}$$

用同位旋第三分量T_3的值来区分质子态与中子态．对质子态取$\tau_3=1$，$T_3=\frac{1}{2}$；对中子态取 $\tau_3=-1$，$T_3=-\frac{1}{2}$．核子以基本电荷 $e=1.602\times10^{-19}$ C 为单位的电荷数 Q 与它的同位旋第三分量的关系为

$$Q=T_3+\frac{1}{2}. \tag{1.3}$$

按相对论，任何信息只能以有限速度传递，不能超光速．核子间相互作用的传递也不能超光速，即不能是直接的超距作用．应当有一种场来传递核作用，就像电磁场传递电磁作用一样．按量子论，场都是量子化的，场的量子就是粒子．可见应当有一种粒子来传递核作用，就像光子传递电磁作用那样．一个质量为 m 的粒子的能量 E 和动量 $\boldsymbol{p}$ 的关系为

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4, \tag{1.4}$$

c 为光速．将 E 换成运算 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$，$\boldsymbol{p}$ 换成运算 $-i\hbar\nabla$，$\hbar = \frac{h}{2\pi}$，h 为普朗克常数．由(1.4)可得场方程

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\hbar^2c^2\nabla^2\Phi + m^2c^4\Phi .$$

场 Φ 的量子就是那个质量为 m 的粒子．此式整理后就是克莱恩(Klein)－哥登(Gordon)方程

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \frac{1}{\lambda^2}\Phi = 0, \tag{1.5}$$

其中 $\lambda = \frac{\hbar}{mc}$ 为粒子的康普顿(Compton)波长．如果 Φ 就是传播核作用的场，那它应能由一个核子产生出来，传递到另一核子所在处并与那个核子作用．设它与核子的作用常数为 g，在 $\boldsymbol{r}_1$ 处的核子产生的场应满足有源场方程

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \frac{1}{\lambda^2}\Phi = -g\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1) . \tag{1.6}$$

设产生场的核子是静止的，$\boldsymbol{r}_1$ 与时间无关，这个方程应有静态解 $\Phi(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)$，它与时间无关．有源场方程(1.6)变为

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{\lambda^2}\Phi = -g\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1) . \tag{1.7}$$

将两边作傅立叶(Fourier)展开．对 δ 函数有

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)}d^3k, \tag{1.8}$$

Φ 场则展成

$$\Phi(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1) = \int G(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)}d^3k. \tag{1.9}$$

将它们代入(1.7)得傅立叶系数

$$G(\boldsymbol{k}) = \frac{g\lambda^2}{(2\pi)^3(k^2\lambda^2+1)} . \tag{1.10}$$

代入(1.9)，以 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1$ 为极轴取球坐标对 $\boldsymbol{k}$ 积分得

$$\begin{aligned}\Phi(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1) &= \int_0^\infty k^2dk\frac{g\lambda^2}{(2\pi)^3(k^2\lambda^2+1)}\int_0^\pi \sin\theta d\theta e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|\cos\theta}\int_0^{2\pi}d\varphi \\ &= \frac{1}{i|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}\frac{g}{4\pi^2}\int_0^\infty\frac{k\lambda^2}{k^2\lambda^2+1}(e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}-e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|})dk \\ &= \frac{1}{i|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}\frac{g}{4\pi^2}\int_{-\infty}^\infty\frac{k\lambda^2}{k^2\lambda^2+1}e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}dk .\end{aligned}$$

这是一个在 k 的复平面上沿实轴的积分．由于因子 $e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}$，可将积分路线沿绕上半复平面的半径为 ∞ 的半圆封闭．被积函数除极点 $k=\pm i\frac{1}{\lambda}$ 外是解析的，其中只有极点 $i\frac{1}{\lambda}$ 在积分路线包围的区域内，残数为 $\frac{1}{2}e^{-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|/\lambda}$．用残数定理算出积分后得

$$\Phi(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1) = \frac{g}{4\pi}\frac{e^{-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|/\lambda}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|} . \tag{1.11}$$

这个场与 $\boldsymbol{r}_2$ 处的核子作用导致一项势能

$$V(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2) = -g\Phi(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2) = -\frac{g^2}{4\pi}\frac{e^{-|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|/\lambda}}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|} . \tag{1.12}$$

它随两核子间距离 $|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|$ 的变化与库仑势相似，但多一衰减因子 $e^{-|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|/\lambda}$，表明它有有限力程．这力程可用 $\lambda = \frac{\hbar}{mc}$ 表示，即与传

递这种作用的粒子的质量有关．已知核子间相互作用的核力为短程强作用力，力程为$1\sim2\ \mathrm{fm}=(1\sim2)\times10^{-13}\ \mathrm{cm}$．由此可估计出传递核力的粒子质量约为电子质量的 200 倍．1935 年汤川秀树(Yukawa)据此预言了这种粒子的存在．由于质量介于电子质量与核子质量之间，这种粒子被称为介子．12 年后这种粒子果然在宇宙射线中被发现，随后又在加速器制造的高能核碰撞中产生出来．它们与核子有强作用，质量为电子质量的 280 倍，被称为 π 介子．具体说来，π 介子有带正电、带负电和不带电的三种．以基本电荷 e 为单位，带一个正电荷的 π^+ 介子和带一个负电荷的 π^- 介子质量均为 $140\mathrm{MeV}/c^2$，不带电的 π^0 介子质量为 $135\mathrm{MeV}/c^2$．π 介子自旋为零，因此是波色子；宇称为负，即在道量子数为 l 的状态中具有宇称 $-(-1)^l$．如果将同位旋的概念推广于 π 介子，那么它的三个不同电荷态应对应一个同位旋三重态．设对 π^+，$T_3=1$；对 π^0，$T_3=0$；对π^-，$T_3=-1$，则 π介子的电荷数与同位旋第三分量间的关系为

$$Q=T_3\ . \tag{1.13}$$

引进重子数 B，对核子取 $B=1$，对 π 介子取 $B=0$.则可将 (1.3) 和 (1.13)统一为

$$Q=T_3+\frac{B}{2}\ . \tag{1.14}$$

以后将所有参与强作用的粒子称为强子．强子中的费米子质量都不低于核子，因而称为重子．核子即是重子的一种．每一个重子赋于重子数 $B=1$，每一个反重子 $B=-1$.强子中的玻色子称为介子，$B=0$．这样定义的介子质量不一定低于核子．这里的“介”字可理解为强作用媒介的意思．

核子是有结构的．最早的证据是核子的反常磁矩．一个 $\frac{1}{2}$ 自旋，带一个正电荷的没有结构的点质子，满足狄拉克 (Dirac) 方程，应具有一个核磁子大小的磁矩．不带电的没有结构的点中子则应没有磁矩．然而实际观测到的质子磁矩为 2.79 核磁子，其中 1.79 核磁

子为反常磁矩．实测得的中子磁矩为-1.91 核磁子，全部为反常磁矩．负号表示磁矩方向与自旋相反．实测得质子电荷并不集中在一点上，而有一空间分布。质子电荷分布的方均根半径为 0.88fm．中子的总电荷虽为零，却也有一电荷分布，表现为非零的电磁形状因子．在发现强子的夸克结构前，核子的结构被理解为核子与介子场作用的结果．核子放出介子后可能重又把它吸收．放出和吸收介子之间，物理核子就表现为裸核子外有介子云缭绕．介子云有一空间分布就使核子表现出一定的电荷分布．介子绕裸核子运动会产生磁矩，就表现为核子的反常磁矩．介子云结构的激发还可表现为核子态的激发．例如下节将讲到的 Δ 重子就曾被解释为核子与 π 介子的共振．现在，虽然强子结构被归结为其中的夸克结构，但核子发射和吸收介子的动力学仍应是强子结构的重要物理内容．大夸克与强子两个层次统一理解强子结构是当前强子物理的重要课题．

1.2 重子谱与介子谱，奇异数与奇异粒子

π 介子的搜寻与发现激发起大规模寻找新粒子的第一波热情．在发现 π 介子后的十余年间，主要在本世纪 50 年代，人们从宇宙线中，从加速器制造的高能粒子碰撞中，又发现了一系列能参与强作用的粒子，即强子．它们可按自旋、宇称和同位旋等量子数分类，并按质量高低排列成谱，表现出明确的规律性．例如，质量最低的 1/2 自旋重子共有八个．它们是质子 p(938)、中子 n(940)，Λ 粒子 $\Lambda^0(1116)$，Σ粒子$\Sigma^+(1189)$、$\Sigma^0(1192)$、$\Sigma^-(1197)$，和Ξ粒子$\Xi^0(1315)$、$\Xi^-(1321)$．粒子符号右上角表示出电荷数，后面括号内的数字为以 MeV/c^2 为单位的静止质量．这些粒子的质量上下虽差$400\ \mathrm{MeV}/c^2$，但与本身质量约 $1000\ \mathrm{MeV}/c^2$相比质量差仍是小量．特别可将三种 Σ粒子当作一个电荷三重态，两种 Ξ 粒子当作一个电荷二重态，而 Λ 粒子则为电荷独态．将同位旋概念推广于这些重子．用 T 表示同位

旋量子数，T_3表示同位旋第三分量量子数．对 Σ 粒子 $T=1$，其中 Σ^+ 粒子 $T_3=1$，Σ^0 粒子 $T_3=0$，Σ^- 粒子 $T_3=-1$．对 Ξ 粒子 $T=\frac{1}{2}$，其中 Ξ^0 粒子 $T_3=\frac{1}{2}$，Ξ^- 粒子 $T_3=-\frac{1}{2}$．对 Λ 粒子 $T=T_3=0$．这些粒子都是重子，因此重子数都是 $B=1$．然而这样赋于的同位旋和重子数与这些粒子的电荷数 Q 却不符合关系(1.14)．可以明显看出这些电荷多重态的平均电荷各不相同．为表现出这种不同要引进一个新的量子数 S，称为奇异数．(1.14)可推广为

$$Q=T_3+\frac{B+S}{2}\ . \tag{1.15}$$

只要对核子取 $S=0$，对 Λ 与 Σ 粒子取 $S=-1$，而对 Ξ 粒子取 $S=-2$，则(1.15)对上列各重子均成立．$S=0$ 的粒子称为非奇异粒子，而 $S\neq0$ 的粒子称为奇异粒子．有时用到量子数

$$Y=B+S\ , \tag{1.16}$$

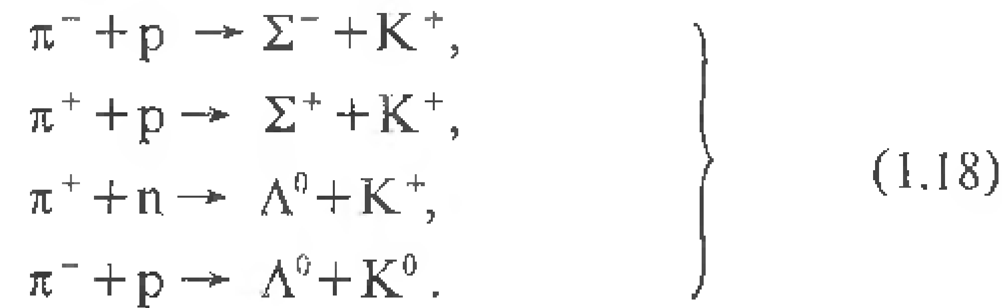
称为超荷．用它可将(1.15)改写为

$$Q=T_3+\frac{Y}{2}\ . \tag{1.17}$$

质量最低的零自旋负宇称介子也有八个．它们是 π 介子 $\pi^\pm(140)$、$\pi^0(135)$，η 介子 $\eta^0(549)$，和 K 介子 $K^\pm(494)$、$K^0(498)$ 和 $\overline{K}^0(498)$．π^- 为 π^+ 的反粒子，K^- 为 K^+ 的反粒子，$\overline{K}^0$ 为 K^0 的反粒子．它们也可分为几个同位旋多重态．其中 π 介子组成同位旋三重态，$T=1$．π^+ 介子 $T_3=1$，π^0 介子 $T_3=0$，π^- 介子 $T_3=-1$．η 介子为同位旋独态，$T=T_3=0$．K^+ 与 K^0 为同位旋二重态，$T=\frac{1}{2}$．K^+ 介子 $T_3=\frac{1}{2}$，K^0 介子 $T_3=-\frac{1}{2}$．$\overline{K}^0$ 与 K^- 也组成同位旋二重态，$T=\frac{1}{2}$．$\overline{K}^0$ 介子 $T_3=\frac{1}{2}$，K^- 介子 $T_3=-\frac{1}{2}$．为满足(1.17)，π 介子与 η 介子的超荷应为 $Y=0$，K^+ 与 K^0 介子的超荷 $Y=1$，$\overline{K}^0$ 与 K^- 介子的超荷为 $Y=-1$．对于介子 $B=0$，因此由(1.16)知，π 介子与 η

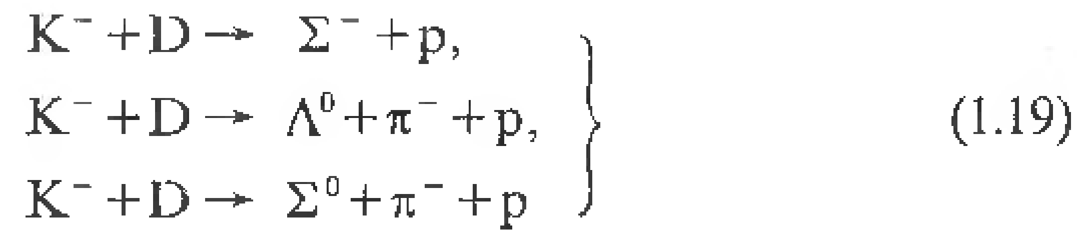
介子 $S=0$，为非奇异介子．K^+ 与 K^0 介子 $S=1$，$\overline{K}^0$ 与 K^- 介子 $S=-1$，均为奇异介子．

当用质子、中子和 π 介子等非奇异粒子相互碰撞产生强子时发现了协同产生的现象，即奇异重子的产生总伴随着 K 介子的产生，而 K 介子的产生也常伴随奇异重子的产生．早期发现的典型事例有



$$\left.\begin{array}{l}\pi^-+p\rightarrow\Sigma^-+K^+,\\ \pi^++p\rightarrow\Sigma^++K^+,\\ \pi^++n\rightarrow\Lambda^0+K^+,\\ \pi^-+p\rightarrow\Lambda^0+K^0.\end{array}\right\} \tag{1.18}$$

这种协同产生现象表现出奇异数守恒的规律．(1.18)各式左边都是非奇异粒子，各粒子奇异数之和为零．右边都含一奇异数为 −1 的重子和一个奇异数为 +1 的 K 介子，奇异数的和也是零．在宇宙射线中还发现有 Ξ 粒子与两个 K 介子的协同产生．原始宇宙射线由稳定的非奇异粒子组成，只有这种粒子才能经历长时间穿越宇宙空间到达地球．它们与大气中的原子核碰撞产生次级粒子．原子核都是非奇异的，因此这类碰撞过程的始态中各粒子奇异数之和也是零．一个 Ξ 粒子奇异数为 −2，两个 K 介子奇异数之和为 +2．因此上述产生过程末态奇异数之和为零．这也是一个奇异数守恒的过程．按奇异数守恒，伴随奇异重子产生的只能是 K^+ 与 K^0 介子而不能是 K^- 与 $\overline{K}^0$．这正是实际观察到的事实．K^- 介子的奇异数为 −1，因而可与奇异数为正值的反奇异重子协同产生，也可用来轰击非奇异粒子产生奇异重子．后者的例子有

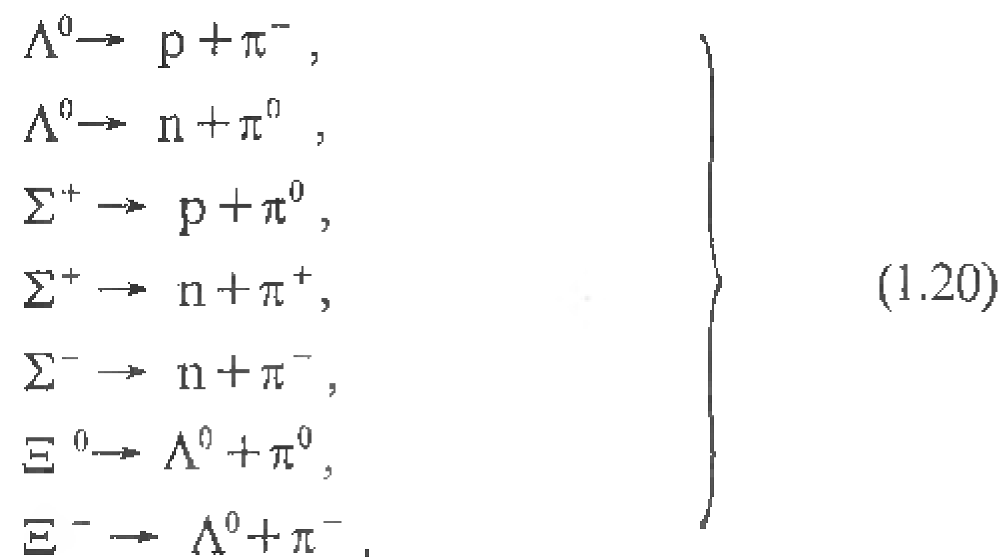


$$\left.\begin{array}{l}K^-+D\rightarrow\Sigma^-+p,\\ K^-+D\rightarrow\Lambda^0+\pi^-+p,\\ K^-+D\rightarrow\Sigma^0+\pi^-+p\end{array}\right\} \tag{1.19}$$

等，其中 D 为氘核．

在上述过程中还表现出另一守恒律，即重子数守恒．各粒子重子数之和在反应中不变．重子数守恒迄今在一切过程中成立．虽

然有些大统一理论预言重子数守恒在有些情况下会被破坏，但这种破坏迄今未在任何实验中观察到．然而奇异数守恒却只在一些过程中成立，在另一些过程中不成立．上面列举的粒子产生过程是奇异数守恒的过程．产生过程是快过程，特征时间短于 10^{-20} s，由强作用控制．因此可以说，在强作用过程中奇异数守恒．奇异粒子的衰变过程则是慢过程，特征时间长于 10^{-14} s，由弱作用控制．在这类弱作用过程中奇异数可以不守恒．例如



$$\left.\begin{aligned} &\Lambda^0 \to p+\pi^-, \\ &\Lambda^0 \to n+\pi^0, \\ &\Sigma^+ \to p+\pi^0, \\ &\Sigma^+ \to n+\pi^+, \\ &\Sigma^- \to n+\pi^-, \\ &\Xi^0 \to \Lambda^0+\pi^0, \\ &\Xi^- \to \Lambda^0+\pi^-. \end{aligned}\right\} \tag{1.20}$$

前五个过程左端 $S=-1$，右端 $S=0$；后二过程左端 $S=-2$，右端 $S=-1$．它们都有 $\Delta S=1$．K 介子衰变为非奇异粒子 $\Delta S=-1$，反 K 介子 (K^- 和 $\overline{K}^0$) 衰变为非奇异粒子 $\Delta S=1$．非奇异粒子的 β 衰变 $\Delta S=0$．可见弱作用过程有选择定则

$$\Delta S=0,\quad \pm 1. \tag{1.21}$$

由这一选择定则，关系 (1.16) 和重子数守恒知，弱作用过程中超荷 Y 一般不守恒，并有选择定则

$$\Delta Y=0,\quad \pm 1. \tag{1.22}$$

再由这一选择定则，关系 (1.17) 和电荷数守恒知，弱作用过程中同位旋第三分量 T_3 一般不守恒，并有选择定则

$$\Delta T_3=-\frac{1}{2}\Delta Y=0,\quad \pm\frac{1}{2}. \tag{1.23}$$

由于 (1.17) 左边只含强子电荷，这一选择定则只适用于纯强子过程，即只有强子参与的过程．

下面再看两组强子．质量最低的 $\frac{3}{2}$ 自旋重子有十个．它们是同位旋四重态 ($T=\frac{3}{2}$) $\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0$ 和 Δ^-，质量在 1230 至 1236 MeV/c^2 间，$B=1, Y=1, S=0$，同位旋第三分量分别为 $T_3=\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{3}{2}$；同位旋三重态 ($T=1$) $\Sigma^*(1385)$，$B=1, Y=0, S=-1$；同位旋二重态 ($T=\frac{1}{2}$) $\Xi^*(1533)$，$B=1, Y=-1, S=-2$；和同位旋独态 ($T=0$) $\Omega^-(1672)$，$B=1, Y=-2, S=-3$．质量最低的自旋为 1 的介子有八个．它们是同位旋独态 ($T=0$) $\omega(783)$，$B=0, Y=0, S=0$；同位旋三重态 ($T=1$) $\rho(770)$，$B=0, Y=0, S=0$；同位旋二重态 ($T=\frac{1}{2}$) $K^*(892)$，$B=0, Y=1, S=1$，和它们的反粒子．这些强子都满足关系 (1.15) ~ (1.17)；在强作用中同位旋，奇异数和超荷均守恒，在弱作用中服从选择定则 (1.21) ~ (1.23)．这些规律是强子的普遍规律．

1.3 强子的味SU(3) 对称，SU(3) 李代数的不可约表示

上面看到强子有很规则的谱．强子谱的规则性反映了强子的对称性．首先，同位旋对称性可推广于所有强子．强作用中同位旋守恒表明，强作用的哈密顿量与同位旋的三个分量对易，因而在同位旋转动下是不变的．同位旋的三个分量可当作 SU(2) 李代数的三个生成元，同位旋转动下的对称性即 SU(2) 李代数各元素变换下的对称性，称为 SU(2) 对称．现在除同位旋外强作用还有一个好量子数，即奇异数 S 或超荷 Y．这个新守恒量表明强作用哈密顿量在相应变换下的不变性，即一种新对称性．上节描述的强子谱表明，超荷与同位旋取值有某种关联，即这种新对称与 SU(2) 对称可能组成更高的对称．这种关联本身提供了关于更高对称的信息．本世纪 60

年代初，内曼 (Ne'eman 1961) 与盖尔曼 (Gell-Mann 1962) 确认这一对称为 SU(3) 对称．同位旋与超荷称为味量子数，从区别于下节讲述的色量子数，关于它们的对称就称为味 SU(3) 对称．

称一个矩阵的对角元之和为它的阵迹，用 tr 表示，SU(3) 李代数就是阵迹为零的三阶厄米矩阵的集合．它有八个生成元

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \quad \lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \quad \lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\\
&\lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \quad \lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix}, \quad \lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\\
&\lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}, \quad \lambda_8=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&0\\0&0&-\frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.
\end{aligned}\right\} \tag{1.24}$$

显然，它们的阵迹全为零：$\mathrm{tr}\lambda_a=0,\ a=1,2,\cdots,8$，且有正交归一关系

$$\mathrm{tr}(\lambda_a\lambda_b)=2\delta_{ab}, \quad a,b=1,2,\cdots,8 . \tag{1.25}$$

由这套生成元可线性组合出任何三阶迹零矩阵

$$\lambda=\sum_{a=1}^{8} C_a\lambda_a , \tag{1.26}$$

由正交归一关系 (1.25) 可算出展开系数

$$C_a=\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\lambda_a\lambda) . \tag{1.27}$$

如 λ 为厄米矩阵则系数 C_a 全为实数．因此 SU(3) 李代数就是具实系数的矩阵 (1.26) 的集合．

两个 n 阶矩阵 A 与 B 乘积的阵迹与相乘次序无关：

$$\mathrm{tr}(AB)=\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}\,B_{ji}=\sum_{i,j=1}^{n}B_{ji}\,A_{ij}=\mathrm{tr}(BA). \tag{1.28}$$

因此它们的厄米交换子

$$[A,B]\equiv -i\,(AB-BA) . \tag{1.29}$$

阵迹为零．又若 A 和 B 都是厄米的则 $[A,B]$ 也是厄米的．可见 SU(3) 李代数任二元素的厄米交换子仍属这一李代数，因而可用生成元 (1.24) 展开：

$$[\lambda_a\ \lambda_b]=2\sum_{c=1}^{8}f_{abc}\,\lambda_c , \tag{1.30}$$

且具体算得 f_{abc} 对下标 a,b 和 c 全反对称，其不为零的分量为

$$\left.\begin{aligned}
&f_{123}=1 ,\\
&f_{147}=-f_{156}=f_{246}=f_{257}=f_{345}=-f_{367}=\frac{1}{2} ,\\
&f_{458}=f_{678}=\frac{\sqrt{3}}{2} ,
\end{aligned}\right\} \tag{1.31}$$

及由它们经反对称关系算得的那些分量．(1.30) 为 SU(3) 李代数的结构关系，其中系数 f_{abc} 为它的结构常数．

一个集合，如果其中任二元素的线性组合仍在这个集合中就称为一个线性集合．线性集合中必有一组基底，称为生成元，由它们可线性叠加出集合中的任何元素，就像 (1.24) 通过 (1.26) 叠加出 SU(3) 李代数的任何元素那样．如果矩阵的线性集合中任二元素的厄米交换子也属于这一集合，则这个集合就是一个李代数．任何一个李代数的生成元的厄米交换子必可用这组生成元的线性组合表出，有形如 (1.30) 的关系，称为结构关系．其中的组合系数 f_{abc} 称为结构常数．如果两个李代数有相同的结构常数就称它们同构．如一个李代数与一矩阵李代数同构就称其中的矩阵李代数是这个李代数的表示．

向量的线性集合称为向量空间．向量空间中的线性子集称为它的子空间．如向量空间中确有向量不属于这个子空间，则称它为真子空

间．李代数一个表示的元素作为矩阵可对向量空间的向量作运算．被它运算的向量空间称为它的表示空间．如果表示空间有一真子空间，它的每一向量在它所表示的李代数的任一元素的变换下仍留在这个子空间中，则称这个表示是可约的，否则称为不可约的．如果一个李代数的表示是可约的，就找出它的所有不变子空间和它在这些子空间中的表示．如果这些表示中还有可约的就重复这一步骤．对有限维的表示空间总可经有限步骤找出它的全部不变子空间使李代数的表示在其中不再可约．由于可约表示只是不可约表示的简单重复，李代数的性质由它的全部不可约表示代表．称表示空间的维数为表示的维数．每个李代数都有一个显然的一维不可约表示，即用零代表它的每一个生成元．这组零生成元符合每一李代数的结构关系．除这个一维表示外维数最低的不可约表示被用来代表它所表示的李代数，或称它为这个抽象李代数的基础表示．以 (1.24) 为生成元的 SU(3) 李代数作为自身的表示是不可约的，它也就是 SU(3) 李代数的基础表示．

说强子动力学具有 SU(3) 对称是指它的哈密顿量 $\hat{H}$ 与 SU(3) 在态空间的生成元对易．这里有几层意思：1. 强子的态空间可用作 SU(3) 李代数的表示空间；2. SU(3) 李代数在态空间的表示自然是一个 SU(3) 李代数；3. 生成元 (1.24) 在态空间的表示是强子的动力学变量；4.强作用的 SU(3) 对称表明这组动力学变量是守恒的．如果强子态空间中的 SU(3) 李代数表示是可约的就要将它约化，因而可在每一个不可约表示的表示空间 (态空间的不变子空间)分别研究强子动力学．既然是不可约表示，它的表示空间就不能再分解出更小的不变子空间．即从表示空间中的任一矢量出发，经生成元的一系列作用和对所得矢量与被作用矢量的线性组合，总可到达表示空间中事先指定的任一矢量．设这个表示空间中有一个矢量是 $\hat{H}$ 的本征矢，本征值为 E. 由于生成元都与 $\hat{H}$ 对易，在这个矢量上作用任意次生成元后得出的矢量仍是 $\hat{H}$ 的本征矢，且本征值仍是 E. 由于这种作用和线性组合可以到达表示空间的任一矢量，这个表示空间的任何矢量就都

是 $\hat{H}$ 的本征矢，且本征值都是 E. 可见在 SU(3) 对称的理论中 SU(3) 李代数不可约表示的整个表示空间对能量 E 是简并的．

如果对矢量 $|\rangle$ 作线性变换 A, 将它变为

$$|\rangle_A = A|\rangle , \tag{1.32}$$

只要将所有算符 $\hat{L}$ 都作相应变换，变为

$$\hat{L}_A = A\hat{L}A^{-1} , \tag{1.33}$$

则代数关系不变．例如，若 $|L\rangle$ 为 $\hat{L}$ 的本征矢：

$$\hat{L}|L\rangle = L|L\rangle , \tag{1.34}$$

则 $|L\rangle_A$ 就是 $\hat{L}_A$ 的本征矢：

$$\hat{L}_A|L\rangle_A = A\hat{L}A^{-1}A|L\rangle = L|L\rangle_A , \tag{1.35}$$

本征值同为 L. 变换 (1.33) 称为相似变换．一个李代数的两个表示如能由一相似变换相联系就称为等价的．一个表示显然有无数个与它等价的表示，它们都表达同一代数关系，因而可由其中任意一个代表．我们只需要找不等价的不可约表示．

由矩阵 (1.24) 可定义

$$\lambda'_a = -\lambda^*_a, \quad a = 1, 2, \cdots, 8 . \tag{1.36}$$

由于 (1.30) 中的结构常数 (1.31) 是实数，厄米交换子定义 (1.29) 中又有虚单位 i, 故在 (1.30) 两边取复共轭且改号后得

$$[\lambda_a', \lambda_b'] = 2\sum_{c=1}^{8} f_{abc}\lambda_c' , \tag{1.37}$$

且 f_{abc} 仍为 SU(3) 的结构常数 (1.31)．可见 $\lambda_a'(a=1,2,\cdots,8)$ 也是 SU(3) 李代数一个表示的生成元．这个表示称为基础表示 (1.24) 的共轭表示．虽然它与基础表示同为三维，却不与它等价．这从 λ_8 的本征值为 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ，$\frac{1}{\sqrt{3}}$，$-\frac{2}{\sqrt{3}}$ 而 λ_8' 的本征值却为 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$，$-\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\frac{2}{\sqrt{3}}$ 即可看出．这个共轭表示也是不可约的．

从 (1.24) 可以看到，除第三行和第三列的零元素外 λ_1, λ_2 和 λ_3 就是泡利矩阵 τ_1, τ_2 和 τ_3．故可称

$$T_i = \frac{1}{2}\lambda_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1.38}$$

为同位旋的三个分量．再定义

$$Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8 , \tag{1.39}$$

以后可知它就是超荷．(1.24)表示空间的三个基矢为 λ_3 和 λ_8 的三个共同本征矢．把它写成 T_3 与 Y 的共同本征矢 $|T_3, Y\rangle$，这三个基矢分别为

$$|^1\rangle = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\rangle, \quad |^2\rangle = \left|-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\rangle, \quad |^3\rangle = \left|0, -\frac{2}{3}\right\rangle. \tag{1.40}$$

将表示(1.24)任一元素 $\lambda = (\lambda_i{}^j)$ 作用在这些基矢上得

$$\lambda|^j\rangle = \sum_{i=1}^{3}\lambda_i{}^j|^i\rangle . \tag{1.41}$$

由(1.24)知

$$\left.\begin{aligned} \lambda_3' = -\lambda_3^* &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_8' = -\lambda_8^* &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{1.42}$$

因此共轭表示的三个基矢为

$$|_1\rangle = \left|-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right\rangle, \quad |_2\rangle = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right\rangle, \quad |_3\rangle = \left|0, \frac{2}{3}\right\rangle. \tag{1.43}$$

设 $\lambda' = (\lambda'^i{}_j)$ 为共轭表示的一个元素．矩阵的行指标现在写成上标，而列指标写作下标．它对基矢(1.43)的作用为

$$\lambda'|_j\rangle = \sum_{i=1}^{3}\lambda'^i{}_j|_i\rangle . \tag{1.44}$$

考虑基础表示(1.24)的两个表示空间的直积，直积空间的基矢

$$|^{i_1 i_2}\rangle = |^{i_1}\rangle_1|^{i_2}\rangle_2 . \tag{1.45}$$

为两个基础表示空间的基矢 $|^{i_1}\rangle_1$ 和 $|^{i_2}\rangle_2$ 的直积．这相当于考虑两个彼此独立的自由度，并在各自由度中考虑 SU(3) 对称．两个自由度中由相应生成元表示的动力学变量现在应加起来，成为总系统的力学量．即要考虑两个基础表示的生成元的直和

$$\Lambda_a = \lambda_a(1) + \lambda_a(2) . \tag{1.46}$$

第 K 表示的元素 $\lambda(K)$ 作用在它的表示空间的矢量 $|\rangle_K$ 上．由于分别作用在不同表示空间（不同自由度）

$$[\lambda_a(1), \lambda_b(2)] = 0 , \tag{1.47}$$

因此

$$\begin{aligned} [\Lambda_a, \Lambda_b] &= [\lambda_a(1), \lambda_b(1)] + [\lambda_a(2), \lambda_b(2)] \\ &= 2\sum_{c=1}^{8} f_{abc}(\lambda_c(1) + \lambda_c(2)) \\ &= 2\sum_{c=1}^{8} f_{abc}\Lambda_c , \end{aligned} \tag{1.48}$$

其中 f_{abc} 仍为由(1.31)表示的结构常数．可见 $\Lambda_a (a = 1, 2, \cdots, 8)$ 也是 SU(3)李代数一个表示的生成元．现在看它能否约化．(1.46)表明这个表示对两个基础表示空间 1 和 2 是对称的，它对基矢的作用也就不会改变它们对两个基础表示空间的对称性．基矢(1.45)对 1 和 2 是不对称的，可将它对称化和反对称化，得到对基础表示空间 1 和 2 对称和反对称的基，由它们组成对称和反对称的表示空间．Λ 的作用既不改变基的对称性，这对称和反对称的空间就分别是这个表示的不变子空间，于是这个表示得以约化．

引进全反对称符号

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{如 } i\ j\ k \text{ 为 } 1\ 2\ 3 \text{ 的偶排列；} \\ 0, & \text{如 } i\ j\ k \text{ 中有两者相同；} \\ -1, & \text{如 } i\ j\ k \text{ 为 } 1\ 2\ 3 \text{ 的奇排列，} \end{cases} \tag{1.49}$$

i, j 和 k 均为从 1 到 3 的整数标号．利用它可得反对称表示空间的基

$$|_i\rangle = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}|^j\rangle_1|^k\rangle_2, \quad i=1,\ 2,\ 3\ . \tag{1.50}$$

这里用了与 (1.43) 相同的符号．现在证明 (1.50) 恰组成共轭表示空间的基．

证:

$$\Lambda|_i\rangle = \Lambda\sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}|^j\rangle_1|^k\rangle_2$$
$$=\sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\left(\sum_{j'=1}^{3}\lambda_{j'}^{j}|^{j'}\rangle_1|^k\rangle_2+\sum_{k'=1}^{3}\lambda_{k'}^{k}|^j\rangle_1|^{k'}\rangle_2\right).$$

由

$$\sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}(\lambda_k^j|^k\rangle_1|^k\rangle_2+\lambda_j^k|^j\rangle_1|^j\rangle_2)=0$$

得

$$\Lambda|_i\rangle = \sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}(\lambda_j^j+\lambda_k^k)|^j\rangle_1|^k\rangle_2$$
$$+\sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}(\lambda_i^j|^i\rangle_1|^k\rangle_2+\lambda_i^k|^j\rangle_1|^i\rangle_2).$$

在不为零的项中 i, j 和 k 各不相等，

$$\lambda_i^i+\lambda_j^j+\lambda_k^k=\lambda_1^1+\lambda_2^2+\lambda_3^3=\mathrm{Tr}\lambda=0,$$

$$\Lambda|_i\rangle = -\lambda_i^i|_i\rangle-\sum_{j,k=1}^{3}\lambda_i^j(\varepsilon_{jik}|^i\rangle_1|^k\rangle_2+\varepsilon_{jki}|^k\rangle_1|^i\rangle_2).$$

再由 λ 矩阵的厄密性，$\lambda_i^j=\lambda^{*}{}_j^i$，此式变为

$$\Lambda|_i\rangle = -\sum_{j=1}^{3}\lambda^{*}{}_j^i\sum_{k,l=1}^{3}\varepsilon_{jkl}|^k\rangle_1|^l\rangle_2$$
$$=\sum_{j=1}^{3}\lambda_i'^j|_j\rangle\ .$$

可见由反对称基 (1.50) 生成的表示空间中，表示 (1.46) 约化为共轭表示 (1.36)．

证毕．

可用同样的方法考虑共轭表示 (1.36) 的两个表示空间的直积，它的基矢为

$$|_{i_1 i_2}\rangle = |_{i_1}\rangle_1|_{i_2}\rangle_2\ . \tag{1.51}$$

以这组基矢张的表示空间中，生成元为

$$\Lambda_a'=\lambda_a'(1)+\lambda_a'(2), \qquad a=1, 2, \cdots, 8\ . \tag{1.52}$$

$\lambda'(k)$ 作用于第 k 共轭表示空间的矢量 $|\rangle_k$ 上．基 (1.51) 也可分解为对两个共轭表示空间对称和反对称的两组，各自张成对称和反对称的子空间．生成元 (1.52) 对 1 与 2 是对称的，它的作用不改变基矢的对称性．可见对称和反对称的子空间分别都是由生成元 (1.52) 张的李代数表示的不变子空间．这一表示得以约化，其中反对称空间的三个基可取为

$$|^i\rangle = \sum_{k,j=1}^{3}\varepsilon^{ijk}|_j\rangle_1|_k\rangle_2, \quad i=1, 2, 3\ . \tag{1.53}$$

与 (1.50) 后面的证明类似，可得

$$\Lambda'|^i\rangle = \sum_{j=1}^{3}\lambda_j^i|^j\rangle\ , \tag{1.54}$$

其中矩阵 $\lambda=(\lambda_j^i)$ 为基础表示的元素．因此，表示 (1.52) 约化到由基 (1.53) 张的表示空间后，恰得到基础表示．

基 (1.45) 张成的九维表示空间分出一个三维反对称不变子空间后剩下一个六维对称不变子空间．表示 (1.46) 约化到这个对称不变子空间后得 SU(3) 李代数的一个六维表示．可以直接验证这个表示是不可约的．由基 (1.51) 张的九维表示空间分出一个三维反对称不变子空间后也得一六维对称不变子空间．表示 (1.52) 约化到这个六维不变子空间后也得一不可约表示．它与前面讲到的那个六维表示不等价，称为SU(3) 李代数的反六维表示．

也可考虑基础表示空间与共轭表示空间的直积空间．它的基矢为

$$|^i_j\rangle = |^i\rangle_1|_j\rangle_2, \quad i, j=1, 2, 3\ . \tag{1.55}$$

在这个空间中 SU(3) 李代数表示的生成元为

$$\overline{\Lambda}_a=\lambda_a(1)+\lambda_a'(2), \qquad a=1,2,\cdots,8. \tag{1.56}$$

(1.55) 张一个九维表示空间，其中矢量为

$$|\rangle=\sum_{i,j=1}^{3}C_i{}^j|^i{}_j\rangle. \tag{1.57}$$

利用符号

$$\delta_i{}^j=\delta^i{}_j=\begin{cases}1, & 若\ i=j,\\ 0, & 若\ i\neq j,\end{cases} \tag{1.58}$$

可作矢量

$$|0\rangle=\sum_{i,j=1}^{3}\delta_i{}^j|^i{}_j\rangle=\sum_{i=1}^{3}|^i{}_i\rangle. \tag{1.59}$$

现证明它组成 SU(3) 李代数的一维不变子空间.

证: 对表示 (1.56) 中的任一元素 $\overline{\Lambda}=\lambda(1)+\lambda'(2)$ 有

$$\overline{\Lambda}|0\rangle=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(\lambda_j{}^i|^j{}_i\rangle+\lambda'^j{}_i|^i{}_j\rangle)$$

$$=\sum_{i,j=1}^{3}(\lambda_j{}^i+\lambda'^i{}_j)|^j{}_i\rangle$$

$$=\sum_{i,j=1}^{3}(\lambda_j{}^i-\lambda^{*}{}_i{}^j)|^j{}_i\rangle=0.$$

最后一个等号处用了 SU(3) 李代数元素 λ 矩阵的厄米性. 零属于任何子空间，自然也属于 (1.59) 张的一维子空间，可看作零乘 (1.59) 的结果. 因此这个一维子空间是表示 (1.56) 的一个不变子空间. (1.56) 约化到这个子空间后得一维不可约表示. 证毕.

(1.55) 张的空间中与 (1.59) 正交的矢量组成一个八维子空间. 它们与 (1.59) 的正交关系用 (1.57) 中的系数来表示就是

$$\sum_{i,j=1}^{3}\delta^i{}_jC_i{}^j=\sum_{i=1}^{3}C_i{}^i=0. \tag{1.60}$$

将 $C=(C_i{}^j)$ 当作一三行三列矩阵，这个条件就是它的阵迹为零. 现证明这个八维空间也是表示 (1.56) 的不变子空间.

证: 用 $\overline{\Lambda}$ 作用 (1.57) 两边，记

$$\overline{\Lambda}|\rangle=\sum_{i,j=1}^{3}C_i'{}^j|^i{}_j\rangle,$$

有

$$C_i'{}^j=\sum_{i'=1}^{3}\lambda_i{}^{i'}C_{i'}{}^j+\sum_{j'=1}^{3}\lambda'^j{}_{j'}C_i{}^{j'}$$

因此

$$\sum_{i=1}^{3}C_i'{}^i=\sum_{i,i'=1}^{3}(\lambda_i{}^{i'}C_{i'}{}^i+\lambda'^i{}_{i'}C_i{}^{i'})$$

$$=\sum_{i,i'=1}^{3}(\lambda_i{}^{i'}+\lambda'^{i'}{}_i)C_{i'}{}^i$$

$$=\sum_{i,i'=1}^{3}(\lambda_i{}^{i'}-\lambda^{*i}_{i'})C_{i'}{}^i=0,$$

在末一等号处再次用了 λ 矩阵的厄米性. 此式表明 $\overline{\Lambda}|\rangle$ 属于这个八维子空间. 可见这个八维空间是表示 (1.56) 的不变子空间. 证毕.

一般地考虑 n_1 个基础表示空间和 n_2 个共轭表示空间的直积空间. 它的基是

$$|^{i_1i_2\cdots i_{n_1}}_{j_1j_2\cdots j_{n_2}}\rangle=|^{i_1}\rangle_1|^{i_2}\rangle_2\cdots|^{i_{n_1}}\rangle_{n_1}|_{j_1}\rangle_1|_{j_2}\rangle_2\cdots|_{j_{n_2}}\rangle_{n_2}, \tag{1.61}$$

张成一 $3^{n_1+n_2}$ 维空间，其中的矢量为

$$|\rangle=\sum_{i_1i_2\cdots i_{n_1}}\sum_{j_1j_2\cdots j_{n_2}}C_{i_1i_2\cdots i_{n_1}}{}^{j_1j_2\cdots j_{n_2}}|^{i_1i_2\cdots i_{n_1}}_{j_1j_2\cdots j_{n_2}}\rangle. \tag{1.62}$$

系数的全体 $[C_{i_1i_2\cdots i_{n_1}}{}^{j_1j_2\cdots j_{n_2}}]$ 为这个矢量在基 (1.61) 上的表象. 在这个空间中 SU(3) 李代数表示的生成元为

$$\Lambda_a=\lambda_a(1)+\lambda_a(2)+\cdots+\lambda_a(n_1)+\lambda_a'(1)+\lambda_a'(2)+\cdots+\lambda_a'(n_2), \tag{1.63}$$

它对各基础表示空间和各共轭表示空间分别都是对称的. 利用这种对称性可证，用符号 (1.49) 将基 (1.61) 的一对上标或一对下标反对称化后得到的反对称子空间是表示 (1.63) 的不变子空间，分出这个子空间后余下的对这对上标或下标对称的子空间也是表示 (1.63) 的不变子空间. 做出对每对上标和下标分别对称的各子空间后，可定义它们的交集空间，其中每一矢量同时对每对上标和下标都对称. 这

个交集空间自然也是表示(1.63)的不变子空间．将这个表示约化到这一全对称的子空间后就不能再用符号(1.49)进一步约化了．因为对称空间反对称化将得零，从而不能再从其中分离出反对称不变子空间．现在还可以利用符号(1.58)对每对上下标按(1.59)分离出一个一维不变子空间．余下的不变子空间对每对上下标都满足条件(1.60)．至此符号(1.58)也不再能进一步约化这个表示了．从前面的证明中可看出，符号(1.49)的约化作用利用了SU(3)李代数元素λ的阵迹为零的性质，而符号(1.58)的约化作用则用了λ的厄米性．迹零与厄密是SU(3)李代数元素的全部性质，因此利用符号(1.49)和(1.58)是对SU(3)李代数表示约化的全部手段．不能用它们约化的表示就是不可约的．对直积空间的各因子空间的对称就是对上下标的对称．由于在(1.62)中上下标都是求和指标，这种对称就表现为系数$C_{i_1 i_2 \cdots i_{n_1}}^{j_1 j_2 \cdots j_{n_2}}$对每对上标和每对下标的对称．即系数对上下标分别全对称．由于这种对称，对每对上下标的条件(1.60)都是同一个条件，可由其中的一对来代表，例如表成

$$\sum_{k=1}^{3} C_{k i_2 \cdots i_{n_1}}^{k j_2 \cdots j_{n_2}} = 0 \; . \tag{1.64}$$

形如(1.62)的矢量中，系数对上下标分别全对称并符合条件(1.64)的矢量组成不可再约化的不变子空间．表示(1.63)约化到其中就成为SU(3)李代数的一个不可约表示．这种不可约表示由上标个数n_1和下标个数n_2刻画．n个分别取值1, 2和3的指标对称化后取值的方式数就是将这n个指标分给三个取值1, 2和3的方式数，也就是将n个物件分装在三个盒中的方式数，亦即n个物件用两块隔板分成三份的方式数．这也可想像成将$n+2$个物件中的两件变成隔板的方式数。这就是组合数$\frac{(n+2)(n+1)}{2}$．可见，由(1.62)组成的$3^{n_1+n_2}$维空间在加上上下标分别全对称的条件后变成$(n_1+2)(n_1+1)(n_2+2)(n_2+1)/4$维空间．对$i_2 \cdots i_{n_1}$和$j_2 \cdots j_{n_2}$的每一种取值方式有一条件(1.64)．由于$i_2 \cdots i_{n_1}$和$j_2 \cdots j_{n_2}$分别为$n_1-1$个和$n_2-1$个全对称指

标，因此共有$(n_1+1)\, n_1 (n_2+1) n_2/4$个条件(1.64)．不可约表示$(n_1, n_2)$的维数为

$$D(n_1,n_2) = \frac{(n_1+2)(n_1+1)(n_2+2)(n_2+1) - (n_1+1)n_1(n_2+1)n_2}{4}$$
$$= \frac{(n_1+1)(n_2+1)(n_1+n_2+2)}{2} \; . \tag{1.65}$$

八维表示(1,1)的表示空间由满足条件(1.60)的矢量(1.57)组成．按(1.38)定义同位旋的三个分量

$$\hat{T}_i = \frac{1}{2}\,\overline{\Lambda}_i, \qquad i=1, 2, 3, \tag{1.66}$$

和平方

$$\hat{T}^2 = \hat{T}_1^2 + \hat{T}_2^2 + \hat{T}_3^2 \, . \tag{1.67}$$

按(1.39)定义超荷

$$\hat{Y} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\overline{\Lambda}_8 \, . \tag{1.68}$$

显然，$\hat{T}^2$, $\hat{T}_3$和$\hat{Y}$是一组可同时确定的力学量．用T, T_3和Y分别表示它们的量子数，它们共同确定的态$|T, T_3, Y\rangle$组成表示的基．(1,1)表示的八个基矢为

$$|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1\rangle = |{}^{1}_{3}\rangle, \qquad |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1\rangle = |{}^{2}_{3}\rangle \, , \tag{1.69}$$

$$|0, 0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(|{}^{1}_{1}\rangle + |{}^{2}_{2}\rangle - 2|{}^{3}_{3}\rangle\right) \, , \tag{1.70}$$

$$|1, 1, 0\rangle = -|{}^{1}_{2}\rangle, \; |1, 0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|{}^{1}_{1}\rangle - |{}^{2}_{2}\rangle\right), \; |1, -1, 0\rangle = |{}^{2}_{1}\rangle \, , \tag{1.71}$$

$$|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -1\rangle = -|{}^{3}_{2}\rangle, \; |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -1\rangle = |{}^{3}_{1}\rangle \, . \tag{1.72}$$

这八个基矢可用来代表$\frac{1}{2}$自旋重子八重态．其中，同位旋二重态(1.69)代表核子，同位旋独态(1.70)代表Λ粒子，同位旋三重态

(1.71)代表Σ粒子，而同位旋二重态(1.72)则代表Ξ 粒子．基矢按(1.66) ~ (1.68)定义的同位旋和超荷与粒子的同位旋和超荷完全吻合．这八个基矢也可代表介子八重态．对自旋为零的负宇称介子八重态，同位旋二重态(1.69)按同位旋第三分量分别代表 K^+ 与 K^0 介子，同位旋独态(1.70)代表 η 介子，同位旋三重态(1.71)按同位旋第三分量分别代表 π^+,π^0 和 π^- 介子，而同位旋二重态(1.72)则按同位旋第三分量分别代表 $\overline{K}^0$ 与 K^- 介子．对自旋为一的介子八重态，两个同位旋二重态分别代表 K^* 介子和它们的反粒子，同位旋独态(1.70)代表 ω 介子，而同位旋三重态则代表 ρ 介子．在这两种情形中，粒子的量子数与八维表示的基(1.69)—(1.72)中代表它的矢量的量子数也完全吻合．

表示(3,0)的基含三个全对称上标，是十维表示．在表示的生成元

$$\Lambda_a = \lambda_a(1) + \lambda_a(2) + \lambda_a(3), \quad a = 1, 2, \cdots, 8 \tag{1.73}$$

中，可按(1.38)定义同位旋的三个分量 $\hat{T}_i = \frac{1}{2}\Lambda_i$, $i=1,2,3$, 定义它的平方 $\hat{T}^2 = \hat{T}_1^2 + \hat{T}_2^2 + \hat{T}_3^2$，并按(1.39)定义超荷 $\hat{Y} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Lambda_8$．用它们的共同本征态 $|T, T_3, Y\rangle$ 作为表示空间的基．十个基矢分别为

$$\left.\begin{aligned} &\left|\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, 1\right\rangle = |^{111}\rangle, \quad \left|\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}, 1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|^{112}\rangle + |^{121}\rangle + |^{211}\rangle), \\ &\left|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|^{122}\rangle + |^{212}\rangle + |^{221}\rangle), \quad \left|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}, 1\right\rangle = |^{222}\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{1.74}$$

$$\left.\begin{aligned} &|1, 1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|^{113}\rangle + |^{131}\rangle + |^{311}\rangle), \\ &|1, 0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|^{123}\rangle + |^{213}\rangle + |^{132}\rangle + |^{231}\rangle + |^{312}\rangle + |^{321}\rangle), \\ &|1, -1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|^{223}\rangle + |^{232}\rangle + |^{322}\rangle), \end{aligned}\right\} \tag{1.75}$$

$$\left.\begin{aligned} &\left|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|^{133}\rangle + |^{313}\rangle + |^{331}\rangle), \\ &\left|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|^{233}\rangle + |^{323}\rangle + |^{332}\rangle), \end{aligned}\right\} \tag{1.76}$$

$$|0, 0, -2\rangle = |^{333}\rangle . \tag{1.77}$$

这十个基矢可代表 $\frac{3}{2}$ 自旋重子十重态．其中超荷为 1 的同位旋四重态(1.74)按同位旋第三分量的值分别代表 $\Delta^{++},\Delta^+,\Delta^0$ 和 Δ^-；超荷为 0 的同位旋三重态(1.75)代表 $\Sigma^*(1385)$；超荷为 −1 的同位旋二重态(1.76)代表 $\Xi^*(1533)$；而超荷为 −2 的同位旋独态(1.77)则代表 $\Omega^-(1672)$．这些基矢的量子数与它们所代表的粒子的量子数也完全吻合．由超荷与前面定义的重子数的值可按(1.16)确定粒子的奇异数．

强子态与 SU(3) 李代数不可约表示空间基矢的对应表明，上节讲述的强子规律反映的是强子性质的 SU(3) 对称．然而，如前所述，严格的 SU(3) 对称要求它的一个不可约表示空间对应的强子态能量应完全简并，对静止的强子这就是要求它们的质量完全相同．实际观察到的一个强子多重态中，各强子质量相差可能很大．重子的情况好些，相差也达十分之几．介子情况更差，相差可超过一倍．这说明强子的味 SU(3) 对称是严重破缺的．相比之下，同一同位旋多重态内各强子的质量差就小得多，对重子为千分之几，对介子为百分之几．即 SU(3) 对称内的 SU(2) 子对称是一较好的对称．

李代数不仅可用来讨论对称性，也可用来讨论对称破缺．像角动量理论中将各种量按它们与角动量的对易关系分类为不同的不可约张量一样，每一种李代数都可将各种量按它们与这个李代数的生成元的对易关系分类为这个李代数的不同不可约张量．与所有生成元都对易的量称为标量，或零阶不可约张量．按李代数的术语，这种量叫卡西米尔(Casimir)算符．由于

$$[\sum_{a=1}^{8}\lambda_a^2,\lambda_b]=\sum_{a=1}^{8}(\lambda_a[\lambda_a,\lambda_b]+[\lambda_a,\lambda_b]\lambda_a)$$
$$=\sum_{a,c=1}^{8}f_{abc}(\lambda_a\lambda_c+\lambda_c\lambda_a)$$
$$=\sum_{a,c=1}^{8}(f_{abc}+f_{cba})\lambda_a\lambda_c=0,$$

其中最后一等号处用了 f_{abc} 的全反对称性，

$$C=\sum_{a=1}^{8}\lambda_a^2 \tag{1.78}$$

就是 SU(3) 李代数的一个卡西米尔算符．卡西米尔算符既然与李代数的每一元素对易就可以参加确定表示空间基矢的每一完备力学量组．李代数任何元素对这样确定的基矢的作用，以及作用前后矢量的任何叠加，结果都仍是这个卡西米尔算符的本征矢，且本征值不变．如果李代数的这个表示是不可约的，通过李代数元素的作用和作用前后矢量的适当叠加就可从一个基矢到达另一基矢．因此所有基矢的卡西米尔算符的本征值都应相同．可见李代数一个不可约表示空间的全部矢量都是卡西米尔算符的本征矢，本征值都是一样的，即卡西米尔算符对一不可约表示为一常数．李代数的不可约表示可用它的卡西米尔算符值刻画．

如果有八个量 V_a, $a=1,2,\cdots,8$, 它们与生成元有对易关系

$$[\lambda_a,V_b]=2\sum_{c=1}^{8}f_{abc}V_c,\quad a,b=1,2,\cdots,8, \tag{1.79}$$

则称这八个量组成一 SU(3) 矢量集．八个生成元 (1.24) 自身就是一个 SU(3) 矢量集．此外，可直接验证

$$D_a=\frac{1}{6}\sum_{b,c=1}^{8}d_{abc}\lambda_b\lambda_c,\quad a=1,2,\cdots,8\ , \tag{1.80}$$

也组成一 SU(3) 矢量集，其中 d_{abc} 对下标全对称，其不为零的分量为

$$\left.\begin{aligned} d_{146}=d_{157}=-d_{247}=d_{256}=d_{344}=d_{355}=-d_{366}=-d_{377}=\frac{1}{2}\ ,\\ d_{118}=d_{228}=d_{338}=-d_{888}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ ,\\ d_{448}=d_{558}=d_{668}=d_{778}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\ ,\end{aligned}\right\} \tag{1.81}$$

以及由此按全对称性得到的其他分量．

在这一分类系列中，标量是最简单的．它具有完全的 SU(3) 对称，因此可用来表示强子哈密顿量中的 SU(3) 对称部分．矢量则可以用来表示对称破缺．由于破缺后 $\hat{T}^2,\hat{T}_3,\hat{Y}$ 仍守恒，强子哈密顿量中SU(3) 破缺部分 $\hat{H}'$ 应与 $\hat{T}^2$, $\hat{T}_3$ 和 $\hat{Y}$ 对易．在SU(3) 矢量集中只有第八矢量有这一性质．已知的 SU(3) 矢量集只有生成元与 (1.80)，强子的 SU(3) 破缺哈密顿量应为它们的第八矢量的线性组合．在一个给定的不可约表示中可表为

$$\hat{H}'=a_1\Lambda_8+a_2D_8\ , \tag{1.82}$$

其中 a_1 与 a_2 为常数．由 (1.80) 和 (1.81) 实际算得

$$D_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\hat{T}^2-\frac{1}{4}\ \hat{Y}^2-\frac{1}{12}\ C\right), \tag{1.83}$$

其中卡西米尔算符

$$C=\sum_{a=1}^{8}\Lambda_a^2 \tag{1.84}$$

在该不可约表示中为常数，

$$\hat{T}^2=\sum_{i=1}^{3}\hat{T}_i^2,\quad \hat{T}_i=\frac{1}{2}\ \Lambda_i,\ i=1,2,3, \tag{1.85}$$

$$\hat{Y}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ \Lambda_8\ . \tag{1.86}$$

将 (1.83) 和 (1.86) 代入 (1.82) 得

$$\hat{H}'=\sqrt{3}\ a_1\hat{Y}+\frac{a_2}{\sqrt{3}}\left(\hat{T}^2-\frac{1}{4}\ \hat{Y}^2\right)-\frac{a_2}{12\sqrt{3}}\ C. \tag{1.87}$$

单个强子的能量为

$$E=\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}\ . \tag{1.88}$$

要能用微扰法计算 $\hat{H}'$ 对强子能量的修正必须能量本身很高，因此动量 p 应足够大．在此情况下(1.88)可作二项式展开：

$$E=pc\sqrt{1+\left(\frac{mc}{p}\right)^2}=pc+\frac{1}{2}\ \frac{m^2c^3}{p}\ +\cdots\ . \tag{1.89}$$

可见 $\hat{H}'$ 对能量的修正对一定动量的粒子而言表现为对质量平方 m^2 的修正．按(1.87)它可表为

$$m^2=m_0^2+c_1Y+c_2\left[T(T+1)-\frac{Y^2}{4}\right], \tag{1.90}$$

其中 c_1, c_2 和 m_0 为重新定义的常数．这个关系称为盖尔曼(Gell-Mann 1962)-大久保(Okubo 1962)公式．如果在一个SU(3)多重态内质量偏差比质量本身小得多，例如像重子八重态和重子十重态那样，则 $m^2-m_0^2\approx 2m_0(m-m_0)$．定义 $c_1'=\frac{c_1}{2m_0}$，$c_2'=\frac{c_2}{2m_0}$，公式(1.90)可改写为

$$m=m_0+c_1'Y+c_2'\left[T(T+1)-\frac{Y^2}{4}\right]. \tag{1.91}$$

忽略每个同位旋多重态内各粒子的质量差，$\frac{1}{2}$ 自旋重子八重态共有四种不同质量，即核子质量 m_N，Λ粒子质量 m_Λ，Σ粒子质量 m_Σ 和Ξ粒子质量 m_Ξ．如果它们能用一个三参数公式(1.91)表出就表明它们之间存在一个关系．将这些粒子的量子数代入(1.91)，消去参数 m_0, c_1' 和 c_2'，就得到这个关系

$$\frac{1}{4}\ (m_\Sigma+3m_\Lambda)=\frac{1}{2}\ (m_N+m_\Xi). \tag{1.92}$$

将实验测得的质量代入此式，发现它确实在千分之七的精确度内很好成立．对重子十重态，同位旋量子数与超荷量子数间有简单关系

$$T=\frac{Y}{2}\ +1\ . \tag{1.93}$$

代入(1.91)，将它化简为

$$m=m_0'+c_1''Y. \tag{1.94}$$

此式表明SU(3)十重态的四个同位旋多重态的质量成等差数列．这正是实验观察到的现象，误差也仅千分之七．这种精确度已可与同位旋SU(2)子对称相比．对介子八重态须用公式(1.90)．对零自旋负宇称介子八重态，它导致

$$m_\pi^2+3m_\eta^3=4m_K^2, \tag{1.95}$$

m_π, m_η 和 m_K 分别为π介子，η介子和K介子的质量．将这些质量的实验值代入(1.95)，发现它也在百分之六的误差范围内成立．这一精确度虽低于重子的相应精度，却可与介子的同位旋SU(2)对称的精度相比．大大增强了人们对强子味SU(3)对称及其对称破缺理论的信心．

1.4　关于存在夸克及色自由度的预言及其实验检验，强子的夸克组成

强子与SU(3)李代数不可约表示空间的基对应常表述为强子填充了SU(3)李代数的不可约表示．由上节知，不可约表示都可由基础表示和共轭表示组成．由于基础表示和共轭表示又可按(1.50)和(1.53)互相组成，不可约表示也可单由基础表示或单由共轭表示组成．人们自然会问，这种由基础表示和共轭表示组成其他不可约表示的关系只是一种数学关系呢还是反映了客观存在的结构关系呢？具体说就是，是否有粒子与基础表示和共轭表示空间的基对应，是否这些粒子组成了强子．果真如此，强子就不再是基本粒子，而是复合粒子了．

1964年盖尔曼(Gell-Mann 1964)终于跨出了决定性的一步．他设SU(3)李代数基础表示空间的三个基(1.40)对应着三种客观存在

的粒子,称之为夸克,而共轭表示空间的三个基(1.43)则对应反夸克.具体说来,(1.40)定义的基矢 $|^1\rangle$对应上夸克,记作 u,又称 u 夸克;基矢 $|^2\rangle$对应下夸克,记作 d,又称 d 夸克;基矢 $|^3\rangle$对应奇夸克,记作 s,又称 s 夸克.(1.43)定义的基矢$|_1\rangle$对应上夸克的反粒子,记作$\bar{u}$,又称$\bar{u}$ 反夸克;基矢 $|_2\rangle$对应下夸克的反粒子,记作$\bar{d}$,又称$\bar{d}$ 反夸克;基矢 $|_3\rangle$对应奇夸克的反粒子,记作$\bar{s}$,又称$\bar{s}$ 反夸克.与重子十重态对应的 SU(3) 李代数十维表示空间的基矢由三个对称上标标志.这可以理解为十重态的每个重子由三个夸克组成,且它的味自由度态矢量对三个夸克全对称.就用夸克符号表示它所对应的基矢,用强子符号表示它在相应表示空间对应的基矢,十维表示基矢与基础表示基矢的关系(1.74)～(1.77)可表成十重态重子的夸克结构波函数的形式:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta^{++}=\mathrm{uuu},\quad \Delta^{+}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathrm{uud}+\mathrm{udu}+\mathrm{duu}),\\ &\Delta^{0}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathrm{udd}+\mathrm{dud}+\mathrm{ddu}),\quad \Delta^{-}=\mathrm{ddd},\end{aligned}\right\} \tag{1.96}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma^{*+}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathrm{uus}+\mathrm{usu}+\mathrm{suu}),\\ &\Sigma^{*0}=\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathrm{uds}+\mathrm{dus}+\mathrm{usd}+\mathrm{dsu}+\mathrm{sud}+\mathrm{sdu}),\\ &\Sigma^{*-}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathrm{dds}+\mathrm{dsd}+\mathrm{sdd}),\end{aligned}\right\} \tag{1.97}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Xi^{*0}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathrm{uss}+\mathrm{sus}+\mathrm{ssu}),\\ &\Xi^{*-}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathrm{dss}+\mathrm{sds}+\mathrm{ssd}),\end{aligned}\right\} \tag{1.98}$$

$$\Omega^{-}=\mathrm{sss}. \tag{1.99}$$

为节省书写,这里用排列的位置兼作夸克的标号.例如,uds 是 $u_1d_2s_3$ 的简写,表示第一个夸克为 u 态,第二个夸克为 d 态,而第三个夸克为s 态.

既然是三个夸克组成一个重子,每个夸克的重子数就是1/3.将这个重子数和(1.40)表示出的各夸克的超荷代入(1.16),可得各夸克的奇异数 S.对 u、d 夸克分别有 $S=0$,而对 s 夸克有 $S=-1$.这就是奇夸克名称的由来.将(1.40)表示出的各夸克的超荷和同位旋第三分量代入(1.17)可得各夸克的电荷数 Q.对 u 夸克 $Q=2/3$,对 d 夸克 $Q=-1/3$,而对 s 夸克 $Q=-1/3$.这里,人们第一次遇到分数电荷数.这是夸克的一种奇特性质.

既然每个夸克的重子数为 $\frac{1}{3}$,八重态的每个重子也应由三个夸克组成.如果将这些重子与 SU(3) 李代数八维表示空间的基(1.69)～(1.72)对应,其中的下标必须由两个上标按(1.50)反对称化组成.考虑归一化后,共轭表示的三个复合基应表为

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{ds}-\mathrm{sd}),\quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{su}-\mathrm{us}),\quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{ud}-\mathrm{du}). \tag{1.100}$$

在用它们组成八维表示的基矢时有三种不同的做法.即将 1, 2 两夸克反对称,或将 2, 3 两夸克反对称,或将 3, 1 两夸克反对称.三种做法得到三个八维表示,但只有其中两个是独立的,第三个可由另两个线性组合而成.用下标 1a 记第 2, 3 两夸克反对称的八维表示,下标 3a 记第 1, 2 两夸克反对称的八维表示.将这两个八维表示当作独立的.仍用八重态重子的符号记八维表示空间的基,这两个八维表示与基础表示的关系(1.69)～(1.72)可表为

$$\mathrm{p}_{1a}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{uud}-\mathrm{udu}),\quad \mathrm{n}_{1a}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{dud}-\mathrm{ddu}), \tag{1.101}$$

$$\Lambda_{1a}^{0}=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\mathrm{uds}-\mathrm{usd}+\mathrm{dsu}-\mathrm{dus}-2\mathrm{sud}+2\mathrm{sdu}), \tag{1.102}$$

$$
\left.\begin{aligned}
\Sigma_{1a}^{+} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{usu}-\mathrm{uus}),\\
\Sigma_{1a}^{0} &= \frac{1}{2}(\mathrm{uds}-\mathrm{usd}-\mathrm{dsu}+\mathrm{dus}),\\
\Sigma_{1a}^{-} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{dds}-\mathrm{dsd}),
\end{aligned}\right\} \tag{1.103}
$$

$$
\Xi_{1a}^{0} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{ssu}-\mathrm{sus}),\quad \Xi_{1a}^{-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{sds}-\mathrm{ssd}), \tag{1.104}
$$

和

$$
\mathrm{p}_{3a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{udu}-\mathrm{duu}),\quad \mathrm{n}_{3a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{udd}-\mathrm{dud}), \tag{1.105}
$$

$$
\Lambda_{3a}^{0} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\mathrm{dsu}-\mathrm{sdu}+\mathrm{sud}-\mathrm{usd}-2\mathrm{uds}+2\mathrm{dus}), \tag{1.106}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\Sigma_{3a}^{+} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{suu}-\mathrm{usu}),\\
\Sigma_{3a}^{0} &= \frac{1}{2}(\mathrm{dsu}-\mathrm{sdu}-\mathrm{sud}+\mathrm{usd}),\\
\Sigma_{3a}^{-} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{dsd}-\mathrm{sdd}),
\end{aligned}\right\} \tag{1.107}
$$

$$
\Xi_{3a}^{0} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{sus}-\mathrm{uss}),\quad \Xi_{3a}^{-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{dss}-\mathrm{sds}). \tag{1.108}
$$

基(1.101)～(1.104)与基(1.105)～(1.108)虽是彼此独立的却并非彼此正交．用 B_{1a} 和 B_{3a} 分别表示这两组基中的任一基，由 u, s 和 d 之间的正交归一性可算得它们的标量积

$$
B_{1a}^{\dagger}B_{3a} = -\frac{1}{2}\ . \tag{1.109}
$$

由此，可将这两组基线性组合起来，得八维表示的一组新基，其中每一个基为

$$
B_{1s} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\left(B_{3a}+\frac{1}{2}B_{1a}\right). \tag{1.110}
$$

具体做出来就是

$$
\left.\begin{aligned}
\mathrm{p}_{1s} &= \sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathrm{duu}-\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathrm{uud}+\mathrm{udu}),\\
\mathrm{n}_{1s} &= -\sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathrm{udd}+\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathrm{dud}+\mathrm{ddu}),
\end{aligned}\right\} \tag{1.111}
$$

$$
\Lambda_{1s}^{0} = \frac{1}{2}(\mathrm{usd}+\mathrm{uds}-\mathrm{dsu}-\mathrm{dus}), \tag{1.112}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\Sigma_{1s}^{+} &= \sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathrm{suu}-\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathrm{usu}+\mathrm{uus}),\\
\Sigma_{1s}^{0} &= -\frac{1}{\sqrt{12}}(\mathrm{usd}+\mathrm{uds}+\mathrm{dsu}+\mathrm{dus}-2\mathrm{sdu}-2\mathrm{sud}),\\
\Sigma_{1s}^{-} &= \sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathrm{sdd}-\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathrm{dsd}+\mathrm{dds}),
\end{aligned}\right\} \tag{1.113}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\Xi_{1s}^{0} &= -\sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathrm{uss}+\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathrm{sus}+\mathrm{ssu}),\\
\Xi_{1s}^{-} &= -\sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathrm{dss}+\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathrm{sds}+\mathrm{ssd}).
\end{aligned}\right\} \tag{1.114}
$$

很容易看出这组基都是归一化的，且对第 2, 3 两夸克对称，这种对称由下标 1s 记载．由于对第 2, 3 两夸克的对称性质相反，这组基与基(1.101)～(1.104)正交．八重态重子的夸克结构波函数可由基(1.101)～(1.104)与基(1.111)～(1.114)线性组合而成．

八维表示的基(1.69)～(1.72)与八重态介子对应时，下标直接与反夸克 $\bar{u}$, $\bar{d}$ 和 $\bar{s}$ 对应．这就保证了介子的重子数为零．用自旋为零的负宇称介子八重态中的介子符号记八维表示的基，(1.69)～(1.72)可表为

$$
K^{+} = u\bar{s},\quad K^{0} = d\bar{s}\ , \tag{1.115}
$$

$$
\eta = \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s}), \tag{1.116}
$$

$$\pi^{+}=-\mathrm{u}\bar{\mathrm{d}},\ \pi^{0}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{u}\bar{\mathrm{u}}-\mathrm{d}\bar{\mathrm{d}}),\ \pi^{-}=\mathrm{d}\bar{\mathrm{u}}, \tag{1.117}$$

$$\overline{\mathrm{K}}^{0}=-\mathrm{s}\bar{\mathrm{d}},\ \mathrm{K}^{-}=\mathrm{s}\bar{\mathrm{u}}. \tag{1.118}$$

自旋为1的八重态介子的味自由度态矢量与(1.115)～(1.118)的相应表达式相同，即

$$\mathrm{K}^{*+}=\mathrm{u}\bar{\mathrm{s}},\ \mathrm{K}^{*0}=\mathrm{d}\bar{\mathrm{s}}, \tag{1.119}$$

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathrm{u}\bar{\mathrm{u}}+\mathrm{d}\bar{\mathrm{d}}-2\mathrm{s}\bar{\mathrm{s}}), \tag{1.120}$$

$$\rho^{+}=-\mathrm{u}\bar{\mathrm{d}},\ \rho^{0}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{u}\bar{\mathrm{u}}-\mathrm{d}\bar{\mathrm{d}}),\ \rho^{-}=\mathrm{d}\bar{\mathrm{u}}, \tag{1.121}$$

$$\overline{\mathrm{K}}^{*0}=-\mathrm{s}\bar{\mathrm{d}},\ \mathrm{K}^{*-}=\mathrm{s}\bar{\mathrm{u}}. \tag{1.122}$$

三个夸克既能组成$\frac{3}{2}$自旋重子，又能组成$\frac{1}{2}$自旋重子，这表明夸克的自旋应为$\frac{1}{2}$，因而是费米子．现在还没有它具内部结构的证据，宜假定它是基础粒子，是点粒子．它应满足狄拉克方程，即是狄拉克粒子．自由粒子的狄拉克方程为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}+\beta mc^{2})\psi, \tag{1.123}$$

其中m为粒子的质量，$\hat{\boldsymbol{p}}=-\mathrm{i}\hbar\nabla$为动量算符，

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix}\quad \beta=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix} \tag{1.124}$$

为四阶狄拉克矩阵，矩阵中的0实际为二阶零矩阵，I为二阶幺矩阵，而

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_y=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{1.125}$$

为二阶泡利(Pauli)矩阵．狄拉克粒子的宇称算符$\hat{\Pi}$定义为

$$\hat{\Pi}\psi(\boldsymbol{r})=\beta\psi(-\boldsymbol{r}). \tag{1.126}$$

由(1.123)可得定态狄拉克方程

$$(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}+\beta mc^{2})\psi=E\psi. \tag{1.127}$$

它有正、负两种能态的解．真空被定义为负能态填满粒子而正能态全空着的状态．负能态的空穴表现为反粒子．在(1.127)两边取复共轭，由E的实性得

$$(-c\boldsymbol{\alpha}^{*}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}+\beta^{*}mc^{2})\psi^{*}=E\psi^{*}.$$

(1.124)与(1.125)表明

$$\alpha_x^{*}=\alpha_x,\ \alpha_y^{*}=-\alpha_y,\quad \alpha_z^{*}=\alpha_z,\ \beta^{*}=\beta. \tag{1.128}$$

代入上式，两边作用以

$$\gamma_y=-\mathrm{i}\beta\alpha_y=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\sigma_y\\ \mathrm{i}\sigma_y & 0\end{pmatrix}, \tag{1.129}$$

利用$\alpha_x,\alpha_y,\alpha_z$与$\beta$间的反对易关系得

$$(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}+\beta mc^{2})\psi^{(c)}=-E\psi^{(c)}, \tag{1.130}$$

其中

$$\psi^{(c)}(\boldsymbol{r})=\gamma_y\psi^{*}(\boldsymbol{r}) \tag{1.131}$$

称为$\psi(\boldsymbol{r})$的电荷共轭波函数．在这里它表现为能量符号相反态的波函数．取$E>0$，(1.127)的解ψ描述正能态粒子，$\psi^{(c)}$则描述相应负能态的粒子．这个负能态的空穴就是能量与ψ相同的反粒子．它的宇称与负能态粒子的宇称相同，即为$\psi^{(c)}$的宇称．设正能态有宇称Π，即

$$\hat{\Pi}\psi=\Pi\psi\ . \tag{1.132}$$

由反对易关系

$$\beta\gamma_y=-\gamma_y\beta \tag{1.133}$$

知

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}\psi^{(c)}(\boldsymbol{r})&=\beta\psi^{(c)}(-\boldsymbol{r})=\beta\gamma_y\psi^{*}(-\boldsymbol{r})\\ &=-\gamma_y[\beta\psi(-\boldsymbol{r})]^{*}=-\Pi\psi^{(c)}(\boldsymbol{r})\ .\end{aligned} \tag{1.134}$$

它表明能量相同的粒子与反粒子宇称相反．在质量最低的介子八重态中，介子内的夸克与反夸克都要处于能量最低的状态，因而宇称相反．这可以解释质量最低的自旋为0和1的八重态中，介子的宇称均为负．

在强子的夸克理论发展过程中曾碰到一个重大问题，那就是夸克的统计性．夸克具 1/2 自旋，应服从费米统计．态矢量对夸克交换应是全反对称的．然而如前所述，重子十重态中每个重子内三个夸克的味波函数是全对称的．为保证质量最低，重子内三个夸克都应处在能量最低的状态．夸克能量主要取决于它的空间－自旋状态．为保证总能量最低，三个夸克都应处于能量最低的空间－自旋态．即基态重子内三个夸克的空间－自旋态也是全对称的．如果夸克只有空间－自旋和味自由度，它的波函数就是全对称的．这与服从费米统计的要求相违背．这个问题困扰了人们许多年．最后仍不得不引进一个新自由度，称为色，假定重子内三个夸克的色波函数是全反对称的．全反对称色波函数与全对称的空间－自旋－味波函数相乘，总波函数得以全反对称，从而服从费密统计．为使三个夸克的色波函数全反对称，夸克至少应有三种不同色态．将它们作为 SU(3) 基础表示空间的三个基，建立色 SU(3) 李代数．这三个色态的全反对称态是色 SU(3) 李代数的一维表示空间的基，称为色单态．色SU(3) 李代数的每一元素作用在这个态上均得零，因而色单态是无色的，又称无色态．由于从未观察到强子或强子系统的色，强子或强子系统只能处于色单态，恒无色．强子内的夸克有色，强子或强子系却无色．色只能出现在强子内部．这种情形称为色禁闭．类似地，强子内部有夸克，可从未观察到游离的夸克，这种情形称为夸克禁闭．

既然夸克与色都不能直接观察，又如何判断关于它们的论断的真伪呢？这里就需要物理学家的洞察力，需要将理论认识与实际观察和可能发生的现象相联系的艺术．考虑一对正负电子相撞，通过电磁作用湮灭为一个虚光子，这个虚光子再通过电磁作用重新变成一对带电的正反粒子．这一对末态正反粒子可以就是一对正负电子，这就是弹性散射过程．末态正反粒子可能是一对正负 μ 子，它们可直接观察到．末态粒子也可能是一对正反夸克．夸克有色，会

立即引起周围真空相变，产生并俘获与自己的色相反的夸克，把带色的夸克通通禁闭起来形成无色的强子．这类过程表现为一对正负电子湮灭为若干强子．当观察到这种过程时可以断定，正负电子对湮灭成的虚光子转变成了一对正反夸克，却不能识别形成的是一对什么样的正反夸克．于是只能计总数，即计一对正负电子湮灭成强子的事件数．它是湮灭成各种正反夸克对的事件数的总和．设在同样条件下进行了一系列正负电子对碰撞，其中有 N_1 次形成强子，N_2 次形成正负 μ 子对．它们的比

$$R = \frac{N_1}{N_2}$$

是一个可由实验测定的数．下面看看它传达了什么信息．

这些过程的始态一端是相同的，即正负电子对湮灭为一个虚光子；末态一端的差别是虚光子转化为不同正反粒子对．好在这些过程都是电磁作用过程，因此发生的几率只与末态正反粒子的电荷和质量有关．当质心系能量远大于末态正反粒子静止能量之和时，末态粒子质量可以忽略，过程发生的几率就只与末态粒子的电荷有关，具体说就是正比于末态粒子电荷的平方．考虑质心系能量区间 1GeV ～ 3GeV．这一能区远高于一对正负 μ 子静止能量之和，一般认为它也高于一对 u 夸克或一对 d 夸克或一对 s 夸克静止能量之和，因此过程几率正比于末态粒子电荷平方的关系成立．另一方面，本世纪 70 年代又发现了强子的粲味和底味，因而应存在粲夸克 c 和底夸克 b，不过一对粲夸克的静止能量之和高于 3 GeV，底夸克的静止能量更高．这一能区的上限低于正反粲夸克对与正反底夸克对的产生阈，因而不必考虑这些重夸克的贡献．u、d 和 s 夸克的电荷分别为 2/3、－1/3 和－1/3，且各有三种不同的色，μ 子只有一种，电荷为－1，因此

$$R = 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2\right] : (-1)^2 = 2.$$

此值与观测结果相符．可见，实验事实与存在具分数电荷的夸克且夸克有三种不同色态的概念一致．更高能区的实验结果也与存在具分数电荷的粲夸克和底夸克且它们也有三种不同色态的概念一致．当然，现在人们普遍相信夸克理论不只凭一两个实验，而是由于它的结果与迄今的实验结果一致，或至少不与任何实验结果相矛盾．

1.5 胶子，量子色动力学，强子结构的口袋模型

夸克结合成强子表明它们之间有相互作用．按相对论，这种作用也只能以不超过光速的有限速度在时空中逐点传播，因此应存在传播这种作用的场，称为胶场．按量子论，这种场也应是量子化的，胶场的量子称为胶子．将夸克和胶子当作基本的点粒子，将夸克场与胶场的作用当作基本的定域相互作用，可以建立起强作用和强子的基本理论．这种理论已按在时空中逐点色 SU(3) 对称的规范场论建立起来，这就是量子色动力学，按英文字头简称 QCD．味相同色不同的夸克质量完全相同，表示夸克有完全的（不破缺的）色 SU(3) 对称．在时空中逐点具有色 SU(3) 对称的夸克理论要求存在色规范场 (Yang 1954)，这就是胶场．胶场与夸克的关系类似电磁场与电子的关系．电磁场与电子的电荷作用，胶场则与夸克的"色荷"作用．然而这里有一原则区别．电磁场及其量子——光子本身不带电，电磁场不会与自身作用．这使自由电磁场的理论成为线性理论．光子不会与自身直接作用，而只能以荷电粒子为中介、相互作用．这使量子电动力学成为微弱地非线性的．这种非线性即电磁作用的结果可用微扰法逐级算出，并与迄今的实验结果很好符合，使量子电动力学成为迄今与实验相符最好的理论．胶场或其量子——胶子则不同，它们组成色 SU(3) 八维表示空间的基底，即它们本身是带色的．胶场会与自身的"色荷"作用，这使胶场本身的理论成为非线性的，自由胶场根本不存在．胶场理论的非线性，胶子间的直接相互作用，导致量子色动力学的复杂性，使求解极为困难，另一方面也导致量子色动

力学的一些特异结果，其中有些在说明强子的夸克结构方面是关键的．这特别指色禁闭与渐近自由．如前所述，色禁闭使夸克和胶子这类有色粒子不能游离于强子之外，而只能组成无色的强子或强子系统．渐近自由使束缚于强子内的夸克或胶子的运动几乎是自由的，它们之间只有不强的色作用．在量子色动力学未能直接解出强子结构的条件下，这些特点是建立强子结构的模型理论的重要指示．

胶场作为色规范场是无味的，胶子处于味单态．它们与夸克的作用只与夸克的色荷有关而与味无关，有单一的作用常数 g．胶场为矢量场，用 $B^a_\mu(r,t)$ 表示，其中 $\mu=1,2,3,4$ 为矢量的空间和时间分量指标，$a=1,2,\cdots,8$ 为色指标。采用 $c=\hbar=1$ 的自然单位．由色势 B^a_μ 可得色场强

$$G^a_{\mu\nu}=\partial_\mu B^a_\nu-\partial_\nu B^b_\mu+2gf_{abc}B^b_\mu B^c_\nu \ , \tag{1.135}$$

其中 $\partial_\mu\equiv\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$，$f_{abc}$ 为 SU(3) 李代数的结构常数 (1.31)．用 Ψ_f 表示味为 f 的夸克场，它是现实时空中狄拉克双旋量与色 SU(3) 李代数三维基础表示空间矢量的直积．空间坐标自由度的算符和狄拉克矩阵对狄拉克双旋量运算，而色 SU(3) 李代数的元素则对色空间的三维矢量运算．量子色动力学中夸克胶子系统的拉格朗日 (Lagrange) 量密度为

$$\mathscr{L}=\sum_f\mathscr{L}_f+\mathscr{L}_g \ . \tag{1.136}$$

其中

$$\mathscr{L}_g=-\frac{1}{4}\sum_{a=1}^{8}G^a_{\mu\nu}G^a_{\mu\nu} \tag{1.137}$$

为胶场的拉格朗日量密度，这里采用了爱因斯坦 (Einstein) 求和约定，即对重复的希文指标自动从 1 到 4 求和．

$$\mathscr{L}_f=-\overline{\Psi}_f\left[\gamma_\mu\left(\partial_\mu-ig\sum_{a=1}^{8}B^a_\mu\lambda_a\right)+m_f\right]\Psi_f \tag{1.138}$$

为 f 味夸克及其与胶场作用的拉格朗日量密度，其中 m_f 为 f 味夸克的质量，$\lambda_a(a=1,2,\cdots,8)$ 为 SU(3) 李代数的生成元(1.24)，不过现在是作用在色空间的矢量上，$\overline{\Psi}_f=\Psi_f^\dagger\beta$，而

$$\left.\begin{aligned}\gamma_j&=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\sigma_j\\ \mathrm{i}\sigma_j & 0\end{pmatrix},\quad j=1,2,3,\quad 和\\ \gamma_4&=\beta=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\tag{1.139}$$

则为协变狄拉克矩阵．如果没有(1.135)右边的第三项，胶场就可完全类比于八种不同的电磁场，(1.136)就成为各种夸克与这些"电磁场"组成的系统的拉格朗日量密度．整个理论就归结为八种量子"电动力学"的简单组合．量子电动力学的微扰计算是人们熟悉的，把它借用到强子的夸克理论中来可使这一理论的计算成为实际可行．然而正是(1.135)中的这一非线性项(又称非阿贝尔项)导致了理论的复杂性，使它的求解变得很困难．一种实际的处理办法就是将这一非线性项的效应，连同各种非微扰效应用一种模型假设代替，在此基础上作略去这一非线性项的理论的微扰计算．这种想法把人们引向强子理论的口袋模型(Chodos 1974, DeGrand 1975)．

口袋模型最初由美国麻省理工学院(MIT)学派作为强子的动力学理论模型提出(Chodos 1974)，称为 MIT 口袋模型．但在后来的实际计算中只解了静止的球口袋中的夸克运动，计算了强子谱(De Grand 1975)．近年虽对口袋的量子动力学作了些初步工作(Zhang 1988, 1990, 1990a, 1991)，但这方面的系统计算及其与实验的比较尚待进行．在口袋外加上定域介子场并使轴矢流在口袋表面连续的手征口袋模型及其后来的发展在概念上是一种有趣的发展，不过在理论与实验相符方面尚没有实质性的改进，且凭添了许多复杂性．因此，下面仍只介绍 MIT 口袋模型对静止球口袋求解的结果．其他晚近进展可从文献中了解．

MIT 口袋模型假设夸克和胶子被禁闭在一个称为口袋的

小区域内运动，在口袋内它们的运动几乎是自由的，夸克与胶子间的色作用可由微扰法计算；在口袋边界上它们由适当的边界条件反射回来，从而不会逸出口袋．这样的口袋是无色的，它就是实际观察到的强子．对静止的球形口袋，夸克场在球面上的 MIT 线性边条件为

$$\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{\gamma}\Psi_f=\Psi_f\ ,\tag{1.140}$$

其中 $\boldsymbol{r}_0$ 为单位径矢量，$\boldsymbol{\gamma}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ 为由 γ 矩阵组成的三维矢量．由(1.139)知，γ 矩阵都是厄米的，且有反对易关系

$$\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2\delta_{\mu\nu},\quad \mu,\nu=1,2,3,4.\tag{1.141}$$

在(1.140)两边取伴随后再右乘以 $\beta=\gamma_4$，利用γ矩阵的上列性质得

$$\overline{\Psi}_f\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{\gamma}=-\overline{\Psi}_f\ .\tag{1.142}$$

在此式两边右乘 Ψ_f，在(1.140)两边左乘 $\overline{\Psi}_f$，然后两式相减，得口袋表面上

$$\overline{\Psi}_f\Psi_f=0\ .\tag{1.143}$$

在(1.140)两边左乘$\overline{\Psi}_f$得到的关系中再用此式，得

$$\boldsymbol{r}_0\cdot\overline{\Psi}_f\boldsymbol{\gamma}\Psi_f=0\ .\tag{1.144}$$

注意夸克流的表达式

$$\boldsymbol{j}_f=\Psi_f^\dagger\boldsymbol{\alpha}\Psi_f=\mathrm{i}\overline{\Psi}_f\boldsymbol{\gamma}\Psi_f\ ,\tag{1.145}$$

可见(1.44)表明夸克流跨越口袋表面的分量为零．模仿电磁场理论定义色电场 $\mathscr{E}^a$ 的三个分量

$$\mathscr{E}_j^a=\mathrm{i}G_{j4}^a,\quad j=1,2,3\ ,\tag{1.146}$$

和色磁场 $\mathscr{H}^a$ 的三个分量

$$\mathscr{H}_j^a=\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{3}\varepsilon_{jkl}G_{kl}^a,\quad j=1,2,3,\tag{1.147}$$

其中 ε_{jkl} 为(1.49)定义的全反对称符号．色电磁场在静止球口袋表面的线性 MIT 边条件为

$$\boldsymbol{r}_0\cdot\mathscr{E}^a=0,\quad \boldsymbol{r}_0\times\mathscr{H}^a=0\ .\tag{1.148}$$

这组条件可保证胶子色流跨越口袋表面的分量为零．(1.148)的第二

式要求 $\mathscr{H}^a$ 垂直于口袋表面，从而使 $\mathscr{E}^a\times\mathscr{H}^a$ 平行于口袋表面，即坡印亭矢量跨越口袋表面的分量为零.

将夸克场 Ψ_f 量子化成夸克和反夸克，边条件(1.140)就成为单夸克波函数的边条件. 暂时省略味指标 f. 口袋内自由运动的单夸克波函数 ψ 满足狄拉克方程(1.123). 它的协变形式在自然单位制中可写为

$$(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi=0, \tag{1.149}$$

m 为夸克质量. 在球口袋中求解宜用球坐标. 最低能态的定态解为

$$\psi=\frac{N}{\sqrt{4\pi}}\begin{bmatrix}\sqrt{\dfrac{\omega+m}{\omega}}\ \mathrm{j}_0(xr/R)\chi\\ \mathrm{i}\sqrt{\dfrac{\omega-m}{\omega}}\ \mathrm{j}_1(xr/R)\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}_0\chi\end{bmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \tag{1.150}$$

其中 ω 为能量本征值，r 为所考虑点的径矢长，$\boldsymbol{r}_0$ 为所在点的单位径矢，t 为时间，R 为口袋半径，N 为归一化常数，$\mathrm{j}_l(\xi)$ 为 ξ 的 l 阶球贝塞耳(Bessel)函数，χ 为表示自旋态的归一化旋量，而

$$x=R\sqrt{\omega^2-m^2} \tag{1.151}$$

为以 $1/R$ 为单位的波数矢量长. 由归一化条件

$$\int_{r<R}\psi^\dagger\psi\mathrm{d}\tau=1 \tag{1.152}$$

得

$$N=\frac{[\omega(\omega-m)]^{1/2}}{R\mathrm{j}_0(x)[2\omega(\omega R-1)+m]^{1/2}}. \tag{1.153}$$

要求单夸克波函数(1.150)满足边条件

$$\boldsymbol{r}_0\cdot\gamma\psi=\psi,\quad 在\ r=R\ 处, \tag{1.154}$$

得方程

$$\tan=\frac{x}{1-mR-(x^2+m^2R^2)^{1/2}}, \tag{1.155}$$

由此可解得 $x(mR)$. 再由(1.151)就可求得单夸克能量 ω. 在口袋模

型中常设 u 夸克和 d 夸克的质量为零. 在 $m=0$ 的极限下，(1.155)简化为

$$\tan=\frac{x}{1-x}, \tag{1.156}$$

它的最小正根为 $x=2.04$. 代入(1.15 1)得 $m=0$ 条件下

$$\omega=\frac{x}{R}=\frac{2.04}{R}. \tag{1.157}$$

用波函数(1.150)可计算各种可观察量. 将夸克流表成流在夸克自旋态 χ 中的平均值：

$$\hat{\boldsymbol{j}}=\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\psi=\chi^\dagger\hat{\boldsymbol{j}}\chi, \tag{1.158}$$

其中流算符

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{j}}&=\frac{N^2}{4\pi}\frac{x\mathrm{i}}{\omega R}[\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}_0)-(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{\sigma}]\mathrm{j}_0\left(\frac{xr}{R}\right)\mathrm{j}_1\left(\frac{xr}{R}\right)\\&=-\frac{3}{4\pi}(\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{\sigma})\frac{\mu'(r)}{r^3},\end{aligned} \tag{1.159}$$

$$\mu'(r)=\frac{2}{3}N^2\frac{x}{\omega R}\mathrm{j}_0(xr/R)\mathrm{j}_1(xr/R)r^3 \tag{1.160}$$

在夸克流上乘夸克的电荷即得夸克运动形成的电流. 因此，约去电荷后的夸克磁矩为

$$\begin{aligned}\int_{r<R}\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{j}}\mathrm{d}\tau&=-\frac{3}{8\pi}\int_0^R\mu'(r)\mathrm{d}r\int_{4\pi}[(\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{\sigma}]\mathrm{d}\Omega\\&=\mu(m,R)\boldsymbol{\sigma},\end{aligned} \tag{1.161}$$

其中 $\int_{4\pi}\mathrm{d}\Omega$ 为 4π 立体角积分，

$$\mu(m,R)=\int_0^R\mu'(r)\mathrm{d}r. \tag{1.162}$$

将(1.160)连同(1.153)代入此式，做出积分得

$$\mu(m,R)=\frac{1}{6}\frac{2R(2\omega+m)-3}{2\omega(\omega R-1)+m}. \tag{1.163}$$

电荷方均根半径是强子结构的另一重要可观察量，它可由各夸克的 r^2 的平均值表出．由波函数(1.150)可算得这个平均值

$$\overline{r^2}=\int_{r<R}\psi^{\dagger}\psi r^2\mathrm{d}\tau$$

$$=N^2\left(\frac{R}{x}\right)^5\left[\frac{\omega+m}{\omega}\int_0^x \mathrm{j}_0^2(\xi)\xi^4\mathrm{d}\xi+\frac{\omega-m}{\omega}\int_0^x \mathrm{j}_1^2(\xi)\xi^4\mathrm{d}\xi\right]. \quad (1.164)$$

式中的积分可用贝塞耳函数的性质积出，也可将贝塞耳函数用三角函数表出：

$$\mathrm{j}_0(\xi)=\frac{\sin\xi}{\xi}\ ,\quad \mathrm{j}_1(\xi)=\frac{\sin\xi}{\xi^2}-\frac{\cos\xi}{\xi}\ , \quad (1.165)$$

再用三角函数的性质积出．结果是

$$\overline{r^2}=\frac{\omega[2x^2(\omega R-1)+2R(2\omega+m)-3]-\frac{3}{2}m[2R(2\omega+m)-2x^2-3]}{3x^2[2\omega(\omega R-1)+m]}R^2. \quad (1.166)$$

在这些计算中都要代入口袋半径 R.而口袋半径 R 本身则可由口袋能量取极小确定．为此要计算口袋的总能量．它包括口袋中各单夸克能量之和，夸克间作用能之和，一项与口袋体积成比例的体积能，以及一项由于口袋的边界引起的各种场零点能改变之和，又称卡西米尔能．其中，单夸克能 ω 可由(1.151)和(1.155)表成口袋半径 R 与夸克质量 m 的函数．将夸克质量当参数，ω 就是 R 的确定函数．在实际处理中通常将 u、d 夸克的质量置零，只保留 s 夸克的质量 m_s 为待定参数．在强子的口袋模型理论中卡西米尔能量 E_{ca} 尚未能由基本原理算出，只能作唯象处理．由于它是口袋边条件导致的各种场零点能改变之和，因而不依赖于任一种特定粒子，只依赖于唯一普遍的能量标度 $\frac{1}{R}$．趁这个机会可建立起一个重要 概念，即在自然单位制中能量具有(长度)$^{-1}$的量纲．引进无量纲参数 z_0，令

$$E_{ca}=-\frac{z_0}{R}\ . \quad (1.167)$$

这就是静止球口袋的卡西米尔能的唯象表达式．边条件限制了可能存在的场的模式，使有些模式的场，连同它们的零点能，不能存在．因此卡西米尔能是负的，参数 z_0 取正值．而当 $R\to\infty$ 时边界影响消失，$E_{ca}\to 0$．由此可见(1.167)是合理的．夸克可在强子内部存在且是渐近自由的，却不能在强子外游离，可见强子内部的真空不同于强子外的正常真空．由于夸克在其中渐近自由，夸克间的作用可用微扰处理，强子内部的真空可称为微扰真空．正常真空应是基态，它的能量密度应取极小值．用 B 表示微扰真空的能量密度与正常真空的能量密度之差．体积为 v 的微扰真空应有一份能量 Bv，这就是体积能．半径为 R 的球口袋有体积能

$$E_v=\frac{4\pi}{3}R^3B, \quad (1.168)$$

B 为待定参数．体积能、卡西米尔能和它们的表达式(1.168)、(1.167)，以及边条件(1.140)和(1.148)组成 MIT 口袋模型的假设，被当作(1.135)中非线性项效应(非阿贝尔效应)和各种非微扰效应的唯象表示．在这些假设基础上的计算将不再重复计及任何非阿贝尔效应和非微扰效应．

最后考虑夸克间通过交换胶子而产生的相互作用能．现在可以完全模仿电磁作用来考虑色作用．(1.150)表示的夸克几率随位置的分布是球对称的．球对称色荷产生的色电场必沿径向．要求色电场在球口袋表面沿径向的分量为零，色电场本身在球口袋表面必为零．这就要求球口袋内总色荷为零．可见，边条件(1.148)的第一式直接要求口袋是无色的，它所代表的强子也就必定是无色的．(1.150)还表明，在一个球口袋中每种夸克的位置分布由它的质量 m 和能量 ω 决定，而 ω 又通过(1.151)和(1.155)决定于 m．因此质量相同的夸克或反夸克的几率随位置的分布是相同的．如果一个口袋中的各个夸克和反夸克的质量彼此都相同，则各种色荷的位置分布都相同，口袋总色荷为零直接导致色荷密度处处为零，因此色电能为零．如果口袋中有不同质量的夸克或反夸克，它们的色荷随位

置的分布彼此不同，各夸克或反夸克的色荷不会在空间各点处处抵消．这就导致色荷密度在口袋中各处的涨落，只当在整个口袋中积分后才为零．因此这种口袋的总色荷虽为零，色电能却不为零．用(1.150)算出各夸克和反夸克对色荷密度的贡献，再由空间各点的色荷密度按静电学中计算静电能的办法就可算出色电能．细心的读者可能会对上面将夸克与反夸克并提，且都用(1.150)计算色荷密度的叙述质疑．这种做法的正确性是由于改变能量符号的电荷共轭变换(1.131)既不改变满足边条件(1.154)的性质也不改变几率随位置的分布．在(1.154)两边取复共轭再用 γ_y 左乘两边，注意 $\gamma_x^*=-\gamma_x$，$\gamma_y^*=\gamma_y$，$\gamma_z^*=-\gamma_z$ 以及 γ 矩阵间的反对易性即得

$$\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{\gamma}\psi^{(c)}=\psi^{(c)}. \tag{1.169}$$

而直接计算得

$$\psi^{(c)\dagger}\psi^{(c)}=\psi^{*\dagger}\gamma_y^\dagger\gamma_y\psi^*=(\psi^\dagger\psi)^*=\psi^\dagger\psi. \tag{1.170}$$

可见符合边条件(1.154)的负能级波函数与正能级波函数给出的夸克几率随位置的分布相同．作为负能级夸克的空穴，正能级反夸克几率随位置的分布与同能量的夸克相同，只是色荷要反号．

色磁能

$$E_{\rm cm}=\sum_{a=1}^{8}\left(\frac{1}{2}\int_{r<R}\mathscr{H}^a\cdot\mathscr{H}^a{\rm d}\tau-\int_{r<R}\boldsymbol{B}^a\cdot\boldsymbol{j}^a{\rm d}\tau\right), \tag{1.171}$$

其中

$$\boldsymbol{j}^a=g\lambda_a\boldsymbol{j} \tag{1.172}$$

为色流，$\boldsymbol{j}$ 为(1.158)表示的夸克流．(1.171)括号中第一项为色磁场本身的能量，第二项为它与色流的作用能．利用麦克斯韦(Maxwell)方程

$$\nabla\times\mathscr{H}^a=\boldsymbol{j}^a, \tag{1.173}$$

代入(1.171)的第二项，作分部积分．积出的部分由于(1.148)中色磁场的边条件而为零，剩下的部分与第一项合并得

$$E_{\rm cm}=-\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{8}\int_{r<R}\mathscr{H}^a\cdot\mathscr{H}^a{\rm d}\tau. \tag{1.174}$$

由(1.172)知应取

$$\mathscr{H}^a=g\lambda_a\mathscr{H}, \tag{1.175}$$

将此式和(1.172)一起代入(1.173)得

$$\nabla\times\mathscr{H}=\boldsymbol{j}. \tag{1.176}$$

可见一个夸克产生的各色磁场可一次求出．按(1.158)的方式将夸克产生的色磁场表成相应色磁场算符在夸克自旋态中的平均值：

$$\mathscr{H}=\chi^\dagger\hat{\mathscr{H}}\chi, \tag{1.177}$$

与(1.158)一起代入(1.176)得

$$\nabla\times\hat{\mathscr{H}}=\hat{\boldsymbol{j}}. \tag{1.178}$$

略去非阿贝尔项后(1.147)变成

$$\mathscr{H}^a=\nabla\times\boldsymbol{B}^a. \tag{1.179}$$

同样，取

$$\boldsymbol{B}^a=g\lambda_a\boldsymbol{B}=g\lambda_a\chi^\dagger\hat{\boldsymbol{B}}\chi, \tag{1.180}$$

代入(1.179)得

$$\hat{\mathscr{H}}=\nabla\times\hat{\boldsymbol{B}}, \tag{1.181}$$

再代入(1.178)得

$$\nabla^2\hat{\boldsymbol{B}}=-\hat{\boldsymbol{j}}. \tag{1.182}$$

这里用了矢势 $\hat{\boldsymbol{B}}$ 的横波条件

$$\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{B}}=0. \tag{1.183}$$

(1.182)作为 $\hat{\boldsymbol{B}}$ 的泊松(Poisson)方程，它在无穷远处趋于零的解为

$$\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\int_{r'<R}\frac{\hat{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{\rm d}\tau'$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\frac{3}{4\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{4\pi}{2l+1}\int_0^R\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}(\theta,\varphi)\int_{4\pi}Y_{lm}^*(\theta',\varphi')\boldsymbol{r}_0'\times\boldsymbol{\sigma}{\rm d}\Omega'\frac{\mu'(r')}{r'}{\rm d}r'$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{\sigma}\left(\frac{\mu(r)}{r^2}+rM(r)\right). \tag{1.184}$$

其中 $r_<=\min(r,r')$，$r_>=\max(r,r')$，

$$\mu(r)=\int_0^r \mu'(r')\,\mathrm{d}r', \tag{1.185}$$

$$M(r)=\int_r^R \frac{\mu'(r')}{r'^3}\,\mathrm{d}r'. \tag{1.186}$$

推导中用到了表达式(1.159)．这个矢势相应的磁场强度为

$$\begin{aligned}\hat{\mathscr{H}}_1&=\nabla\times\hat{\boldsymbol{B}}_1\\&=\frac{\sigma}{4\pi}\left(2M(r)-\frac{\mu(r)}{r^3}\right)+\frac{3}{4\pi}\,\boldsymbol{r}_0(\boldsymbol{r}_0\cdot\sigma)\frac{\mu(r)}{r^3},\end{aligned} \tag{1.187}$$

它自然满足方程(1.178),却不满足边条件(1.148).在它上面加一常磁场不会影响结果满足微分方程(1.178)．将这个常磁场选为 $\frac{\sigma}{4\pi}\ \frac{\mu(R)}{R^3}$ 得

$$\hat{\mathscr{H}}=\frac{\sigma}{4\pi}\left(2M(r)-\frac{\mu(r)}{r^3}+\frac{\mu(R)}{R^3}\right)+\frac{3}{4\pi}\,\boldsymbol{r}_0(\boldsymbol{r}_0\cdot\sigma)\frac{\mu(r)}{r^3}. \tag{1.189}$$

由于 $M(R)=0$,在球面上这磁场的第一项为零,而末项沿径向因而满足边条件(1.148)．色磁场与色电场在满足边条件方面有值得注意的差别:每个夸克产生的色磁场可单独满足边条件,而只有将各夸克产生的色电场叠加起来才能满足边条件．

用下标标出产生色磁场的夸克．例如第 i 夸克产生的色磁场算符记作

$$\hat{\mathscr{H}}_i^a=g\lambda_a(i)\hat{\mathscr{H}}_i\ , \tag{1.190}$$

其中 $\hat{\mathscr{H}}_i$ 由(1.189)表示,只是它右边的 $\boldsymbol{\sigma}$,$M(r)$ 和 $\mu(r)$ 都要加上下标 i. 由(1.185),(1.186),(1.160),(1.155)和(1.151)知,M 与 μ 都与夸克的质量 m_i 有关．将各夸克产生的色磁场(1.190)叠加起来即得口袋内的色磁场

$$\hat{\mathscr{H}}^a=\sum_i\hat{\mathscr{H}}_i^a\ . \tag{1.191}$$

将它代入(1.174)右边积分号下得到的是一个作用在各夸克自旋态和色态的直积态空间的色磁能算符 $\hat{E}_{cm}$. 它是夸克系统的二体相互

作用能．每个夸克与自身的色磁作用能是它的自能的一部分,应重整化到它的质量和各种模型参数中,因而不应再重复计算．色磁能算符应为

$$\begin{aligned}\hat{E}_{cm}&=-\sum_{a=1}^{8}\sum_{i>j}\int_{r<R}\hat{\mathscr{H}}_i^a\hat{\mathscr{H}}_j^a\,\mathrm{d}\tau\\&=-3\alpha_c\sum_{a=1}^{8}\sum_{i>j}(\sigma_i\lambda_a(i))\cdot(\sigma_j\lambda_a(j))\,\frac{\mu_i(R)\mu_j(R)}{R^3}\,I_{ij}\ ,\end{aligned} \tag{1.192}$$

其中

$$\begin{aligned}I_{ij}&=1+2R^3\int_0^R\frac{\mu_i(r)\mu_j(r)}{r^4}\,\mathrm{d}r/(\mu_i(R)\mu_j(R))\\&=1+\left(x_i\sin^2x_i-\frac{3}{2}\,y_i\right)^{-1}\left(x_j\sin^2x_j-\frac{3}{2}\,y_j\right)^{-1}\Big\{-\frac{3}{2}\,y_iy_j\\&\quad-2x_ix_j\sin^2x_i\sin^2x_j+\frac{1}{2}\,x_ix_j[2x_i\mathrm{si}(2x_i)+2x_j\mathrm{si}(2x_j)\\&\quad-(x_i+x_j)\mathrm{si}(2x_i+2x_j)-(x_i-x_j)\mathrm{si}(2x_i-2x_j)]\Big\}\ ,\end{aligned} \tag{1.193}$$

$$y=x-\sin x\cos x\ , \tag{1.194}$$

$$\mathrm{si}(x)=\int_0^x\frac{\sin\xi}{\xi}\,\mathrm{d}\xi\ , \tag{1.195}$$

$\alpha_c=\frac{g^2}{4\pi}$ 为色精细结构常数．在求 $\hat{E}_{cm}$ 在自旋−色态中的平均值时,由于强子的无色性,色因子可完全算出．用 $|\rangle$ 表示强子的色单态,对介子中的夸克1和反夸克2有

$$(\lambda_a(1)+\lambda'_a(2))|\rangle=0\ . \tag{1.196}$$

再用 $\lambda_a(1)+\lambda'_a(2)$ 作用后对 a 从1到8求和,利用

$$\sum_{a=1}^{8}\lambda_a^2=\sum_{a=1}^{8}\lambda_a'^2=\frac{16}{3} \tag{1.197}$$

得

$$\sum_{a=1}^{8}\lambda_a(1)\lambda'_a(2)|\rangle=-\frac{16}{3}\ |\rangle\ . \tag{1.198}$$

对重子中的三个夸克有

$$\sum_{i=1}^{3}\lambda_a(i)|\rangle=0\,. \tag{1.199}$$

再用 $\sum_{i=1}^{3}\lambda_a(i)$ 作用后对 a 从 1 到 8 求和，由色单态的全反对称性和(1.197)得

$$\langle|\sum_a\lambda_a(i)\lambda_a(j)|\rangle=-\frac{8}{3}\,,\qquad 对\ i\neq j\,. \tag{1.200}$$

于是，由(1.192)得作用在夸克自旋态上的色磁能算符为

$$\hat{E}_{cm}=\sum_{i>j}\lambda M_{ij}\boldsymbol{\sigma}_i\cdot\boldsymbol{\sigma}_j\,, \tag{1.201}$$

其中

$$M_{ij}=8\alpha_c\frac{\mu_i(R)\mu_j(R)}{R^3}I_{ij}\,, \tag{1.202}$$

λ对重子为 1，对介子为 2.

现在用 $|\rangle$表示强子中夸克的自旋态，色磁能就是算符(1.201)在这个态中的平均值：

$$E_{cm}=\langle|\hat{E}_{cm}|\rangle=\sum_{i>j}a_{ij}M_{ij}\,, \tag{1.203}$$

$$a_{ij}=\lambda\langle|\boldsymbol{\sigma}_i\cdot\boldsymbol{\sigma}_j|\rangle\,, \tag{1.204}$$

其中 M_{ij} 作为口袋半径 R 的函数除正比于 α_c 外只与 i,j 两夸克的质量有关．通常设 u, d 夸克质量为零，s 夸克的质量 m_s 为可调参量．于是可将 M_{ij} 分类为 M_{00}, M_{0s} 和 M_{ss}，分别表示它对两个质量为零的夸克的取值，它对一个零质量夸克和一个 s 夸克的取值，以及它对两个 s 夸克的取值．(1.203)可表为

$$E_{cm}=a_{00}M_{00}+a_{0s}M_{0s}+a_{ss}M_{ss}\,. \tag{1.205}$$

此中的系数可由(1.204)算出．基态强子中单夸克总角动量等同于波函数(1.150)中旋量 χ 表示的自旋．口袋中夸克系的自旋态就表示了这个夸克系的总角动量态．对于球口袋它也就表示了强子的自旋态．可见对 $\frac{1}{2}$ 自旋重子八重态的成员有

$$\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{\sigma}_i\right)^2|\rangle=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)|\rangle\,,$$

将左边平方乘开，利用 $\boldsymbol{\sigma}_i^2=3$ 得

$$\langle|\sum_{i>j=1}^{3}\boldsymbol{\sigma}_i\cdot\boldsymbol{\sigma}_j|\rangle=-3\,.$$

于是有求和规则

$$a_{00}+a_{0s}+a_{ss}=-3\,. \tag{1.206}$$

核子只含 u,d 夸克，$a_{0s}=a_{ss}=0$, $a_{00}=-3$.

$$E_{cm}=-3M_{00}\,. \tag{1.207}$$

Λ 超子含一个 s 夸克，$a_{ss}=0$, $a_{00}+a_{0s}=-3$. 由于 s 夸克同位旋为零，Λ 超子的同位旋由 u、d 夸克的同位旋加成．由 Λ 本身的同位旋为零知其中 u,d 夸克组成同位旋独态．为保证自旋-同位旋态全对称，u, d 夸克也必组成自旋独态，从而有 $a_{00}=-3$. 由此又推得 $a_{0s}=0$. 因此对 Λ 超子也有

$$E_{cm}=-3M_{00}\,. \tag{1.208}$$

类似地，Σ超子有 $a_{ss}=0$, 其中 u,d 夸克要组成同位旋三重态．为保证自旋-同位旋态对这两个零质量夸克全对称，它们也必组成自旋三重态，从而有 $a_{00}=1$. 由求和规则(1.206)知 $a_{0s}=-4$. 可见对 Σ 超子有

$$E_{cm}=M_{00}-4M_{0s}\,. \tag{1.209}$$

Ξ 超子中有两个 s 夸克，因此 $a_{00}=0$, $a_{0s}+a_{ss}=-3$. 两个 s 夸克的味态对称，因此自旋态必也对称，从而有 $a_{ss}=1$. 由求和规则(1.206)知 $a_{0s}=-4$. 故对 Ξ 超子有

$$E_{cm}=M_{ss}-4M_{0s}\,. \tag{1.210}$$

对 $\frac{3}{2}$ 自旋重子十重态有

$$\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sigma_i\right)^2|\rangle=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)|\rangle,$$

$$\sum_{i>j=1}^{3}\langle|\sigma_i\cdot\sigma_j|\rangle=3.$$

求和规则成为

$$a_{00}+a_{0s}+a_{ss}=3. \tag{1.211}$$

与对八重态类似的考虑得

$$E_{cm}=\begin{cases}3M_{00}, & 对\ \Delta;\\ M_{00}+2M_{0s}, & 对\ \Sigma^*;\\ 2M_{0s}+M_{ss}, & 对\ \Xi^*;\\ 3M_{ss}, & 对\ \Omega^-.\end{cases} \tag{1.212}$$

类似的考虑还可得各种介子的色磁能表达式．比较(1.206)～(1.210)和(1.211)，(1.212)可看出，1/2自旋重子八重态与3/2自旋重子十重态间的质量劈裂来自色磁能反号．同样的机制导致自旋为0的负宇称介子八重态与自旋为1的负宇称介子八重态间的质量劈裂．

至此已可计算口袋的总能量

$$E=E_q+E_{ce}+E_{cm}+E_{ca}+E_v, \tag{1.213}$$

其中 E_{ce} 为色电能，

$$E_q=\sum_i\omega_i. \tag{1.214}$$

为各夸克和反夸克单粒子能量之和．对一套给定的模型参数 z_0,B,α_c 和m_s,E 为口袋半径 R 的确定函数．它的极小值就定义为相应强子的质量．极小值处的口袋半径 R 可了解为强子的半径．如前所述，有了一定的口袋半径就有了一定的夸克波函数(1.150)，从而可计算强子的各种可观察量．这一切对只含零质量夸克的强子特别简单，这些强子包括核子，Δ 超子和 π 介子等．对它们 $E_{ce}=0$. 数值计算得

$$M_{00}=\frac{0.472}{R}\alpha_c, \tag{1.215}$$

因此

$$E_{cm}=\begin{cases}-\dfrac{1.416}{R}\alpha_c, & 对核子;\\ +\dfrac{1.416}{R}\alpha_c, & 对\ \Delta\ 超子.\end{cases} \tag{1.216}$$

再由(1.157)得

$$E=\frac{X}{R}+\frac{4\pi}{3}BR^3, \tag{1.217}$$

对核子和 Δ

$$X=6.12\pm1.416\alpha_c-z_0, \tag{1.218}$$

＋号对应 Δ，－号对应核子．由能量极小条件

$$\frac{\partial E}{\partial R}=-\frac{X}{R^2}+4\pi BR^2=0, \tag{1.219}$$

解得口袋半径

$$R=\left(\frac{X}{4\pi B}\right)^{1/4}. \tag{1.220}$$

代入(1.217)得口袋能量的极小值

$$E_{min}=\frac{4X}{3R}=\frac{4}{3}(4\pi BX^3)^{1/4}. \tag{1.221}$$

它可等同于相应重子的静止能量，在自然单位制中就是它的质量值．如在(1.218)中取负号得到的就是核子质量，取正号就是 Δ 超子质量．

忽略同位旋多重态内各强子质量的差别，重子八重态和十重态以及两个介子八重态共有16种不同质量．要用4个模型参数符合16个实验数据是对模型的一个考验．在模型提出不久后MIT学派就以核子、Δ 超子、Ω^- 超子和 ω 介子的质量作输入，定得了两组参数(DeGrand 1975)，其中将u，d夸克质量置零的一组为

$$\left.\begin{array}{ll}z_0=1.84, & B=(145\text{MeV})^4,\\ \alpha_c=0.55, & m_s=279\text{MeV}.\end{array}\right\} \tag{1.222}$$

由此算得的重子谱与介子谱以及它们与实验的比较分别列于表 1－1 与表 1－2 中．其中的实验值都在各同位旋多重态中作了平均．从这两个

表 1－1　$\frac{1}{2}$ 与 $\frac{3}{2}$　自旋基态重子谱

重子名	N	Λ	Σ	Ξ	Δ	Σ*	Ξ*	Ω
质量 (MeV) 计算值	938	1105	1144	1289	1233	1382	1529	1672
质量 (MeV) 实验值	939	1116	1193	1318	1233	1385	1533	1672

表 1－2　自旋为 0 与 1 的负宇称基态介子谱

介子名	π	K	ω	ρ	K*
质量 (MeV) 计算值	280	497	783	783	928
质量 (MeV) 实验值	138	496	783	770	892

表中可以看到，重子谱符合得相当好，最大误差不到 4.2%，平均误差不到 1%．介子谱的符合差一些．不过除 π 介子外还是大体符合的．π 介子是一个例外，质量的计算值超过实验值的两倍．这表明有一种定性因素在强子的静止球口袋模型中被忽略了．这种因素对其它强子可能不重要，但对 π 介子却是重要的．寻找这一因素是强子物理的重要课题，可惜至今尚无结果．如果排除这一例外，可以说口袋模型在说明强子谱方面是相当成功的．

对核子、Δ、Ω^- 这类只含相同质量夸克的强子，电荷方均根半径就是它的总电荷与其中任一夸克几率位置分布方均根半径的乘积，也就是总电荷与 (1.166) 表示的 $\overline{r^2}$ 的平方根的乘积．对只含零质量夸克的质子和 Δ^+，由于 (1.157) 它更简化为

$$\sqrt{\overline{r^2}}=\sqrt{\frac{2x^3-2x^2+4x-3}{6x^2(x-1)}}\ R=0.7R\ . \tag{1.223}$$

将由参数 (1.222) 算得的质子口袋半径 R 代入此式得质子电荷方均根半径 0.74 fm，可与实验值 (Borkowski 1975) 0.88 fm 相比．

用 $\chi_\pm$ 分别表示 $\sigma_z=\pm 1$ 的 1/2 自旋态．质子中三夸克系统组成的总自旋和它的第三分量均为 1/2 的自旋态共有两个．其中对第 2,3 两夸克对称的为

$$\chi_{1s}=\sqrt{\frac{2}{3}}\ \chi_-\chi_+\chi_+-\frac{1}{\sqrt{6}}\ (\chi_+\chi_+\chi_-+\chi_+\chi_-\chi_+), \tag{1.224}$$

对 2,3 两夸克反对称的为

$$\chi_{1a}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ (\chi_+\chi_+\chi_--\chi_+\chi_-\chi_+). \tag{1.225}$$

由此二自旋态与 (1.101) 和 (1.111) 中质子的味态可组成全对称的质子自旋－味态

$$\mathrm{p}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ (\mathrm{p}_{1a}\chi_{1a}+\mathrm{p}_{1s}\chi_{1s}). \tag{1.226}$$

用它可计算质子的磁矩．第 i 夸克的电荷为 $q_i=\frac{1}{2}\ \tau_3(i)+\frac{1}{6}$ ．由 (1.161) 知质子磁矩为

$$\begin{aligned}\mu_\mathrm{p}&=\mathrm{p}^\dagger\sum_{i=1}^{3}q_i\sigma_z(i)\mathrm{p}\mu(0,R)=3\mathrm{p}^\dagger q_1\sigma_z(1)\mathrm{p}\mu(0,R)\\&=\mathrm{p}^\dagger\left(\frac{3}{2}\ \tau_z\sigma_z+\frac{1}{2}\ \sigma_z\right)\mathrm{p}\ \mu(0,R)=\mu(0,R)\ .\end{aligned} \tag{1.227}$$

此式第二等号处用了 p 的全对称性，第三等号处去掉了粒子标号，自动理解各算符只对 p_{1s}, χ_{1s}, p_{1a} 和 χ_{1a} 各项中的第一因子运算，第四等号处用了 p 的表达式 (1.226)．由 $\mu(0, R)$ 的表达式 (1.163) 和 (1.157) 得

$$\mu_\mathrm{p}=\frac{4x-3}{x(x-1)}\ \frac{R}{12}\ . \tag{1.228}$$

在自然单位制中一核磁子为 $\frac{1}{2m_\mathrm{p}}$ ，m_p 为质子质量．将 m_p 的值与

用参数(1.222)算得的口袋半径代入得

$$\mu_p = 0.406 m_p R \text{ 核磁子 } = 1.9 \text{ 核磁子}. \tag{1.229}$$

同样的办法可算得中子磁矩

$$\mu_n = -\frac{2}{3}\mu(0,R) = -\frac{4x-3}{x(x-1)}\frac{R}{18}. \tag{1.230}$$

将核子口袋半径代入得 $\mu_n = -1.3$ 核磁子．由这些结果我们看到，口袋模型确能给出核子的反常磁矩．与质子磁矩和中子磁矩的实验值 2.79 和 −1.91 核磁子比较，符号是对的，绝对值小了一点．有趣的是，质子磁矩与中子磁矩之比的计算值 −1.5 与其实验值 −1.46 却很相符．这也是对口袋模型的很好支持．符号正确，绝对值偏小，比值与实验相符好，这是口袋模型对各强子磁矩计算中出现的普遍情况．联系到质子的电荷方均根半径计算值也偏小，(1.228) 和 (1.223) 似乎指示，参数(1.222)给出的口袋半径可能偏小．

在夸克概念提出前，在强子还被当作基本的点粒子的时候，人们就已研究核子的广延结构．不过那是指动力学结构．核子由于与介子场作用，不断放出和吸收虚介子，因而周围有介子云缭绕．即裸核子虽是无结构的点粒子，处于定态的物理核子却有广延结构．这一结构的尺度应为最轻的介子即 π 介子的康普顿波长，亦即 1.4 fm．用这一概念，人们能理解核子的性质，包括核子磁矩与电荷方均根半径．当用 MIT 口袋模型理解核子结构时，由于这种口袋外面就是正常真空，口袋的半径就代表了核子广延结构的尺度．由参数(1.222)算出的核子口袋半径为 0.985 fm，比 π 介子的康普顿波长小许多．这使它可能甚至丢失核子结构的介子理论蕴含的积极成果．这种认识加强了增加口袋尺度的想法．另一方面，本世纪 80 年代以来，介子重新被当作定域介子场的量子，即点粒子．只有重子还被当作口袋模型说明的对象．即只要求口袋模型符合包括重子谱在内的重子性质．介子云被分布在代表重子的口袋外面，形成对口袋表面的附加压力．这种压力随口袋半径增大而减小．只有对足够大的口袋，外面的介子场才能被忽略．按这种观点，只对足够

大的口袋，将口袋外置为正常真空的 MIT 口袋模型才是合理的．这种考虑同样加强了增加口袋尺度的想法，并且容许只符合重子谱，即放弃符合介子谱的要求．鉴于介子谱符合得本来较差，这一放弃没有什么可惜的地方．四个参数符合八个重子质量数据同样是对模型的一个考验，况且现在可对重子的其它性质作较好的说明．

用质子电荷方均根半径的实验值 0.88 fm 代替 ω 介子的质量，再加上核子、Δ 超子和 Ω 超子的质量作输入，定得了一组参数 (Zhang 1992b)

$$\left.\begin{aligned} z_0 &= 0.88, & B &= (125\text{MeV})^4, \\ \alpha_c &= 0.67, & m_s &= 275\text{MeV}. \end{aligned}\right\} \tag{1.231}$$

由此算得的重子谱列于表 1−3. 由于原来对重子谱的符合已经比较好，这套参数对重子谱的符合只是略有改进．不过，作为输入，它完

表 1−3　由(1.231)算得的 1/2 与 3/2 自旋基态重子谱

重子名	N	Λ	Σ	Ξ	Δ	Σ*	Ξ*	Ω
质量(MeV)计算值	939	1110	1157	1301	1233	1383	1530	1672
质量(MeV)实验值	939	1116	1193	1318	1233	1385	1533	1672

全符合质子的电荷方均根半径．核子口袋半径增至 1.207 fm. 这使质子磁矩增至 2.3 核磁子，大大接近了实验值．由于口袋模型算出的强子磁矩的比与实验符合好，质子磁矩计算值的改进就是所有强子磁矩计算值的改进．以后还会讲到，参数(1.231)也能对核物质的性质作合理说明．

第 2 章　核力与二强子系统

2.1　二核子系统的观察量与唯象核力

二核子系统包括 n-n，n-p，p-p 三种情况．其中 n-n 和 p-p 都是全同核子系统，它们的空间一自旋态应具交换反对称性．一个系统的观察量包括束缚态的能谱、静态性质和跃迁几率，以及各成分相互碰撞发生各种过程的截面．二核子系统中只有 n-p 系统有一个束缚态，即氘核．它没有束缚的激发态，因此不存在谱的问题，也没有束缚态间的跃迁．它的观察量包括结合能 2.224644 ± 0.000034 MeV，自旋为1，磁矩 0.857406 ± 0.000001 核磁子，以及电四极矩 $0.2860 \pm 0.0015\,\mathrm{fm}^2$．很小的结合能表明它是一个很松散的束缚体．强作用过程宇称守恒以及自旋为1的性质使它的其他静电、磁矩都是零．核子-核子散射的观察量包括截面、微分截面，以及入射粒子和靶粒子自旋状态发生变化的几率．后者表现为散射中的极化观察量．分析这些观察量随能量的变化可以了解核子间相互作用的势函数随核子间距离 r 的变化规律．核子间散射的观察量常常用各种散射态在无穷远处的相移表达．

粒子间的相互作用由一对对粒子间的力表达是经典力学中行之有效的方法．后来被量子力学继承，在处理原子物理、分子物理和固体物理的问题时都很成功．于是又借用到核物理中，将核子间的作用用一对对核子间的力表出，称为核力．按这种想法，要了解核作用就要详尽研究二核子系统，把核力定出来．与静电力类比，核力被设想为有势的，定出核力就是定出核力势，又称核势．它的一般形式可由强作用具有的对称性得出．它们是：

1. 移动不变性．因此核势应与两核子的质心坐标无关．用 $\boldsymbol{r}_1$ 与 $\boldsymbol{r}_2$ 表第 1、2 两核子的位置，核势只能是相对坐标 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$ 的函数．这一对称性导致二核子系统的总动量守恒．

2. 转动不变性．因此核势在转动变换下应不变．这一对称导致二核子系总角动量守恒．

3. 空间反演不变性．因此核势在空间反演变换 $\boldsymbol{r}\to-\boldsymbol{r}$ 下不变．这导致二核子系宇称守恒．

第 2、3 两条表明，核势是现实三维空间的标量．矢量 $\boldsymbol{r}$ 只能以与其他矢量的标量积的形式出现，例如 $r=\sqrt{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}}$．两核子 1/2自旋的泡利算符 $\boldsymbol{\sigma}_1$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_2$ 是赝矢量，即在转动中它与矢量的变换方式相同，在空间反演中与矢量的变换方式反号．它们间的标量积 $\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2$ 可出现在核势中．它们与矢量的标量积 $\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\boldsymbol{r}$ 是赝标量，即在转动中不变但在空间反演中变号，因此只能以乘积 $(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\boldsymbol{r})$ 的形式出现在核势中．$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r})^2=r^2$ 不是新的标量．广义的势函数可以与动量有关．这种关系也受到对称性的制约．除以上三条外还有：

4. 伽利略(Galileo)变换下的不变性．它要求在相互作等速直线运动的参考系中看来，核势是一样的．这保证核势在所有惯性系中有相同的形式．由于核势是一个非相对论概念，其中已忽略了推迟效应，是准备代入非相对论运动方程的，因此只作伽利略变换．用 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 代表 1、2 两核子动量，这一不变性使核势与总动量无关，而只与相对运动动量 $\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1)/2$ 有关．

5. 时间反演不变性．这一不变性保证核过程符合细致平衡原理．在这种变换下 $\boldsymbol{r}$ 不变，而 $\boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{\sigma}_1$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_2$ 反号，表示运动反向．这使得标量积 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}$ 在时间反演变换下反号，不能单独在核势中出现．如果允许核势含动量的一次幂，它必以自旋-轨道耦合 $\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\hat{\boldsymbol{L}}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\hat{\boldsymbol{L}}$ 的形式出现，其中

$$\hat{\boldsymbol{L}}=\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{p}} \tag{2.1}$$

为两核子相对运动的轨道角动量．

6. 将核子当全同粒子，核势对两核子应对称，即在交换两核子标号时不变．在这种交换中 $\hat{r}$ 与 $\hat{p}$ 都变号，却维持 $\hat{L}$ 不变．因此自旋-轨道耦合能的一般形式为 $V_{LS}(r)\hat{S}\cdot\hat{L}$，其中

$$\hat{S}=\frac{\hbar}{2}(\sigma_1+\sigma_2) \tag{2.2}$$

为二核子的总自旋．

7. 同位旋空间的转动不变性．这种不变性是核力电荷无关的数学表示．它要求两核子的同位旋只以标量积 $\tau_1\cdot\tau_2$ 的形式在核势中出现，其中 τ_i 为第 i 核子三个同位旋泡利算符 (1.1) 组成的同位旋空间的矢量．

由于总自旋算符 (2.2) 的平方与 $\hat{S}\cdot\hat{L}$，$\sigma_1\cdot\sigma_2$ 和 $(\sigma_1\cdot r)(\sigma_2\cdot r)$ 都对易，在具有上列对称性的核势作用下二核子系的总自旋平方 $\hat{S}^2$ 守恒，因此可将核力按总自旋平方的本征态分类．由于总自旋平方的本征态也是 $\sigma_1\cdot\sigma_2$ 的本征态，对总自旋三重态 $\sigma_1\cdot\sigma_2$ 的本征值为 1，对独态 $\sigma_1\cdot\sigma_2$ 的本征值为 -3，因此对每种自旋态 $\sigma_1\cdot\sigma_2$ 都可用这两个本征值中的一个代替，不再写成算符．同样，两核子总同位旋与 $\tau_1\cdot\tau_2$ 对易，因而守恒，核势又可按总同位旋的本征态分类．对每种同位旋态，$\tau_1\cdot\tau_2$ 也可用相应本征值代替．对同位旋三重态的核力，$\tau_1\cdot\tau_2$ 用 1 代；对同位旋独态核力，$\tau_1\cdot\tau_2$ 用 -3 代．这样核势中也不再出现 $\tau_1\cdot\tau_2$ 这个算符．对给定同位旋态和给定自旋态，核势到动量的一次幂可写成

$$V=V_C(r)+V_T(r)\hat{S}_{12}+V_{LS}(r)\hat{S}\cdot\hat{L}, \tag{2.3}$$

其中

$$\hat{S}_{12}=3\frac{(\sigma_1\cdot r)(\sigma_2\cdot r)}{r^2}-\sigma_1\cdot\sigma_2. \tag{2.4}$$

$V_C(r)$ 称为中心力势，$V_T(r)$ 称张量力势，$V_{LS}(r)$ 称自旋－轨道耦合势．为保证核势为厄米算符，它们都应是 r 的实函数．

核子为费米子，核子系的波函数在同时交换两核子的空间坐标、自旋坐标和同位旋坐标时要反号．三重态是对称的，独态是反对称的．具有同位旋三重态和自旋三重态的二核子系，空间波函数对两个核子一定反对称，即应是两核子相对坐标 r 的奇函数．这种态称三奇态．具有同位旋三重态和自旋独态的二核子系，空间波函数必对称，即为 r 的偶函数．这种态称单偶态．以此类推，同位旋独态自旋三重态的二核子系，空间波函数为 r 的偶函数，称为三偶态；同位旋独态自旋独态的二核子系的空间波函数为 r 的奇函数，称为单奇态．这四种态中核力势各不相同，但可表为相同形式．到动量的一次幂，它们都可表为 (2.3) 的形式，只是其中的函数 $V_C(r)$，$V_T(r)$ 和 $V_{LS}(r)$ 各不相同．到动量的二次幂，它们还可在 (2.3) 上附加

$$\Delta V=\frac{1}{2}(\hat{p}^2V_p(r)+V_p(r)\hat{p}^2)+V_q(r)[(\hat{L}\cdot\hat{S})^2+\hat{L}\cdot\hat{S}-\hat{L}^2], \tag{2.5}$$

其中第一项称为动量有关势，第二项称为平方自旋－轨道耦合势．简单的计算得

$$\hbar^2\hat{S}_{12}=6\left(\frac{\hat{S}\cdot r}{r}\right)^2-2\hat{S}^2, \tag{2.6}$$

可见对于独态 $(S=0)$ 张量势和自旋-轨道耦合势作用的结果为零．它们只在自旋三重态的二核子系统中起作用．在自旋独态的二核子系统中平方自旋－轨道耦合势也蜕化成一轨道角动量有关势 $-V_q(r)\hat{L}^2$．除少数例外，一般设 $V_p(r)=0$．

对每一种同位旋－自旋态，势函数 $V_C(r)$、$V_T(r)$、$V_{LS}(r)$ 和 $V_q(r)$ 随径向位置 r 的变化要由符合二核子系统各种观察量的实验数据确定，它们包括氘核的静态性质，核子－核子散射的截面、角分布和极化等随核子能量的变化细节．如果将与每一 r 值对应的势函数 $V(r)$ 的值当作一个参数，这项任务就是要用无穷多实验数据确定无穷多参数．在实际工作中也是用大量实验数据确定大量参数，工作是极其浩繁的．从本世纪 40 年代到 60 年代，人们默默地按这种方式工作了约二十年，直到发现单介子交换势的适当组合能很好说明二核子系统的大量实验数据为止．这一阶段的成果表现为两种经常被

引用的核势(Hamada 1962, Lassila 1962)，它们都在介子势的启发下将核势随位置的变化表成 $Y\left(\frac{r}{\lambda_\pi}\right)$ 的多项式，其中 $\lambda_\pi=\frac{\hbar}{m_\pi c}=1.4\text{fm}$ 为 π 介子的康普顿波长，

$$Y(x)=\frac{e^{-x}}{x} \tag{2.7}$$

为汤川函数．在有些情况下，例如对张量力，也采用这种多项式与 $Z\left(\frac{r}{\lambda_\pi}\right)$ 的乘积的形式，其中

$$Z(x)=\left(1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}\right)Y(x). \tag{2.8}$$

在这类表达形式中，多项式系数作为参数由符合二核子系统的实验数据确定．这种表达式被假设只适用于某一距离 r_c 之外，在 $r<r_c$ 处核力势被设为无穷大．这种势称为硬心势，排斥心半径 r_c 也作为参数由与二核子系实验数据符合来决定．对 HJ 势(Hamada 1962) $r_c=0.343\lambda_\pi=0.48$ fm，对耶鲁(Yale)势(Lassila 62) $r_c=0.35\lambda_\pi=0.49$ fm．HJ 势的平方自旋－轨道耦合与(2.5)第二项的形式不同，采用

$$V_{LL}(r)[(\delta_{LJ}+\sigma_1\cdot\sigma_2)\hat{L}^2-(\hat{L}\cdot\hat{S})^2], \tag{2.9}$$

其中 L 与 J 分别为二核子系统的轨道角动量量子数与总角动量量子数，$V_{LL}(r)$ 为 $Y(\frac{r}{\lambda_\pi})$ 的多项式与 $Z(\frac{r}{\lambda_\pi})$ 的乘积．耶鲁势则包含一项单 π 介子交换势，它也是 $Y(\frac{r}{\lambda_\pi})$ 与 $Z(\frac{r}{\lambda_\pi})$ 的线性组合，只是组合系数已由理论确定，将在下节详细介绍．将势函数随距离 r 的变化用 $Y(x)$ 的多项式或这种多项式与 $Z(x)$ 的乘积表出，可用较少参数符合大量数据，是核力唯象理论的一大进步．不过即使这样，参数仍很多．例如耶鲁势除排斥心半径 r_c 外还有 80 个参数，虽然其中有的取值为零．这样多的参数从实际应用来看是不方便的，从理论本身来看是不美观的．这些缺点在下节讲述的介子理论中可得到部分克服．

硬心势在核理论的计算中有不便之处．例如核理论中常常要计算核势的矩阵元，对硬心势这只有选择在硬心内为零的波函数作基才能得到有意义的结果．而这是一件麻烦事．为避免这种麻烦设计了软心势，它在核子间互相排斥的短距离内取很大的正值却不为无穷．这方面最成功的是莱德(Reid 1968)势．莱德不仅将核力按二核子系统的同位旋和自旋态分类，还按它们的轨道角动量量子数 L 和总角动量量子数 J 分类．对不同分波采用不同参数．对 $J>2$ 的所有分波则简单地采用单 π 介子交换势．这样，他得到了一个既符合二核子数据，又具有介子理论要求的长程方面的渐近形式，且方便用于核多体系的核力势．莱德势与 HJ 势和耶鲁势一样称为真实(realistic)核势．它们的详情，包括参数取值的细节可从上列文献找到．

除势函数随核子间距 r 变化的定量细节外，核势的一些定性特征也很引人注目．例如氘核的电四极矩肯定地表明核力含张量力，是它把二核子系统的 S 态与 D 态耦合起来，这才能导致 n-p 系统基态的电四极矩．又如高角动量态中离心势将波函数的峰向外推，相移表现出的是核力长程部分，即 $r>2$ fm 处核力的性质．人们惊喜地发现这区域中的核力可以完全用单 π 介子交换势表示．这不仅是对核力的介子理论的重要支持，也大大简化了对唯象核力的探求．在固定长程核力的条件下进一步确定中程与短程区的核力要比在没有任何理论依傍的条件下确定整个核力容易得多．这一认识也有利于对核子－核子散射数据的相移分析，因为高角动量态的相移可由单 π 介子交换势事先算出．在此条件下再由实验数据确定低角动量态相移也使问题大大简化．由相移的符号还可判断核子间的作用是排斥还是吸引．排斥作用将核子间相对运动的波向外推，在固定距离 r 处看，波的相角应与没有作用时波在较小距离的某处的相角相等，即相角变小了，相移为负．吸引作用将核子间相对运动的波向内拉，在固定距离 r 处看，波的相角应与没有作用时波在较大距离的某处的相角相等，即相角变大了，相移为正．可见

负相移代表排斥作用,正相移代表吸引作用．可惜散射中各种过程的几率都是相应散射振幅的绝对值平方,将所有分波的相移改号各种过程的几率都不变,从而无法直接判断相移的符号．然而如果一个过程同时受两种作用控制,其中一种作用产生的相移是已知的,另一种作用的相移的符号就可由它与已知相移的干涉而确定下来．p－p 散射就同时受到库仑作用和核作用的控制,而库仑相移可以严格计算[①],是已知的．因此从 p－p 散射实验数据可以确定其中核作用引起的相移符号．实验表明 $^1D_2$ 分波的相移为正;$^1S_0$ 分波的相移在能量低时为正,随能量增高 $^1S_0$ 分波的相移经过一极大值后变小,最后在实验室系入射质子能量为 250 MeV 时变成负值．高角动量分波由于受离心势的影响感受不到近距离核势的作用．$^1D_2$ 分波相移为正表明单偶态核力的中长程部分为吸引的．$^1S_0$ 分波能同时感受到中长程和近距离核势的作用．不过能量较低时它的径向波函数峰值比较靠外,更多感受的是中长程吸引力,因此相移也为正．随着能量增高,径向波函数峰值内移,越来越多地感受到近距离核势的作用．它的相移随能量增高而减小,且最终变负,表明近距离核势是排斥的,且在某一距离内排斥作用变得很强．这就形成了核力排斥心的概念．由相移变负处的能量 250 MeV 可以估算出质心系中相对运动波函数的波矢量长为 1.7 fm^{-1}．可以用它的倒数 0.6 fm 估计排斥心半径．这与核力唯象理论的定量分析结果一致．排斥心的概念虽然直接来自对单偶态散射相移的分析却被认为适用于整个核势,并在核力的唯象理论和介子理论中广泛使用．在有些核力理论 (Rojo 1961) 中用动量有关势,即 (2.5) 中的第一项,代替排斥心．动量有关势是排斥的,且在动量较大时才起显著作用．大的相对动量对应小的相对距离．这使动量有关势能起与排斥心类似的作用．

① 参阅张启仁,《量子力学》, §6.6, 高等教育出版社, 1989.

2.2 核力的介子理论,单玻色子交换势(OBEP),极点为主概念

先以标量介子为例讲述核力的介子理论,然后再类推其他,以窥全貌．标量介子是参与强作用的标量场的量子．场 $\Phi(\boldsymbol{r},t)$ 如果在洛伦兹 (Lorentz) 变换下不变就称为标量场．在三维空间的转动下不变使标量介子自旋为零,而在空间反演变换下不变则使标量介子的内禀宇称为正．这两种性质又使标量粒子被称为 0^+ 粒子．用 $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ 表示核子场,核子－标量介子场系统的拉格朗日量密度的最简形式在自然单位制中为

$$\mathscr{L}=-\overline{\Psi}(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\Psi-\frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi\partial_\mu\Phi+m_\sigma^2\Phi^2)+g_\sigma\overline{\Psi}\Psi\Phi, \tag{2.10}$$

其中 m 与 m_σ 分别为核子与标量介子的质量,g_σ 为核子－标量介子耦合常数．由作用量

$$\mathscr{A}=\int\mathscr{L}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \tag{2.11}$$

取极值得标量场方程

$$\Box\Phi-\frac{1}{\lambda_\sigma^2}\Phi=-g_\sigma\overline{\Psi}\Psi, \tag{2.12}$$

其中

$$\Box=\partial_\mu\partial_\mu=\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{2.13}$$

为达朗贝尔 (d'AlemBert) 算符,$\lambda_\sigma=\dfrac{1}{m_\sigma}$ 为标量介子康普顿波长在自然单位制中的表示,它的与单位制无关的表示为 $\lambda_\sigma=\dfrac{\hbar}{m_\sigma c}$．(2.12) 表明,标量介子场的源正比于核子的标量密度 $\overline{\Psi}\Psi$,比例常数就是耦合常数 g_σ．在一定时刻 t,把 $\Phi(\boldsymbol{r},t)$ 和 $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ 当作场系统的广义坐标,它们的正则共轭动量应为

$$\Pi_\Phi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\Phi}} = \dot{\Phi} \quad 和 \quad \Pi_\Psi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\Psi}} = \mathrm{i}\Psi^\dagger, \tag{2.14}$$

系统的哈密顿量密度为

$$\mathscr{H} = \dot{\Phi}\Pi_\Phi + \dot{\Psi}\Pi_\Psi - \mathscr{L}$$

$$= \Psi^\dagger[\boldsymbol{\alpha}\cdot(-\mathrm{i}\nabla) + m\beta]\Psi + \frac{1}{2}[\Pi_\Phi^2 + (\nabla\Phi)^2 + m_\sigma^2\Phi^2] - g_\sigma\overline{\Psi}\Psi\Phi, \tag{2.15}$$

符号上的圆点表示它对时间的微商. 可见核子与标量介子的作用能

$$H' = \int \mathscr{H}'\mathrm{d}\tau = -\int g_\sigma \overline{\Psi}\Psi\Phi\,\mathrm{d}\tau, \tag{2.16}$$

作用能密度

$$\mathscr{H}' = -g_\sigma\overline{\Psi}\Psi\Phi \tag{2.17}$$

具有源－场乘积的形式并取负号. 在核子标量密度 $\overline{\Psi}\Psi$ 与时间无关的条件下(2.12)变为静态场 $\Phi(\boldsymbol{r})$ 的方程

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{\lambda_\sigma^2}\Phi = -g_\sigma\overline{\Psi}\Psi. \tag{2.18}$$

这个方程的格林(Green)函数 $G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r})$ 满足方程

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - \frac{1}{\lambda_\sigma^2}G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = -g_\sigma\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \tag{2.19}$$

微分对坐标 $\boldsymbol{r}$ 进行. 这个方程表明格林函数表示点源产生的场. 重复(1.7)到(1.11)的推导得

$$G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{g_\sigma}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/\lambda_\sigma}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \tag{2.20}$$

在(2.19)两边乘 $\overline{\Psi}(\boldsymbol{r}')\Psi(\boldsymbol{r}')$ 后对 $\boldsymbol{r}'$ 积分知(2.18)的解为

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \int G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\overline{\Psi}(\boldsymbol{r}')\Psi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'$$

$$= \frac{g_\sigma}{4\pi}\int\frac{\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/\lambda_\sigma}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\overline{\Psi}(\boldsymbol{r}')\Psi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'. \tag{2.21}$$

代人(2.16)得核子－介子作用能

$$H' = -\alpha_\sigma\int\overline{\Psi}(\boldsymbol{r})\Psi(\boldsymbol{r})G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\overline{\Psi}(\boldsymbol{r}')\Psi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\tau', \tag{2.22}$$

$\alpha_\sigma = \frac{g_\sigma^2}{4\pi}$ 为核子－标量介子作用的精细结构常数.

在质心系中考虑两核子通过标量介子场的作用. 作用前两核子动量分别为 $\boldsymbol{p}$ 与 $-\boldsymbol{p}$,$\boldsymbol{p}$ 为两核子相对动量;作用后两核子动量变为 $\boldsymbol{p}'$ 与 $-\boldsymbol{p}'$,$\boldsymbol{p}'$ 为作用后两核子相对动量. 核子间的作用应保证二核子总能量与总动量守恒. 质心系中两核子总动量恒为零,总能量则为其中任一核子能量的二倍. 总能守恒要求质心系中每个核子能量都不变. 因此 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{p}'$ 必大小相等,方向则可不同. 由拉格朗日量密度(2.10)知,一个未受标量场作用的核子,波函数 ψ 满足的自由粒子狄拉克方程,在自然单位制下为

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = [\boldsymbol{\alpha}\cdot(-\mathrm{i}\nabla) + m\beta]\psi, \tag{2.23}$$

它的具有一定动量 $\boldsymbol{p}$ 的解为

$$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}U(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)}, \tag{2.24}$$

其中

$$E = \sqrt{p^2+m^2}, \tag{2.25}$$

$$U(\boldsymbol{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2E}}\begin{bmatrix}\chi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi\end{bmatrix}, \tag{2.26}$$

χ 为核子的自旋态. 具有动量 $\boldsymbol{p}'$ 的解的狄拉克伴随为

$$\overline{\psi}_{p'} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\overline{U}(\boldsymbol{p}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{r}-Et)}, \tag{2.27}$$

其中 $\overline{U}(\boldsymbol{p}') = U^\dagger(\boldsymbol{p}')\beta$.按用量子力学的矩阵元替代相应经典量的办法,得核子动量由 $\boldsymbol{p}$ 变为 $\boldsymbol{p}'$ 的跃迁中发出的标量介子场

$$\Phi(\boldsymbol{r})=\frac{g_\sigma}{4\pi}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{e^{-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/\lambda_\sigma}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\overline{U}(\boldsymbol{p}')U(\boldsymbol{p})e^{-i(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{r}'}d\tau' . \tag{2.28}$$

它作用于另一核子上并将它的动量由 $-\boldsymbol{p}$ 变为 $-\boldsymbol{p}'$ 的能量矩阵元为

$$\langle\boldsymbol{p}',-\boldsymbol{p}'|\hat{H}'|\boldsymbol{p},-\boldsymbol{p}\rangle=-\frac{\alpha_\sigma}{(2\pi)^6}\overline{U}(-\boldsymbol{p}')U(-\boldsymbol{p})\overline{U}(\boldsymbol{p}')U(\boldsymbol{p})\times\int e^{i(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p})\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\frac{e^{-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/\lambda_\sigma}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d\tau d\tau' . \tag{2.29}$$

由 (1.9) ~ (1.11) 知

$$\frac{e^{-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/\lambda_\sigma}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int\frac{\lambda_\sigma^2}{k^2\lambda_\sigma^2+1}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}d^3k, \tag{2.30}$$

代入 (2.29)，利用

$$\int e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d\tau=(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{k}) \tag{2.31}$$

及δ函数的性质得

$$\langle\boldsymbol{p}',-\boldsymbol{p}'|H'|\boldsymbol{p},-\boldsymbol{p}\rangle=-\frac{4\pi\alpha_\sigma}{(2\pi)^3}\overline{U}(-\boldsymbol{p}')U(-\boldsymbol{p})\frac{\lambda_\sigma^2}{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')^2\lambda_\sigma^2+1}\times\overline{U}(\boldsymbol{p}')U(\boldsymbol{p})\delta[(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}')-(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p})] . \tag{2.32}$$

其中的δ函数表示总动量守恒. 扣除这个因子即得两核子通过标量介子场相互作用的势能在相对动量为 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{p}'$ 的两态间的矩阵元

$$\langle\boldsymbol{p}'|V|\boldsymbol{p}\rangle=-\frac{4\pi\alpha_\sigma}{(2\pi)^3}\overline{U}(-\boldsymbol{p}')U(-\boldsymbol{p})\frac{\lambda_\sigma^2}{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')^2\lambda_\sigma^2+1}\overline{U}(\boldsymbol{p}')U(\boldsymbol{p}). \tag{2.33}$$

作为势能的矩阵元，需将此式延拓到 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{p}'$ 大小不等的区域，$\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{p}'$ 为独立变量. 将 (2.26) 代入此式，将它写成一个作用于二核子自旋态的算符在自旋态间的矩阵元. 这个算符是

$$\langle\boldsymbol{p}'|\hat{V}|\boldsymbol{p}\rangle=-\frac{4\pi\alpha_\sigma}{(2\pi)^3}\hat{D}_1\hat{D}_2\frac{\lambda_\sigma^2}{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')^2\lambda_\sigma^2+1} , \tag{2.34}$$

其中

$$\hat{D}_l=\frac{1}{\sqrt{4EE'(E+m)(E'+m)}}[(E+m)(E'+m)-\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{p}-i\sigma_l\cdot(\boldsymbol{p}'\times\boldsymbol{p})],\qquad l=1,2, \tag{2.35}$$

σ_l 为作用于第 l 个核子自旋态的泡利算符，$E'=\sqrt{p'^2+m^2}$. 展开到 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{p}'$ 的二次幂得

$$\hat{D}_1\hat{D}_2=1-\frac{(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}')^2}{4m^2}-\frac{i}{2m^2}\hat{\boldsymbol{S}}\cdot(\boldsymbol{p}'\times\boldsymbol{p}), \tag{2.36}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{S}}=\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)$ 为自然单位制中二核子的总自旋算符. 代入 (2.34)，并将它变换成坐标表象的矩阵元. 在变换表象的积分中要作变量替换

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}' ,\quad \boldsymbol{q}=\frac{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}'}{2} , \tag{2.37}$$

它的逆变换为

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{q}+\frac{\boldsymbol{k}}{2} ,\quad \boldsymbol{p}'=\boldsymbol{q}-\frac{\boldsymbol{k}}{2} , \tag{2.38}$$

且有 $\boldsymbol{p}'\times\boldsymbol{p}=\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{k}$. 于是得

$$\langle\boldsymbol{r}'|\hat{V}|\boldsymbol{r}\rangle=\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{r}'}\langle\boldsymbol{p}'|\hat{V}|\boldsymbol{p}\rangle e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}d^3p\,d^3p'$$

$$=-\frac{4\pi\alpha_\sigma}{(2\pi)^6}\int\left[1-\frac{q^2}{m^2}-\frac{i}{2m^2}\hat{\boldsymbol{S}}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{q})\right]\frac{\lambda_\sigma^2e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}')/2}}{k^2\lambda_\sigma^2+1}e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})}d^3k\,d^3q$$

$$=-\frac{4\pi\alpha_\sigma}{(2\pi)^3}\int\frac{\lambda_\sigma^2e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}')/2}}{k^2\lambda_\sigma^2+1}\left\{1+\frac{\nabla'^2}{m^2}-\frac{i}{2m^2}\hat{\boldsymbol{S}}\cdot[\boldsymbol{k}\times(-i\nabla')]\right\}\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})d^3k, \tag{2.39}$$

其中 ∇' 为对 $\boldsymbol{r}'$ 微分的梯度算符. 这个势能算符作用在二核子相对运动波函数 $\psi(\boldsymbol{r})$ 上得

$$\hat{V}\psi(\boldsymbol{r})=\int\langle \boldsymbol{r}|\hat{V}|\boldsymbol{r}'\rangle\psi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'$$

$$=-\frac{4\pi\alpha_\sigma}{(2\pi)^3}\int\frac{\lambda_\sigma^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}{k^2\lambda_\sigma^2+1}\left\{1-\frac{\mathrm{i}}{2m^2}\hat{\boldsymbol{S}}\cdot[\boldsymbol{k}\times(-\mathrm{i}\nabla)]\right\}\psi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3k$$

$$-\frac{4\pi\alpha_\sigma}{(2\pi)^3}\frac{1}{m^2}\int\frac{\lambda_\sigma^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}/2}}{k^2\lambda_\sigma^2+1}\nabla^2[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}/2}\psi(\boldsymbol{r})]\mathrm{d}^3k\ . \tag{2.40}$$

用(2.30)作出对 $\boldsymbol{k}$的积分，利用(2.19)和 $\lambda_\sigma=\frac{1}{m_\sigma}$ 整理结果后得

$$\hat{V}=-\alpha_\sigma m_\sigma\Big\{(1-\frac{m_\sigma^2}{4m^2})Y(\frac{r}{\lambda_\sigma})-\frac{m_\sigma^2}{2m^2}J(\frac{r}{\lambda_\sigma})\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}$$

$$+\frac{1}{2m^2}[Y(\frac{r}{\lambda_\sigma})\nabla^2+\nabla^2 Y(\frac{r}{\lambda_\sigma})]+\frac{1}{4m^2m_\sigma}\delta(\boldsymbol{r})\Big\}, \tag{2.41}$$

其中 $Y(x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$ 为汤川函数，$\hat{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{r}\times(-\mathrm{i}\nabla)$ 为自然单位制中两核子相对运动的轨道角动量，

$$J(x)=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}Y(x)}{\mathrm{d}x}\ . \tag{2.42}$$

(2.41)花括号内第一项为中心吸引势；第二项为自旋轨道耦合；第三项为动量有关势，代表短程排斥作用；第四项含 $\delta(\boldsymbol{r})$，为零程力势．短程核力与核子结构关系较密切，不可能用简单的介子理论表达，至今仍只能作唯象处理．因此在通过标量介子场传递的核力势中只保留前两项，后两项可了解为已并入短程唯象核势．恢复到与单位制无关的形式后，标量介子核力势为

$$\hat{V}=-\alpha_\sigma m_\sigma c^2\left[\left(1-\frac{m_\sigma^2}{4m^2}\right)Y\left(\frac{r}{\lambda_\sigma}\right)-\frac{m_\sigma^2}{2m^2}J\left(\frac{r}{\lambda_\sigma}\right)\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}\right]. \tag{2.43}$$

(2.33)可当作微扰法的结果．按这种了解，因子 $\overline{U}(\boldsymbol{p}')U(\boldsymbol{p})$ 来自核子-介子作用能 $\hat{H}'$ 的矩阵元．由(2.16)知，$\hat{H}'$ 含 $\hat{\Phi}$ 的一次幂，在将核子动量由 $\boldsymbol{p}$ 变为$\boldsymbol{p}'$的同时应放出一个动量为$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'$ 的标量介子．$\overline{U}(-\boldsymbol{p}')U(-\boldsymbol{p})$ 也来自 $\hat{H}'$的矩阵元，在将另一核子的动量由$-\boldsymbol{p}$ 变为$-\boldsymbol{p}'$ 的同时将动量为 $\boldsymbol{k}$ 的介子吸收．因子

$$\frac{\lambda_\sigma^2}{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')^2\lambda_\sigma^2+1}=\frac{1}{k^2+m_\sigma^2} \tag{2.44}$$

表中间态，它含一个动量大小为 k、质量为 m_σ 的标量介子的能量分母，表示这个介子的传播．一个这样的介子如在自由状态应有能量 $\omega=\sqrt{k^2+m_\sigma^2}$．由于实际上并没有这项能量产生出来，因而它出现在分母上．质量为 m_σ 的粒子在自由运动条件下能量 ω 与动量 $\boldsymbol{k}$ 的关系

$$\omega^2=k^2+m_\sigma^2 \tag{2.45}$$

的几何图象为一四维空间中的三维超曲面，称为这个粒子的质量壳．在两核子间传递核力的标量介子的能量动量不在质壳上，因而称为离壳的．离壳粒子不能自由存在，因而称虚粒子．在核子间传递核力的就是虚介子．由于没有相应能量，两核子间的空间成为阻挡这个虚介子的势垒．衰减因子 $\mathrm{e}^{-r/\lambda_\sigma}$ 可理解为介子穿透这个势垒的透射因子．(2.43)是两核子交换一个标量介子形成的核势，称为单标量介子交换势．它含两个参数，即标量介子质量 m_σ 和耦合常数 g_σ．通常耦合常数由相应的精细结构常数α_σ表出．最轻的标量介子的质量为 500 MeV/c^2 左右，早年曾收入粒子表．后来因数据不充分而从粒子表中消失．近年的实验[①] (Dosch 1986, 1987)重新肯定这一0^+ 共振的存在，它衰变为两个 π 介子．可惜共振峰较宽较矮，实验数据还不足以直接地精确确定它的质量．在核力的介子理论中让标量介子的质量在 400～700 MeV/c^2 间可调，连同 α_σ一起由符合二核子系统的实验数据确定．单标量介子交换势在核力介子理论中的地位是提供核子间的中程强吸引，对说明核子间散射，特别对说明核子间结合成核的机制，具有重大意义．

核子 -π 介子系统的情形略为复杂．这是因为 π介子自旋虽为零内禀宇称却为负，是 0^- 粒子．π 介子还具有同位旋 1，π 介子场在同位

① 作者感谢高能物理研究所的祝玉灿教授向我介绍近年的实验进展，并托人送来北京正负电子对撞机上得到的最新数据，实验点果然在 500 MeV 处密集．

旋空间中为矢量，可记为 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r},t)$. 其中 $\boldsymbol{r}$ 是普通空间的矢量，而 $\boldsymbol{\Phi}$ 则为同位旋空间的矢量．在不含反演的固有洛伦兹变换下 $\boldsymbol{\Phi}$ 不变，在空间反演下它变号，即从 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r},t)$ 变为 $-\boldsymbol{\Phi}(-\boldsymbol{r},t)$．这种场称为赝标场，π 介子为赝标介子．由核子场 $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ 可组成二次型 $\overline{\Psi}\gamma_5\boldsymbol{\tau}\Psi$，其中 $\boldsymbol{\tau}$ 为 $\frac{1}{2}$ 同位旋泡利算符，

$$\gamma_5=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4=-\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.46}$$

核子场的这个二次型在洛伦兹变换下为赝标量，在同位旋空间中为矢量，恰与π介子场 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r},t)$ 有相同的变换性质．因此 $\mathrm{i}\overline{\Psi}\gamma_5\boldsymbol{\tau}\Psi\cdot\boldsymbol{\Phi}$ 在洛伦兹变换下和在同位旋空间中都是标量，即不变量，且是厄米的．由此可得核子－π 介子场系统的最简拉格朗日量密度

$$\mathscr{L}=-\overline{\Psi}(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\Psi-\frac{1}{2}(\partial_\mu\boldsymbol{\Phi}\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\Phi}+m_\pi^2\boldsymbol{\Phi}^2)+\mathrm{i}g_\pi\overline{\Psi}\gamma_5\boldsymbol{\tau}\Psi\cdot\boldsymbol{\Phi}, \tag{2.47}$$

g_π 为核子与 π 介子的赝标耦合常数．由作用量取极值得到的 π 场方程为

$$\Box\boldsymbol{\Phi}-\frac{1}{\lambda_\pi^2}\boldsymbol{\Phi}=-\mathrm{i}g_\pi\overline{\Psi}\gamma_5\boldsymbol{\tau}\Psi, \tag{2.48}$$

它表明 π 场的源正比于核子系的赝标同位旋矢量密度 $\mathrm{i}\overline{\Psi}\gamma_5\boldsymbol{\tau}\Psi$. 类似(2.10)后的推导得核子－π 介子系统的哈密顿量密度

$$\mathscr{H}=\Psi^\dagger[\boldsymbol{\alpha}\cdot(-\mathrm{i}\nabla)+m\beta]\Psi+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{3}\left[\left(\frac{\partial\Phi_l}{\partial t}\right)^2+(\nabla\Phi_l)^2+m_\pi^2\Phi_l^2\right]-\mathrm{i}g_\pi\overline{\Psi}\gamma_5\boldsymbol{\tau}\Psi\cdot\boldsymbol{\Phi}, \tag{2.49}$$

Φ_l 为同位旋矢量 $\boldsymbol{\Phi}$ 的第 l 分量．核子－π 介子作用能密度

$$\mathscr{H}'=-\mathrm{i}g_\pi\overline{\Psi}\gamma_5\boldsymbol{\tau}\Psi\cdot\boldsymbol{\Phi} \tag{2.50}$$

也具源－场乘积取负号的形式．核子－π介子作用能为

$$H'=\int\mathscr{H}'\mathrm{d}\tau=-\mathrm{i}g_\pi\int\overline{\Psi}\gamma_5\boldsymbol{\tau}\Psi\cdot\boldsymbol{\Phi}\mathrm{d}\tau. \tag{2.51}$$

在源与时间无关的情况下场方程(2.48)有与时间无关的静态解，静态场 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r})$ 满足方程

$$\nabla^2\boldsymbol{\Phi}-\frac{1}{\lambda_\pi^2}\boldsymbol{\Phi}=-\mathrm{i}g_\pi\overline{\Psi}\gamma_5\boldsymbol{\tau}\Psi, \tag{2.52}$$

由格林函数方法得它的解为

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r})=\frac{g_\pi}{4\pi}\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/\lambda_\pi}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\overline{\Psi}(\boldsymbol{r}')\gamma_5\boldsymbol{\tau}\Psi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'. \tag{2.53}$$

核子通过 π 介子场的相互作用能为

$$H'=\alpha_\pi\int\overline{\Psi}(\boldsymbol{r})\gamma_5\boldsymbol{\tau}\Psi(\boldsymbol{r})\cdot\frac{\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/\lambda_\pi}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\overline{\Psi}(\boldsymbol{r}')\gamma_5\boldsymbol{\tau}\Psi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau', \tag{2.54}$$

$\alpha_\pi=\frac{g_\pi^2}{4\pi}$ 为核子－π 介子赝标作用的精细结构常数．

现在考虑质心系中一对动量分别为 $\boldsymbol{p}$ 与 $-\boldsymbol{p}$ 的核子通过π介子场相互作用变为一对动量分别为 $\boldsymbol{p}'$ 与 $-\boldsymbol{p}'$ 的核子的作用能矩阵元．在实际跃迁中由于能量守恒，$\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{p}'$ 大小相等只是方向可以改变．由(2.24)～(2.27)表示的单核子波函数 ψ_p 和狄拉克伴随 $\overline{\psi}_{p'}$ 组成的赝标同位旋矢量密度

$$\mathrm{i}\overline{\psi}_{p'}\gamma_5\boldsymbol{\tau}\psi_p=\mathrm{i}\frac{1}{(2\pi)^3}\overline{U}(\boldsymbol{p}')\gamma_5\boldsymbol{\tau}U(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\cdot\boldsymbol{r}} \tag{2.55}$$

与时间无关，其中 U 被理解为由(2.26)表示的狄拉克双旋量与 $\frac{1}{2}$ 同位旋旋量的直乘，后者描述核子的同位旋态．与(2.28)～(2.33)平行的推导得两核子通过 π 介子场相互作用的势能在相对动量为 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{p}'$ 的两态间的矩阵元

$$\langle\boldsymbol{p}'|V|\boldsymbol{p}\rangle=\frac{4\pi\alpha_\pi}{(2\pi)^3}\overline{U}(-\boldsymbol{p}')\gamma_5\boldsymbol{\tau}U(-\boldsymbol{p})\frac{\lambda_\pi^2}{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')^2\lambda_\pi^2+1}\overline{U}(\boldsymbol{p}')\gamma_5\boldsymbol{\tau}U(\boldsymbol{p}). \tag{2.56}$$

将(2.26)代入此式，将它写成一个作用于二核子自旋－同位旋态的算符在自旋－同位旋态间的矩阵元，这个算符为

$$\langle\boldsymbol{p}'|\hat{V}|\boldsymbol{p}\rangle=-\frac{4\pi\alpha_\pi}{(2\pi)^3}\hat{\boldsymbol{D}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{D}}_2\frac{\lambda_\pi^2}{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')^2\lambda_\pi^2+1}, \tag{2.57}$$

其中

$$\hat{D}_l = \frac{1}{2\sqrt{EE'}} \sigma_l \cdot (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\tau_l \ , \ l=1,2, \tag{2.58}$$

为同位旋空间的矢量．在非相对论近似下，$E=E'=m$，

$$\hat{D}_1 \cdot \hat{D}_2 = \frac{1}{4m^2}[\sigma_1 \cdot (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')][\sigma_2 \cdot (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')]\tau_1 \cdot \tau_2 \ . \tag{2.59}$$

代入(2.57)，将它延拓到 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{p}'$ 大小不等的区域，然后变到坐标表象．仍用变换(2.37)做积分得

$$\langle \boldsymbol{r}'|\hat{V}|\boldsymbol{r}\rangle = -\frac{4\pi\alpha_\pi}{(2\pi)^6}\frac{\tau_1 \cdot \tau_2}{4m^2}\int \frac{\lambda_\pi^2(\sigma_1 \cdot \boldsymbol{k})(\sigma_2 \cdot \boldsymbol{k})}{k^2\lambda_\pi^2+1} e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}')/2} e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})} d^3k d^3q$$

$$= -\frac{4\pi\alpha_\pi}{(2\pi)^3}\frac{\tau_1 \cdot \tau_2}{4m^2}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\int \frac{\lambda_\pi^2(\sigma_1 \cdot \boldsymbol{k})(\sigma_2 \cdot \boldsymbol{k})}{k^2\lambda_\pi^2+1} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} d^3k .$$

其中的 δ 函数表示这个算符的坐标表象是对角的，是一个乘算符．这种势称定域势．用(2.30)算出对 $\boldsymbol{k}$ 的积分得自然单位制中

$$\hat{V} = \frac{\alpha_\pi}{4m^2}\tau_1 \cdot \tau_2\left[(\sigma_1 . \nabla)\left(\sigma_2 \cdot \nabla\frac{e^{-r/\lambda_\pi}}{r}\right)\right] . \tag{2.60}$$

做出微分，恢复与单位制无关的形式得

$$\hat{V} = \alpha_\pi m_\pi c^2 \frac{m_\pi^2}{m^2}\frac{1}{12}\tau_1 \cdot \tau_2\left[Y\left(\frac{r}{\lambda_\pi}\right)\sigma_1 \cdot \sigma_2 + Z\left(\frac{r}{\lambda_\pi}\right)\hat{S}_{12}\right], \tag{2.61}$$

其中的 Y，Z 和 $\hat{S}_{12}$ 分别由(2.7)，(2.8)和(2.4)定义．这就是著名的单 π 介子交换势，按英文字头简记为 OPEP. 它的特点是没有可调参数，π 介子质量 m_π，从而它的康普顿波长 λ_π，和 π－核子作用常数 g_π，或相应的 π－核子精细结构常数 α_π 均已由对 π 介子的实验研究确定，几乎没有调节的余地．由于 π 介子质量比其他介子质量小许多，OPEP 力程 λ_π 比其他介子交换力程长许多，2 fm 以外的远程核力可由 OPEP 单独表示．这就提供了一个干净地检验这部分核力的介子理论的空间．如前所述，核子－核子散射的高角动量分波的相移由于离心排斥作用几乎只受远程核力的影响，可用作检验这个区域核

力的实验数据．结果表明，远程核力确实可用 OPEP 完全表达．这是核力介子理论最确实的实验证据，最有力的实验支持．

质量比 π 介子和标量介子再高一点的是两个自旋为 1 宇称为负的介子，它们是同位旋独态的 $\omega(783)$ 和同位旋三重态的 $\rho(770)$. 它们在转动与空间反演下的变换性质与矢量相同，因而称为矢量介子，相应的介子场为矢量场 Φ_μ，$\mu=1,2,3,4$．对 ρ 介子还要加上同位旋标记．不过由于没有实质性差别，下面以 ω 介子为例讲述矢量介子传递的核力形式．同位旋的影响在最后提一下．由核子场可组成矢量 $i\overline{\Psi}\gamma_\mu\Psi$ 和张量 $\overline{\Psi}\sigma_{\mu\nu}\Psi$，其中

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu) = -i(\gamma_\mu\gamma_\nu - \delta_{\mu\nu}) . \tag{2.62}$$

它们可与矢量场 Φ_μ 和它组成的张量

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu\Phi_\nu - \partial_\nu\Phi_\mu \tag{2.63}$$

耦合．因此，核子－ω 介子系统的拉格朗日量密度可取为

$$\mathscr{L} = -\overline{\Psi}(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}m_\omega^2\Phi_\mu\Phi_\mu$$

$$+ig_\omega\overline{\Psi}\gamma_\mu\Psi\Phi_\mu + \frac{f_\omega}{2m_\omega}\overline{\Psi}\sigma_{\mu\nu}\Psi F_{\mu\nu} , \tag{2.64}$$

其中 m_ω 为 ω 介子质量，g_ω 和 f_ω 分别为核子与 ω 介子的矢量耦合常数和张量耦合常数．由作用量取极值得到的 ω 场方程为

$$\Box\Phi_\nu - \partial_\nu\partial_\mu\Phi_\mu - \frac{1}{\lambda_\omega^2}\Phi_\nu = -ig_\omega\overline{\Psi}\gamma_\nu\Psi + \frac{f_\omega}{m_\omega}\partial_\mu(\overline{\Psi}\sigma_{\mu\nu}\Psi), \tag{2.65}$$

$\lambda_\omega = \frac{1}{m_\omega}$ 为 ω 介子的康普顿波长．用 ∂_ν 作用此式两边并对 ν 求和，利用核子数守恒的连续性方程

$$i\partial_\nu(\overline{\Psi}\gamma_\nu\Psi) = 0 \tag{2.66}$$

得

$$\partial_\nu\Phi_\nu = 0 . \tag{2.67}$$

即质量不为零的矢量粒子场恒满足洛伦兹条件．因此，场方程(2.65)简化为标准形式

$$\Box\Phi_\nu - \frac{1}{\lambda_\omega^2}\Phi_\nu = -\mathrm{i}g_\omega\overline{\Psi}\gamma_\nu\Psi + \frac{f_\omega}{m_\omega}\partial_\mu(\overline{\Psi}\sigma_{\mu\nu}\Psi). \tag{2.68}$$

由于拉格朗日量密度(2.64)不含 $\frac{\partial\Phi_4}{\partial t}$，$\Phi_4$ 没有正则共轭动量因而也就不是广义坐标．核子－矢量介子场系统的广义坐标为 Φ_1,Φ_2,Φ_3 和 Ψ．Φ_4 可由这些广义座标表出．在消去了矢量场的这个标量分量后可按标准的正则手续得到系统的哈密顿量(参阅例如 Lurie 1968)．其中与核子和矢量介子都有关的哈密顿量密度为

$$\mathscr{H}' = -\mathrm{i}g_\omega\overline{\Psi}\gamma_\mu\Psi\Phi_\mu - \frac{f_\omega}{2m_\omega}\overline{\Psi}\sigma_{\mu\nu}\Psi F_{\mu\nu}. \tag{2.69}$$

此外还有一项核子间的零程直接作用能．由于近程核力目前仍只能作唯象处理，可暂不理会这一零程作用．

考虑质心系中一对动量为 $\boldsymbol{p}$ 和 $-\boldsymbol{p}$ 的核子在矢量场传递的核力作用下变为一对动量为 $\boldsymbol{p}'$ 和 $-\boldsymbol{p}'$ 的核子．其中一个核子由动量为 $\boldsymbol{p}$ 的态跃迁到动量为 $\boldsymbol{p}'$ 的态，成为矢量介子场的源．跃迁中核子系能量守恒，限定了 $\boldsymbol{p}'$ 的大小与 $\boldsymbol{p}$ 相等，只有方向可以改变．由此形成的场源为

$$g_\omega\mathrm{i}\,\overline{\psi}_{p'}\gamma_\nu\psi_p - \frac{f_\omega}{m_\omega}\partial_\mu(\overline{\psi}_{p'}\sigma_{\mu\nu}\psi_p)$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3}[g_\omega\overline{U}(\boldsymbol{p}')\gamma_\nu U(\boldsymbol{p}) - \frac{f_\omega}{m_\omega}k_\mu\overline{U}(\boldsymbol{p}')\sigma_{\mu\nu}U(\boldsymbol{p})]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}, \tag{2.70}$$

其中 $k_\mu = p_\mu - p'_\mu$．由于 $\boldsymbol{p}'$ 与 $\boldsymbol{p}$ 相等，$k_4=0$，这个场源与时间无关．这使场方程(2.68)有静态解．用格林函数求出此解，代入(2.69)即可得核子间通过矢量介子作用的能量．另一核子在矢量场作用下动量由 $-\boldsymbol{p}$ 跃迁到 $-\boldsymbol{p}'$，因此作用能为

$$\langle\boldsymbol{p}',-\boldsymbol{p}'|\hat{H}'|\boldsymbol{p},-\boldsymbol{p}\rangle \equiv \int\langle\boldsymbol{p}',-\boldsymbol{p}'|\hat{\mathscr{H}}'|\boldsymbol{p},-\boldsymbol{p}\rangle\mathrm{d}\tau$$
$$= \langle\boldsymbol{p}'|V|\boldsymbol{p}\rangle\delta(0),$$

其中

$$\langle\boldsymbol{p}'|V|\boldsymbol{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\Big\{g_\omega^2\overline{U}(-\boldsymbol{p}')\gamma_\mu U(-\boldsymbol{p})\overline{U}(\boldsymbol{p}')\gamma_\mu U(\boldsymbol{p})$$
$$+g_\omega\frac{f_\omega}{m_\omega}k_\mu[\overline{U}(-\boldsymbol{p}')\sigma_{\mu\nu}U(-\boldsymbol{p})\overline{U}(\boldsymbol{p}')\gamma_\nu U(\boldsymbol{p})$$
$$-\overline{U}(-\boldsymbol{p}')\gamma_\nu U(-\boldsymbol{p})\overline{U}(\boldsymbol{p}')\sigma_{\mu\nu}U(\boldsymbol{p})]$$
$$-\frac{f_\omega^2}{m_\omega^2}k_\mu k_{\mu'}\overline{U}(-\boldsymbol{p}')\sigma_{\mu\nu}U(-\boldsymbol{p})\overline{U}(\boldsymbol{p}')\sigma_{\mu'\nu}U(\boldsymbol{p})\Big\}\frac{\lambda_\omega^2}{k^2\lambda_\omega^2+1}. \tag{2.71}$$

利用狄拉克方程及其伴随

$$\gamma_\mu p_\mu U(\boldsymbol{p}) = \mathrm{i}mU(\boldsymbol{p}) \text{ 与 } \overline{U}(\boldsymbol{p})\gamma_\mu p_\mu = \mathrm{i}m\overline{U}(\boldsymbol{p}), \tag{2.72}$$

得

$$k_\mu\overline{U}(\boldsymbol{p}')\sigma_{\mu\nu}U(\boldsymbol{p}) = \frac{\mathrm{i}}{2}\overline{U}(\boldsymbol{p}')[(p'_\mu - p_\mu)(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)]U(\boldsymbol{p})$$
$$= \mathrm{i}\overline{U}(\boldsymbol{p}')[p'_\mu(\gamma_\mu\gamma_\nu - \delta_{\mu\nu}) + (\gamma_\nu\gamma_\mu - \delta_{\mu\nu})p_\mu]U(\boldsymbol{p})$$
$$= -m\overline{U}(\boldsymbol{p}')\gamma_\nu U(\boldsymbol{p}) - \mathrm{i}q_\mu\overline{U}(\boldsymbol{p}')U(\boldsymbol{p}), \tag{2.73}$$

其中 $q_\mu = \frac{p_\mu + p'_\mu}{2}$．由此可将(2.71)化简为

$$\langle\boldsymbol{p}'|V|\boldsymbol{p}\rangle = \Big\{(g_\omega + g'_\omega)^2\overline{U}(-\boldsymbol{p}')\gamma_\mu U(-\boldsymbol{p})\overline{U}(\boldsymbol{p}')\gamma_\mu U(\boldsymbol{p})$$
$$-2(g_\omega + g'_\omega)g'_\omega\frac{E}{m}[\overline{U}(-\boldsymbol{p}')\gamma_4 U(-\boldsymbol{p})\overline{U}(\boldsymbol{p}')U(\boldsymbol{p})$$
$$+\overline{U}(-\boldsymbol{p}')U(-\boldsymbol{p})\overline{U}(\boldsymbol{p}')\gamma_4 U(\boldsymbol{p})]$$
$$+[(2g_\omega + g'_\omega)g'_\omega - g'_\omega\frac{k^2}{4m^2}]\overline{U}(-\boldsymbol{p}')U(-\boldsymbol{p})\overline{U}(\boldsymbol{p}')U(\boldsymbol{p})\Big\}\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{\lambda_\omega^2}{k^2\lambda_\omega^2+1}, \tag{2.74}$$

其中 E 为核子能量，$g'_\omega \equiv \frac{2mf_\omega}{m_\omega}$．由(2.26)算得，到动量的二次幂，

$$\overline{U}(\boldsymbol{p}')\gamma U(\boldsymbol{p}) = -\frac{\mathrm{i}}{2E}\chi'^\dagger[\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}' + \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\times(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p})]\chi, \tag{2.75}$$

$$\bar{U}(\boldsymbol{p}')\gamma_4 U(\boldsymbol{p})=\chi'^{\dagger}[1+\frac{\mathrm{i}}{4m^2}\ \boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{q})-\frac{k^2}{8m^2}\ ]\chi, \tag{2.76}$$

$$U(\boldsymbol{p}')U(\boldsymbol{p})=\chi'^{\dagger}[1-\frac{\mathrm{i}}{4m^2}\ \boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{q})-\frac{q^2}{2m^2}\ ]\chi, \tag{2.77}$$

其中 χ 与 χ' 分别代表动量为 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{p}'$ 的核子的自旋态，$q^2=\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q}$. 代入(2.74)，将它延拓到 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{p}'$ 大小不等的区域，并变换到坐标表象，得到作用在一对核子态上的势能算符. 恢复到与单位制无关的形式后此算符为

$$\hat{V}=m_{\omega}c^2\Bigg[\Bigg(\frac{g_{\omega}^2-2g_{\omega}'^2}{4\pi}+\frac{g_{\omega}^2+g_{\omega}g_{\omega}'+g_{\omega}'^2}{4\pi}\ \frac{m_{\omega}^2}{2m^2}\Bigg)Y\Big(\frac{r}{\lambda_{\omega}}\Big)$$
$$+\frac{1}{12}\ \frac{(g_{\omega}+g_{\omega}')^2}{4\pi}\ \frac{m_{\omega}^2}{m^2}\Big(2Y\Big(\frac{r}{\lambda_{\omega}}\Big)\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2-Z\Big(\frac{r}{\lambda_{\omega}}\Big)\hat{S}_{12}\Big)$$
$$+\frac{\frac{1}{2}g_{\omega}^2+(g_{\omega}+g_{\omega}')^2}{4\pi}\ \frac{m_{\omega}^2}{m^2}J\Big(\frac{r}{\lambda_{\omega}}\Big)\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}\Bigg]. \tag{2.78}$$

这就是单 ω 介子交换势. 其中本来还有一项动量有关势，一般将它并入近程核力唯象势中. 在(2.78)中将下标 ω 换成 ρ，并乘以同位旋耦合因子 $\tau_1\cdot\tau_2$ 后即得两核子间的单 ρ 介子交换势.

各种介子质量不同，交换它们形成的核力力程也就不同. 既然单 π 介子交换势能完全表达远程核力，那么能否将各种单介子交换势加起来表达全程核力呢? 介子是玻色子，单介子交换势的和就称为单玻色子交换势，按英文字头简记为 OBEP. 经大量计算及与二核子经验数据比较后发现，单玻色子交换势能很好表达 0.7 fm 以外的核力. 0.7 fm 以内仍需用唯象处理，通常采用排斥心，硬心或软心，也可用动量有关势. 单玻色子交换势与唯象核势比有两大优点. 一是物理含义清晰，勾画出如下轮廓: 两核子距离在 2 fm 以外 OPEP 为主; 1fm 到 2 fm 间以单标量介子交换提供的中程强吸引为主; 在 1fm 以内单矢量介子交换提供的近程强排斥逐渐占优势; 0.7 fm 以内情形变得复杂，夸克自由度的影响可能变得重要，表现出的近

程强排斥现仍只好作唯象处理. 二是可调参数大为减少. 单 π 介子交换势几乎不可调. 这里说几乎是因为对耦合常数 g_{π} 尚可作极有限的微调. 单 ω 与单 ρ 介子交换势中介子质量也不可调，但耦合常数 g_{ω}、f_{ω}、g_{ρ} 和 f_{ρ} 有较大调节余地，不过也要受有关介子实验数据的制约. 单标量介子交换势有较大的可调性. 由于有关标量介子的实验数据少，统计性差，介子质量 m_{σ} 与耦合常数 g_{σ} 都可调. 有的甚至引入多种标量介子的交换势. 当然这方面也要受介子实验的制约. 在核力中起主要作用的标量介子质量应在 400～700 MeV/c^2 间，$\alpha_{\sigma}=\frac{g_{\sigma}^2}{4\pi}$ 也以在 1 到 10 之间较合理. 在这个质量范围内还有一同位旋为零的赝标介子 η(549) 应当考虑. 单 η 介子交换势可由单 π 介子交换势(2.61)去掉同位旋耦合因子 $\tau_1\cdot\tau_2$ 并将下标 π 改为 η 得到. η 介子的质量已很好确定，不可调. 只有耦合常数 g_{η} 在介子实验数据不确定的范围内可调. 可见单玻色子交换势和与它相配的近程唯象势中还有一些参数可调，但与唯象势的几十个可调参数相比确定性是大大提高了. 单玻色子交换势的发展是本世纪 70 年代核力理论的一大进步，是核力介子理论的一大进展. 单玻色子交换势的提出、发展和逐渐定型是全世界核力工作者的共同成果，文献极多. 而做得最系统的是玻恩学派. 玻恩势(Machleidt 1987)已被公认为最好核力势之一.

单玻色子交换势有两大缺点. 一是其中起重要作用的质量在 400～700 MeV/c^2 间的标量介子是否存在尚有争议，即使存在也是一个由两个 π 介子组成的共振态. 此外 ρ 介子也是两个 π 介子的共振态，ω 介子是三个 π 介子的共振态，相对于强作用就是不稳定的. 有一种观点认为不应当将它们作为基本粒子来计算单玻色子交换势，它们对核力的贡献应包含在双 π 介子交换势和三 π 介子交换势中. 在这种观点看来，传递核力的介子只有一种，即 π 介子。核力势应表为单 π 介子交换势，双 π 介子交换势，三 π 介子交换势 … 之和. 与此相联系的单玻色子交换势的另一缺点就是没有考虑交换

一个以上玻色子的可能性．之所以没考虑是因为有困难．一是介子间的强作用还不很清楚，二是处理强作用的方法不成熟．然而巴黎学派迎着困难上，用色散关系延拓两个 π 介子相互作用的实验数据，计算了双 π 介子交换势，按英文字头记为 TPEP．三 π 介子交换势仍用单 ω 介子交换势代替．配以 0.7 fm以内的近程唯象核势后得到的巴黎势(Lacombe 1980)与二核子实验数据符合很好，也是公认的最好核力势之一．

单玻色子交换势与考虑双 π 介子交换的巴黎势的共同成功似乎提示：确可用单玻色子交换代替多 π 介子交换．共振本是散射振幅的极点，是相互作用的多介子系统贡献最大的地方．单玻色子交换势与多 π 介子交换势的等效显示极点的贡献可有效地代替全部贡献．这种情形可称为极点为主，可视为一种强作用极限．

2.3 其他强子间的强作用力，强作用的 SU(3) 对称

介子除在核子间传递核力外还在反核子间、核子与反核子间、以及其他重子或反重子间传递强作用力．核子与反核子间的力与核子间的力有简单关系．考虑质心系中一对动量分别为 $\boldsymbol{p}$ 与 $-\boldsymbol{p}$ 的核子与反核子．核子动量由 $\boldsymbol{p}$ 跃迁为 $\boldsymbol{p}'$ 并产生一介子场；反核子受这介子场的作用，动量由 $-\boldsymbol{p}$ 跃迁为 $-\boldsymbol{p}'$．计算这过程中核子场与介子场相互作用能的矩阵元，即可得核子－反核子力势在动量表象中的矩阵元．将它变到坐标表象，就是核子与反核子间的单介子交换势．这一过程的前一部分，即核子态跃迁产生介子场的计算，与核力的相应计算相同．而后一部分，即介子场作用下反核子态跃迁矩阵元的计算，也可化为负能级核子跃迁矩阵元的计算．一个动量为 $-\boldsymbol{p}$，能量为 $\sqrt{p^2+m^2}$ 的反核子是动量为 $\boldsymbol{p}$，能量为 $-\sqrt{p^2+m^2}$ 的核子态的空穴．反核子动量由 $-\boldsymbol{p}$ 跃迁到 $-\boldsymbol{p}'$，即是动量为 $\boldsymbol{p}$ 的核子负能态中出现一个核子填充了空穴，而动量为 $\boldsymbol{p}'$ 的负能态中一个核子消失因而出现空穴．因此，它是负能态核子动量由 $\boldsymbol{p}'$ 到 $\boldsymbol{p}$ 的逆

向跃迁．核子动量由 $\boldsymbol{p}$ 到 $\boldsymbol{p}'$ 的跃迁是 $\boldsymbol{p}$ 态核子先消失，$\boldsymbol{p}'$ 态核子后产生；负能态核子动量由 $\boldsymbol{p}'$ 到 $\boldsymbol{p}$ 的逆向跃迁则是 $\boldsymbol{p}$ 态负能量核子先产生，$\boldsymbol{p}'$ 态负能量核子后消失．核子是费米子，它在不同单核子态消灭与产生次序的逆转为矩阵元提供一个负号，就像交换两个全同费米子那样．由 (1.131) 知，动量为 $\boldsymbol{p}$ 的核子负能态可由动量为 $-\boldsymbol{p}$ 的核子正能态经电荷共轭变换得到，其旋量部分为 $\gamma_y U^*(-\boldsymbol{p})$．与核力中表示核子动量由 $-\boldsymbol{p}$ 到 $-\boldsymbol{p}'$ 跃迁的因子 $\bar{U}(-\boldsymbol{p}')U(-\boldsymbol{p})$ 对应的是表示负能态核子动量由 $\boldsymbol{p}'$ 到 $\boldsymbol{p}$ 逆向跃迁的因子

$$-\overline{\gamma_y U^*(-\boldsymbol{p})}\,\gamma_y U^*(-\boldsymbol{p}')=\bar{U}(-\boldsymbol{p}')U(-\boldsymbol{p}).$$

它们彼此相等表明，核子与反核子间单标量介子交换势与核子间单标量介子交换势相同．对两个反核子间的单标量介子交换势，还须将 (2.33) 中的 $U(\boldsymbol{p}')U(\boldsymbol{p})$ 用

$$-\overline{\gamma_y U^*(\boldsymbol{p})}\,\gamma_y U^*(\boldsymbol{p}')=\bar{U}(\boldsymbol{p}')U(\boldsymbol{p}) \tag{2.79}$$

替换．这两者相等告诉我们，两个反核子间的单标量介子交换势也与两核子间的单标量介子交换势相等．以此类推，由

$$-\overline{\gamma_y U^*(\boldsymbol{p})}\,\gamma_5\gamma_y U^*(\boldsymbol{p}')=\bar{U}(\boldsymbol{p}')\gamma_5 U(\boldsymbol{p}) \tag{2.80}$$

知核子与反核子间，以及两个反核子间的单 π 介子交换势也与两个核子间的单 π 介子交换势相等．以上推导中用了 γ 矩阵的转置性质 $\tilde{\gamma}_y=\gamma_y, \tilde{\gamma}_4=\gamma_4, \tilde{\gamma}_5=\gamma_5$，以下还要用 $\tilde{\gamma}_x=-\gamma_x, \tilde{\gamma}_z=-\gamma_z$，它们可从定义 (1.139) 和 (2.46) 以及泡利矩阵 (1.125) 的转置性质得到．由此还可得

$$-\overline{\gamma_y U^*(\boldsymbol{p})}\gamma_\mu\gamma_y U^*(\boldsymbol{p}')=-\bar{U}(\boldsymbol{p}')\gamma_\mu U(\boldsymbol{p}), \tag{2.81}$$

$$-\overline{\gamma_y U^*(\boldsymbol{p})}\sigma_{\mu\nu}\gamma_y U^*(\boldsymbol{p}')=-\bar{U}(\boldsymbol{p}')\sigma_{\mu\nu} U(\boldsymbol{p}). \tag{2.82}$$

它们表明，核子与反核子间的单矢量介子交换势与核子间的单矢量介子交换势绝对值相同而符号相反，两个反核子间的单矢量介子交换势则与两个核子间的单矢量介子交换势完全相同．矢量介子交换给出核子间的部分近程强排斥，这同样的作用在核子与反核子间则成为近程强吸引．强吸引使核子与反核子形成束缚态，称为核子素，就像电磁作用使正负电子对束缚成正电子素一样．近程强吸

引导致的丰富的核子素分立谱(Montanet 80)是洞察核子与反核子作用的重要资料．这种资料是二核子系统所缺的．二核子系统只有氘核一个束缚态．不过由前面的推理，利用从核子素谱得到的核子与反核子相互作用的信息可反过来丰富人们对核力的认识．

模仿上节的方法还可得核子与超子间，以及各种超子间的介子交换势．势的具体形式与各种重子场和介子场相互作用能密度的形式有关，就像势(2.43)、(2.61)和(2.78)分别来自作用能密度(2.17)、(2.50)和(2.69)那样．作用能密度的形式则受强作用的对称性制约，这恰是人们确定作用能密度时的指导．首先，运动方程应在洛伦兹变换下不变．将作用能密度取成洛伦兹变换下的标量即可保证这种不变性．(2.17)、(2.50)和(2.69)全都是洛伦兹标量．强作用过程同位旋守恒，这要求作用能在同位旋变换下不变，即应是同位旋标量．(2.17)、(2.50)和(2.69)也全都是同位旋标量．强作用过程还有奇异数守恒，这要求作用能本身是非奇异的，奇异数为零．上节讨论的核力只涉及非奇异粒子，作用能自然是非奇异的．用粒子符号表示该粒子的场函数，$\frac{1}{2}$自旋重子八重态与赝标介子八重态可有下列相互作用哈密顿量密度：

$$\mathscr{H}'_{NN\pi}=-ig_{NN\pi}\overline{N}\gamma_5\boldsymbol{\tau}N\cdot\boldsymbol{\pi}\,, \tag{2.83}$$

$$\mathscr{H}'_{\Xi\Xi\pi}=-ig_{\Xi\Xi\pi}\overline{\Xi}\gamma_5\boldsymbol{\tau}\Xi\cdot\boldsymbol{\pi}\,, \tag{2.84}$$

$$\mathscr{H}'_{\Sigma\Sigma\pi}=-g_{\Sigma\Sigma\pi}(\overline{\boldsymbol{\Sigma}}\gamma_5\times\boldsymbol{\Sigma})\cdot\boldsymbol{\pi}\,, \tag{2.85}$$

$$\mathscr{H}'_{\Sigma\Lambda\pi}=-ig_{\Sigma\Lambda\pi}(\overline{\boldsymbol{\Sigma}}\gamma_5\Lambda+\overline{\Lambda}\gamma_5\boldsymbol{\Sigma})\cdot\boldsymbol{\pi}\,, \tag{2.86}$$

$$\mathscr{H}'_{NN\eta}=-ig_{NN\eta}\overline{N}\gamma_5N\eta\,, \tag{2.87}$$

$$\mathscr{H}'_{\Xi\Xi\eta}=-ig_{\Xi\Xi\eta}\overline{\Xi}\gamma_5\Xi\eta\,, \tag{2.88}$$

$$\mathscr{H}'_{\Sigma\Sigma\eta}=-ig_{\Sigma\Sigma\eta}\overline{\boldsymbol{\Sigma}}\gamma_5\cdot\boldsymbol{\Sigma}\eta\,, \tag{2.89}$$

$$\mathscr{H}'_{\Lambda\Lambda\eta}=-ig_{\Lambda\Lambda\eta}\overline{\Lambda}\gamma_5\Lambda\eta\,, \tag{2.90}$$

$$\mathscr{H}'_{N\Lambda K}=-ig_{N\Lambda K}(\overline{N}\gamma_5\Lambda K+K^{\dagger}\overline{\Lambda}\gamma_5N)\,, \tag{2.91}$$

$$\mathscr{H}'_{\Xi\Lambda K}=-ig_{\Xi\Lambda K}(\overline{\Xi}\gamma_5\Lambda\overline{K}+\overline{K}^{\dagger}\overline{\Lambda}\gamma_5\Xi)\,, \tag{2.92}$$

$$\mathscr{H}'_{N\Sigma K}=-ig_{N\Sigma K}(\overline{N}\gamma_5\,\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{\tau}K+K^{\dagger}\boldsymbol{\tau}\cdot\overline{\boldsymbol{\Sigma}}\gamma_5N)\,, \tag{2.93}$$

$$\mathscr{H}'_{\Xi\Sigma K}=-ig_{\Xi\Sigma K}(\overline{\Xi}\gamma_5\,\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{\tau}\overline{K}+\overline{K}^{\dagger}\boldsymbol{\tau}\cdot\overline{\boldsymbol{\Sigma}}\gamma_5\Xi) \tag{2.94}$$

其中 $N=\begin{bmatrix}p\\n\end{bmatrix},\Xi=\begin{bmatrix}\Xi^0\\\Xi^-\end{bmatrix},K=\begin{bmatrix}K^+\\K^0\end{bmatrix}$和$\overline{K}=\begin{bmatrix}\overline{K}^0\\K^-\end{bmatrix}$均为同位旋空间的旋量．$\boldsymbol{\Sigma}(\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3)$和$\boldsymbol{\pi}(\pi_1,\pi_2,\pi_3)$为同位旋空间矢量，与Σ超子和π介子的关系分别为

$$\Sigma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\Sigma^- -\Sigma^+),\ \Sigma_2=\frac{1}{\sqrt{2}\,i}(\Sigma^- +\Sigma^+),\ \Sigma_3=\Sigma^0, \tag{2.95}$$

$$\pi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\pi^- -\pi^+),\ \pi_2=\frac{1}{\sqrt{2}\,i}(\pi^- +\pi^+),\ \pi_3=\pi^0. \tag{2.96}$$

(2.83)～(2.94)中的标量积和向量积都在同位旋空间进行．由这些相互作用能密度不难得到$\frac{1}{2}$自旋重子间的单赝标介子交换势．类似地，可得其他重子与介子间相互作用能密度的各种形式并由之导出各种重子间的各种介子交换势．现在的问题是相互作用能密度的种类太多；每种作用都有一个作用常数，因而理论的待定常数太多．太多的待定常数会使理论黯然失色．减少待定常数的办法是利用更高的对称性．比同位旋守恒和奇异数守恒更高的对称性就是味SU(3)对称．下面看看味SU(3)对称下的重子与介子的相互作用能密度．

仍以$\frac{1}{2}$自旋重子八重态与赝标介子八重态的相互作用为例．(1.57)与(1.60)表明，SU(3)李代数八维不可约表示空间为三阶迹零矩阵的集合．将两个同阶矩阵X与X'的标量积定义为$\mathrm{tr}(X^{\dagger}X')$，八维不可约表示空间的一组正交归一基底可选为

$$X_a=\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_a,\quad a=1,2,\cdots,8, \tag{2.97}$$

其中 $\lambda_a, a=1,2,\cdots,8$, 为 (1.24) 定义的SU(3) 李代数的生成元．设在八维表示的一个元素 $\overline{\Lambda}=\lambda(1)+\lambda'(2)$的作用下，八维表示空间的一个元素 $X=(X_i{}^j)$ 变为 $X'=(X'^j_i)$. 重复 (1.60) 后的论证得

$$X'_i{}^j=\sum_{i'=1}^{3}\lambda_i{}^{i'}X_{i'}{}^j+\sum_{j'=1}^{3}\lambda'_{j'}{}^jX_i{}^{j'}$$

$$=\sum_{i'=1}^{3}\lambda_i{}^{i'}X_{i'}{}^j-\sum_{j'=1}^{3}\lambda^*{}_j{}^{j'}X_i{}^{j'}$$

$$=\sum_{i'=1}^{3}\lambda_i{}^{i'}X_{i'}{}^j-\sum_{j'=1}^{3}X_i{}^{j'}\lambda_{j'}{}^j \ ,$$

其中第二等号处用了共轭表示的定义 (1.36)，第三等号处用了λ的厄米性．此式的矩阵表示为

$$X'=\lambda X-X\lambda=\mathrm{i}[\lambda,X]\ . \qquad (2.98)$$

可见八维不可约表示空间的基矢 X_a 在生成元 $\overline{\Lambda}_b$ 的作用下变为

$$\mathrm{i}[\lambda_b,X_a]=2\mathrm{i}\sum_{c=1}^{8}f_{cba}X_c\ . \qquad (2.99)$$

将八维表示空间的任一元素 X用基底 (2.97) 展开：

$$X=\sum_{a=1}^{8}V_aX_a\ . \qquad (2.100)$$

它在 $\overline{\Lambda}_b$ 的变换下成为

$$X'=\sum_{a=1}^{8}V_a\sum_{c=1}^{8}2\mathrm{i}f_{cba}X_c$$

$$=\sum_{a=1}^{8}\left(\sum_{c=1}^{8}2\mathrm{i}f_{abc}V_c\right)X_a\ . \qquad (2.101)$$

可见，在以 (2.97) 为基底的八维表示中，生成元 $\overline{\Lambda}_b$ 的第 a 行第 c 列的矩阵元为

$$\left(\overline{\Lambda}_b\right)_{ac}=2\mathrm{i}f_{abc}\ . \qquad (2.102)$$

由于表示矩阵应满足结构关系

$$\left[\overline{\Lambda}_a,\overline{\Lambda}_b\right]=2\sum_{c=1}^{8}f_{abc}\overline{\Lambda}_c\ , \qquad (2.103)$$

由表达式 (2.102) 知结构常数应有关系

$$\sum_{e=1}^{8}(f_{abe}f_{ecl}+f_{bce}f_{eal}+f_{cae}f_{ebl})=0\ . \qquad (2.104)$$

此式可由生成元 (1.24) 的雅可比 (Jacobi) 恒等式

$$\left[[\lambda_a,\lambda_b],\lambda_c\right]+\left[[\lambda_b,\lambda_c],\ \lambda_a\right]+\left[[\lambda_c,\lambda_a],\lambda_b\right]=0 \qquad (2.105)$$

和基本结构关系 (1.30) 直接得到．以结构常数为矩阵元的表示 (2.102) 称为伴随表示．从 (2.100) 和 (2.101) 还可看出，$\overline{\Lambda}_b$ 将 X 变换为 X' 就是把它的分量 V_a 变换为

$$V_a'=\sum_{c=1}^{8}(\overline{\Lambda}_b)_{ac}V_c=\sum_{c=1}^{8}2\mathrm{i}f_{abc}V_c\ . \qquad (2.106)$$

在量子论中动力学变量都是算符，一个量对另一个量的变换用对易关系表示．变换 (2.106) 即为

$$\overline{\Lambda}_bV_a-V_a\overline{\Lambda}_b=\sum_{c=1}^{8}2\mathrm{i}f_{abc}V_c\ . \qquad (2.107)$$

这是因为左边第一项中 $\overline{\Lambda}_b$ 对受 V_a 作用后的态矢量变换，因而含对原来态矢量的变换和对 V_a 的变换．而第二项中 $\overline{\Lambda}_b$ 只对原来的态矢量变换．两者之差正是 $\overline{\Lambda}_b$ 对 V_a 的变换．(2.107) 又可表为

$$\left[\overline{\Lambda}_b,V_a\right]=2\sum_{c=1}^{8}f_{abc}V_c\ , \qquad (2.108)$$

与 (1.79) 相比差一符号．这源于两式中 V_a 的含义不同．(1.79) 中 V_a 为一SU(3) 矢量，$V_1,V_2,\cdots,V_8$ 共为八个 SU(3) 矢量，组成一SU(3) 矢量集．而在 (2.108) 中 V_a 只是 SU(3) 矢量用基底 (2.97) 展开式 (2.100) 中的一个分量，$V_1,V_2,\cdots,V_8$ 合在一起才是一个 SU(3) 矢量．(1.79) 与 (2.108) 的关系类似基底变换与分量变换的关系，故差一符号．也可将按 (2.108) 变换的一组量 $V_1,V_2,\cdots,V_8$ 定义为一SU(3) 矢量．由两个

SU(3) 矢量 $X=\sum_{a=1}^{8} V_a X_a$ 和 $X'=\sum_{a=1}^{8} V_a' X_a$ 可组成

$$S=\sum_{a=1}^{8} V_a V_a' \quad , \tag{2.109}$$

它与生成元有对易关系

$$\begin{aligned}[\bar{\Lambda}_b, S] &= \sum_{a=1}^{8} [\bar{\Lambda}_b, V_a] V_a' + V_a [\bar{\Lambda}_b, V_a'] \\ &= 2\sum_{a,c=1}^{8} f_{abc}(V_c V_a' + V_a V_c') \\ &= 2\sum_{a,c=1}^{8} (f_{abc}+f_{cba}) V_c V_a' = 0 \quad ,\end{aligned} \tag{2.110}$$

因而是一SU(3) 标量. 由矢量 X 和 X' 还可组成

$$U_a=\sum_{b,c=1}^{8} f_{abc} V_b V_c', \quad a=1,2,\cdots,8 . \tag{2.111}$$

它们与生成元有对易关系

$$\begin{aligned}\left[\bar{\Lambda}_b, U_a\right] &= \sum_{b',c=1}^{8} f_{ab'c}\left([\bar{\Lambda}_b, V_{b'}] V_c' + V_{b'} [\bar{\Lambda}_b, V_c']\right) \\ &= 2\sum_{b',c,e=1}^{8} f_{ab'c}\left(f_{b'be} V_e V_c' + f_{cbe} V_{b'} V_e'\right) \\ &= 2\sum_{b',c,e=1}^{8} \left(f_{ebb'} f_{b'ac} + f_{ab'} f_{b'bc}\right) V_e V_c' \\ &= 2\sum_{b',c,e=1}^{8} f_{bab'} f_{eb'c} V_e V_c' \quad , \\ &= 2\sum_{c=1}^{8} f_{abc} U_c \quad .\end{aligned} \tag{2.112}$$

在推导中多次用到 f_{abc} 的全反对称性以及关系 (2.104). (2.112) 表明, $U_1, U_2, \cdots, U_8$ 组成一SU(3) 矢量, 可当作 X 与 X' 的 SU(3) 向量积. 由于 $\bar{\Lambda}_b$ 为自伴算符, f_{abc} 为实数, 在 (2.108) 两边取厄米伴随得

$$[\bar{\Lambda}_b, V_a^{\dagger}] = 2\sum_{c=1}^{8} f_{abc} V_c^{\dagger} \quad . \tag{2.113}$$

此式表明, 一个 SU(3) 矢量取厄密伴随后仍为一SU(3) 矢量. 这使

$$\mathrm{tr}(X^{\dagger}X')=\sum_{a=1}^{8} V_a^{\dagger} V_a' \tag{2.114}$$

为 SU(3) 标量, 与前面将它定义为矢量 X 与 X' 的标量积一致. 同理, $\sum_{b,c=1}^{8} f_{abc} V_b^{\dagger} V_c'$ 和 $\sum_{b,c=1}^{8} f_{abc} V_b^{\dagger} V_c'^{\dagger}$, 其中 $a=1,2,\cdots,8$, 也分别组成 SU(3) 矢量. 而矢量 $\sum_{a=1}^{8} U_a X_a, \sum_{a=1}^{8} V_a X_a$ 和 $\sum_{a=1}^{8} W_a X_a$ 组成的三线性量

$$S_F=\sum_{a,b,c=1}^{8} f_{abc} U_a^{\dagger} V_b W_c \tag{2.115}$$

则是一个 SU(3) 标量. 也可用 (1.81) 表示的 d_{abc} 构造 SU(3) 矢量和标量. 由生成元 (1.24) 可直接验证

$$\lambda_a \lambda_b = \sum_{c=1}^{8} (\mathrm{i} f_{abc} + d_{abc}) \lambda_c + \sqrt{\frac{2}{3}}\, \lambda_0 \delta_{ab} \quad , \tag{2.116}$$

其中

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{2.117}$$

定义两个同阶矩阵 A 和 B 的反厄米反交换子

$$\{A, B\} = -\mathrm{i}(AB+BA), \tag{2.118}$$

由(1.25),(2.116) 以及生成元 λ_a 的迹零性知

$$d_{abc} = \frac{\mathrm{i}}{4}\, \mathrm{tr}(\{\lambda_a, \lambda_b\} \lambda_c) . \tag{2.119}$$

此式可当作 d_{abc} 的定义和计算公式. 与雅可比恒等式 (2.105) 对应, 有恒等式

$$[\lambda_a, \{\lambda_b, \lambda_c\}] - \{[\lambda_a, \lambda_b], \lambda_c\} - \{[\lambda_a, \lambda_c], \lambda_b\} = 0 \quad , \tag{2.120}$$

可直接验算证明. 用 (1.30) 和 (2.116) 可将此式转化成 f_{abc} 与 d_{abc} 的关系

$$\sum_{e=1}^{8} (f_{abe} d_{ed} + f_{eal} d_{bce} + f_{ace} d_{ebl}) = 0 . \tag{2.121}$$

定义一组八个矩阵 $D_b, b=1,2,\cdots,8$, 它们的第 a 行第 c 列的矩阵元为

$$(D_b)_{ac}=d_{abc}\ , \tag{2.122}$$

由 (2.102) 知 (2.121) 可表为

$$[\bar{A}_a, D_b]=2\sum_{c=1}^{8} f_{abc} D_c\ . \tag{2.123}$$

即 $D_1, D_2, \cdots, D_8$ 为一SU(3) 矢量集．由矢量 $X=\sum_{a=1}^{8} V_a X_a$ 和 $X'=\sum_{a=1}^{8} V'_a X_a$ 组成双线性量

$$U_a=\sum_{b,c=1}^{8} d_{abc} V_b V'_c\ , \qquad a=1,2,\cdots,8\ . \tag{2.124}$$

它们与生成元有对易关系

$$\begin{aligned}
[\bar{A}_b, U_a] &= \sum_{b',c=1}^{8} d_{ab'c}\left([\bar{A}_b, V_{b'}]V'_c + V_{b'}[\bar{A}_b, V'_c]\right) \\
&= 2\sum_{b',c,e=1}^{8} d_{ab'c}(f_{b'be} V_e V'_c + f_{cbe} V_{b'} V'_e) \\
&= 2\sum_{b',c,e=1}^{8} (d_{b'ac} f_{beb'} + d_{eab'} f_{b'bc}) V_e V'_c \\
&= 2\sum_{b',c,e=1}^{8} f_{abb'} d_{b'ec} V_e V'_c \\
&= 2\sum_{c=1}^{8} f_{abc} U_c\ .
\end{aligned} \tag{2.125}$$

推导中用了 f_{abc} 的全反对称性，d_{abc} 的全对称性和 (2.121)．此式表明 (2.124) 定义的 $U_1, U_2, \cdots, U_8$ 组成一SU(3) 矢量．因此，矢量 $\sum_{a=1}^{8} U_a X_a$, $\sum_{a=1}^{8} V_a X_a$ 和 $\sum_{a=1}^{8} W_a X_a$ 组成的三线性量

$$S_D=\sum_{a,b,c=1}^{8} d_{abc} U_a^{\dagger} V_b W_c \tag{2.126}$$

也是一个 SU(3) 标量．

用 $\boldsymbol{\Psi}$ 表示 $\frac{1}{2}$ 重子八重态的场函数，$\boldsymbol{\Phi}$ 表示赝标介子八重态的场函数．它们都可用基底 (2.97) 展开：

$$\boldsymbol{\Psi}=\sum_{a=1}^{8} \Psi_a X_a\ , \qquad \boldsymbol{\Phi}=\sum_{a=1}^{8} \Phi_a X_a\ . \tag{2.127}$$

X_a 表粒子的 SU(3) 味态．由于 SU(3) 味对称按同位旋和超荷破缺，粒子实际的味态由 (1.69) ~ (1.72) 表示．将它们用三阶迹零矩阵表出，依次为

$$\left.\begin{aligned}
X_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ (X_4+\mathrm{i}X_5)\ , \\
X_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ (X_6+\mathrm{i}X_7)\ ,
\end{aligned}\right\} \tag{2.128}$$

$$X_{0,0,0} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = X_8\ , \tag{2.129}$$

$$\left.\begin{aligned}
X_{1,1,0} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ (X_1+\mathrm{i}X_2)\ , \\
X_{1,0,0} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = X_3\ , \\
X_{1,-1,0} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ (X_1-\mathrm{i}X_2)\ ,
\end{aligned}\right\} \tag{2.130}$$

$$\left.\begin{aligned}
X_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ (X_6-\mathrm{i}X_7)\ , \\
X_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ (X_4-\mathrm{i}X_5)\ .
\end{aligned}\right\} \tag{2.131}$$

左端 X 的三个下标依次为同位旋量子数 T, 同位旋第三分量量子数 T_3 和超荷 Y. (2.128)～(2.131) 为一组完备正交归一的 SU(3) 矢量，重子八重态和介子八重态都可用它们展开. 用粒子符号表示该粒子的场函数，展开式为

$$\boldsymbol{\Psi}=\mathrm{p}X_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},1}+\mathrm{n}X_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1}+\Lambda X_{0,0,0}+\Sigma^{+}X_{1,1,0}$$

$$+\Sigma^{0}X_{1,0,0}+\Sigma^{-}X_{1,-1,0}+\Xi^{0}X_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1}+\Xi^{-}X_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1}\ , \quad (2.132)$$

$$\boldsymbol{\Phi}=\mathrm{K}^{+}X_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},1}+\mathrm{K}^{0}X_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1}+\eta X_{0,0,0}+\pi^{+}X_{1,1,0}$$

$$+\pi^{0}X_{1,0,0}+\pi^{-}X_{1,-1,0}+\overline{\mathrm{K}}^{0}X_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1}+\mathrm{K}^{-}X_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1}\ . \quad (2.133)$$

与 (2.127) 比较，由关系 (2.128)～(2.131) 得

$$\Psi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\Sigma^{-}-\Sigma^{+}),\quad \Psi_2=-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(\Sigma^{-}+\Sigma^{+}),\ \Psi_3=\Sigma^{0}\ , \quad (2.134)$$

$$\Psi_4=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{p}+\Xi^{-}),\qquad \Psi_5=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(\mathrm{p}-\Xi^{-}), \quad (2.135)$$

$$\Psi_6=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{n}-\Xi^{0}),\qquad \Psi_7=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(\mathrm{n}+\Xi^{0}), \quad (2.136)$$

$$\Psi_8=\Lambda\ , \quad (2.137)$$

$$\Phi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\pi^{-}-\pi^{+}),\qquad \Phi_2=-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(\pi^{-}+\pi^{+}),\quad \Phi_3=\pi^{0}, \quad (2.138)$$

$$\Phi_4=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{K}^{+}+\mathrm{K}^{-}),\qquad \Phi_5=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(\mathrm{K}^{+}-\mathrm{K}^{-}), \quad (2.139)$$

$$\Phi_6=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{K}^{0}-\overline{\mathrm{K}}^{0}),\qquad \Phi_7=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(\mathrm{K}^{0}+\overline{\mathrm{K}}^{0}), \quad (2.140)$$

$$\Phi_8=\eta\ . \quad (2.141)$$

现在由重子八重态的二次型与介子八重态可按照两种方式(2.115)和(2.126)组成 SU(3) 标量，因此在完全SU(3) 味对称条件下 $\frac{1}{2}$ 自旋重子八重态与赝标介子八重态三线性作用能密度的一般形式为

$$\mathscr{H}'=g_F\sum_{a,b,c=1}^{8}f_{abc}\overline{\Psi}_a\gamma_5\Phi_b\Psi_c-\mathrm{i}g_D\sum_{a,b,c=1}^{8}d_{abc}\overline{\Psi}_a\gamma_5\Phi_b\Psi_c\ , \quad (2.142)$$

其中只有两个待定常数 g_F 和 g_D . 将 (2.134)～(2.141) 代入，可将这相互作用约化到各同位旋多重态，其结果是 (2.83)～(2.94) 表示的各相互作用能密度之和. 不过现在其中的各作用常数不再是独立的了，它们都可用 (2.142) 中的两个作用常数 g_F 和 g_D 表出. 经较长的简单计算后得

$$g_{\mathrm{NN}\pi}=\frac{1}{2}(g_D+g_F)\ , \quad (2.143)$$

$$g_{\Xi\Xi\pi}=\frac{1}{2}(g_F-g_D)\ , \quad (2.144)$$

$$g_{\Sigma\Sigma\pi}=\frac{1}{2}g_F\ , \quad (2.145)$$

$$g_{\Sigma\Lambda\pi}=\frac{1}{\sqrt{3}}g_D\ , \quad (2.146)$$

$$g_{\mathrm{NN}\eta}=\frac{1}{2\sqrt{3}}(3g_F-g_D)\ , \quad (2.147)$$

$$g_{\Xi\Xi\eta}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}(3g_F+g_D)\ , \quad (2.148)$$

$$g_{\Sigma\Sigma\eta}=\frac{1}{\sqrt{3}}g_D\ , \quad (2.149)$$

$$g_{\Lambda\Lambda\eta}=-\frac{1}{\sqrt{3}}g_D\ , \quad (2.150)$$

$$g_{\mathrm{N}\Lambda\mathrm{K}}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}(3g_F+g_D)\ , \quad (2.151)$$

$$g_{\Xi\Lambda K}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ (3g_F-g_D)\ , \tag{2.152}$$

$$g_{N\Sigma K}=\frac{1}{2}\ (g_D-g_F)\ , \tag{2.153}$$

$$g_{\Xi\Sigma K}=-\frac{1}{2}\ (g_D+g_F)\ . \tag{2.154}$$

当然，这些关系只在完全 SU(3) 对称下才精确成立，在近似 SU(3) 对称下只近似成立，只有定性的参考价值．例如它们之间的相对符号和大小顺序或许是对的．现在的问题是，由于没有足够的奇异粒子做靶，也缺乏足够强的奇异粒子流，有奇异粒子参与的实验资料还太少．要得到有奇异粒子参与的相互作用的确切知识，还需积累大量实验资料．

2.4 强子的夸克结构与核力，六夸克口袋

在前面研讨核力的介子理论时核子和介子都被当成了点粒子．这表现在采用定域的核子 - 介子场论．具体地说，作用能密度 (2.17)、(2.50)、(2.69) 以及 (2.83) ~ (2.94) 都是一个时空点的函数．作用在一点表明参与作用的粒子都没有时空结构．然而已知强子是有时空结构的．重子由夸克组成，介子由夸克 - 反夸克对组成．这种结构自然会反映在核力中．核力中的强子结构效应在两个核子靠近，它们所占的空间区域有重叠时变得重要．我们可先考虑一种极端情形，即两核子距离为零，完全重合的情形．按口袋模型，这种情形下两核子系统成为一个含六个夸克的球口袋，只是应具有两核子系统的量子数．例如三偶态中两核子总自旋为 1，总同位旋为 0，氘核属这种状态．而单偶态中两核子总自旋为 0，总同位旋为 1，二核子散射中会出现这种状态．在距离为零的二核子球口袋模型中，总自旋即六个夸克的自旋之和，总同位旋即六个夸克同位旋之和．球口袋中单夸克的最低能态 (1.150) 对其中的自旋态 χ 是 2 度

简并的．核子中只含 u ,d 夸克，它们的质量均设为零，应将零代人 (1.150) 中的夸克质量．相应地，夸克能量 ω 由 (1.156) 的最小正根经 (1.157) 给出．u ,d 夸克组成同位旋二重态，最低能量单夸克态对同位旋二度简并．每种夸克对色都有三度简并．因此球口袋内夸克的最低能级共有 $2\times2\times3=12$ 度简并．二核子系统中的六个夸克都可填入最低能级．不过这种填充要满足一些条件．除应具有二核子系统规定的量子数外它还必须是色单态，并且对六个夸克全反对称．所有单夸克波函数 (1.150) 随空间坐标 $\boldsymbol{r}$ 的变化都是一样的，全反对称条件就加在自旋-同位旋-色态上．在六个夸克中任何一对间同时交换自旋、同位旋和色，六夸克态矢量要变号．这种态可按一定程序来构造．先将夸克分成两组．一组含例如第 1,2 和 3 夸克，另一组含第 4,5 和 6 夸克．将每组夸克按 1.5 节的办法组成一个核子态，将它们直乘起来用 CG 系数组成总自旋和总同位旋的本征态，再全反对称化．由于每个核子态都是色单态，它们的直乘和反对称化的结果必定也是色单态．有了这种六夸克态矢量就可计算互相重叠的二核子系统的性质．这种计算虽然繁却可解析地进行，结果有解析表达式．例如球口袋中六个 u,d 夸克组成的总自旋为 1 总同位旋为 0 的色单态，连同体积能、卡西米尔能和色磁能在内的总能量的极小值仍由 (1.221) 表示，不过其中

$$X=2.04\times6-z_0+0.472\,\alpha_c\ . \tag{2.155}$$

将参数 (1.222) 代入此式和 (1.221) 得这种状态下球口袋能量的最小值为 2147 MeV，比两核子静止能量之和 1878 MeV 高出 269 MeV．如用参数 (1.231) 代入，这一能量最小值为 1984 MeV，也比二核子静止能量之和高 106 MeV．因此，按此模型要使二核子在三偶态中重合需对它作功 100 MeV 以上．这可表述为二核子间有近程强排斥．这也表现出排斥心的夸克根源．如球口袋中六个 u，d 夸克组成总自旋为 0 总同位旋为 1 的色单态，在它的总能量极小值的表达式 (1.221) 中

$$X=2.04\times6-z_0+1.416\alpha_c\ . \tag{2.156}$$

将参数(1.222)代入得这种状态下球口袋能量的最小值为2225 MeV,比两核子静止能量之和高347 MeV. 如用参数(1.231)代人,这一能量的最小值为2062 MeV,比两核子静止能量之和高184 MeV. 可见单偶态中二核子的近程排斥作用比三偶态强,排斥心势比三偶态的高. 这与对核力的实验了解一致.

当两核子拉开距离后就不能再当作含六个夸克的球口袋,因而较难处理. 在两核子还有重叠的情况下,仍可将它们当作一个含六夸克的口袋,只是不再为球形,而是一拉长了的口袋. 狄塔尔(Detar 1978)用参数(1.222)对这种口袋作了初步计算,发现将口袋拉长确使能量下降,且当两重叠口袋中心距离在0.4 fm到1.4 fm间时这变形六夸克口袋能量低于两核子静止能量之和. 这就给出了两核子间的中程强吸引. 以0.4 fm为界,以内是近程强排斥,可表为一排斥心;以外是中程强吸引,可表为一深势阱. 这种图象与对核力的经验知识一致. 当两重叠口袋中心间距超过1.4 fm时狄塔尔得到的变形六夸克口袋能量的极小值又超过两核子静止能量之和. 这可能是由于口袋形状取得不合理致使未能充分变分从而未达到能量的真正极小所致. 至少当两口袋中心距离超过两费米时,参数(1.222)对六夸克系统会给出两个彼此分离的球口袋,每口袋总能量的最小值为一个核子的静止能量,这是确定参数(1.222)时依据的一个条件. 可见如计算方法是完全正确的,六夸克长形口袋总能量的最小值在两重叠口袋中心间距趋近2 fm时应趋于两核子静止能量之和,长口袋也应趋于两个分离的球口袋. 在关于强子的MIT静球口袋模型框架内无法计算相距2 fm以上(如取参数(1.222))或相距2.4 fm以上(如取参数(1.231))的两核子间的作用. 这是因为在这种距离条件下两核子口袋已彼此隔开,其间又没有传递作用的媒介. 要在分隔开的核子间传递作用只有再求助于介子. 可以两种不同方式考虑介子在两个分开的核子口袋间对作用的传递. 一种是发展量子口袋动力学(Zhang 1990,1990a,1991),考虑核子口袋发射和吸收介子口袋的过程. 这是一项艰巨的工作,尚待进行. 另一种是在口袋以外设置静态定域介子场,主要是π

介子场,由定域场方程和边条件确定. 这是指手征口袋模型(Brown 1979)和按这种模型的精神对史克密子模型(Skyrme 1961)的重新论证(Witten 1983)和改造(Rho 1983,Jackson 1983,Vepstas 1984,Brown 1984). 确定口袋外π介子场的边条件为由它组成的轴矢流在口袋表面与口袋内夸克场组成的轴矢流连续相接,而这是手征对称性所要求的. 这就是把这类口袋模型称为手征口袋模型的原因. 对轴矢流和手征对称性会在第4章作稍微深入的讨论. 现在只需注意到,由于口袋外有介子场,两个彼此互不接触的口袋可通过这介子场相互作用. 而且当彼此距离足够远时这种作用会趋于单π介子交换势. 这与对核力的实验了解一致. 用手征口袋模型和史克密子模型讨论核力的工作已做了不少,可参阅例如(Nawa 1990,Walet 1992)和他们引述的文献. 这种模型的缺点是忽视了介子本身的扩张结构. 恰恰是这一忽略使它便于将介子势与夸克结构导致的核子间作用势统一起来考虑.

强子由于内部的夸克运动而导致的扩张结构也可由势模型来表述. 与口袋模型不同,势模型中夸克禁闭和夸克间相互作用都用势函数表示. 物质的夸克理论归结为夸克多体系在势作用下的量子力学问题. 由于势作用下的相对论量子多体问题有困难,势模型尚只能用非相对论量子力学讨论夸克多体系. 恰恰由于人们通过核物理、原子物理等其他物理分支的研究对非相对论量子多体问题已很熟悉,积累了大量行之有效的方法,强子结构与强子动力学的非相对论夸克势模型得到了较彻底的研究,取得了较丰富的成果. 在核力的夸克机制方面,对两核子重叠区中夸克间的直接作用和核子发射和吸收介子的动力学都作了大量工作(Yazaki 1987,Yu 1984,1986,1988,1991,Zhang 1993),且与对核力的经验知识大体相符. 这些工作也可作为其他模型研究核力的借鉴. 这一模型的缺点自然是它的非相对论框架. 注意到强子尺度为1 fm的量级,与此对应的动能为$1\,fm^{-1} = 197$ MeV,势模型中夸克静止能量约300 MeV,可见相对论效应是不可忽略的. 如何将势模型改造成相对论的模型是一个重要的有趣问题.

2.5 双重子，味 SU(3) 单态与 H 粒子的预言，氘核与味 SU(3) 反十重态，存在味 SU(3)27 重态的证据

重子数 $B=2$ 的强子叫双重子，表现为两个重子的束缚态或共振态，由六个夸克组成．上节讨论过由六个 u、d 夸克组成的球口袋，发现在总自旋为 1 总同位旋为零或总自旋为零总同位旋为 1 的两种情形下都是不稳定的，会因强作用，即因核子间的近程强排斥，分解为两个核子．那么当球口袋中六个夸克取其他成分和状态时情形会怎样呢？在口袋模型提出不久后贾菲 (Jaffe 1977) 就对此作了详细研究，发现由 u, d和 s 夸克各两个组成的球口袋在夸克处于总自旋为零的味 SU(3)单态和色单态时对强作用可能是稳定的．他称这种对强作用稳定的双重子为 H 粒子．贾菲对 H 粒子的预言引起学术界的很大兴趣，因为若果真找到这种双重子将是对强子的夸克理论的重大支持．可惜至今尚未发现，成为强子物理的一个悬案．好在贾菲关于六夸克口袋的理论不仅有定量计算，还有定性分析，其中包含有意思的物理内容．不论是否真有稳定的 H 粒子，这些内容都有意义．下面对此略作介绍．

既只要定性了解，可设所有夸克均无质量，即设 s 夸克质量也为零．含 N 个夸克的球口袋的能量最小值由 (1.221) 所示．由 (1.192)、(1.202) 和 (1.215) 知，其中

$$X=2.04N-z_0+0.177\,\Delta\,\alpha_c \tag{2.157}$$

$$\Delta=-\sum_{i>j=1}^{N}\sum_{k=1}^{3}\sum_{a=1}^{8}\sigma_k(i)\lambda_a(i)\sigma_k(j)\lambda_a(j)\quad, \tag{2.158}$$

i,j 为夸克标号，σ_1,σ_2 和 σ_3 为 $\frac{1}{2}$ 自旋泡利矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_8$ 为色SU(3) 李代数的生成元．加上 (2.117) 定义的 λ_0，九个矩阵 $\lambda_a, a=0,1,2,\cdots,8$ 组成三行三列矩阵的一个完备集，任何三行三列矩阵可用它们线性展开．同样可将两行两列幺矩阵记为 σ_0，四个矩阵 $\sigma_k, k=0,1,2,3$ 组成两行两列矩阵的一个完备集，任何两行两列矩阵可用它们线性展开．由于在不同矢量空间运算，σ 与 λ 的乘法为直乘，即 $\sigma_k\lambda_a$为一六行六列矩阵，它的行 (列) 指标由 σ_k和 λ_a 的行 (列) 指标联合表示，它的矩阵元为 σ_k 和 λ_a 的矩阵元的积．四个 σ_k 与九个 λ_a 共组成 36 个六行六列矩阵 $\sigma_k\lambda_a$，它们组成六行六列矩阵的一个完备集．由于

$$\mathrm{tr}(\sigma_k\,\lambda_a)=(\mathrm{tr}\sigma_k)(\mathrm{tr}\lambda_a) \tag{2.159}$$

36 个矩阵 $\sigma_k\lambda_a$ 中除 $\sigma_0\lambda_0$ 外其余 35 个矩阵的阵迹全为零．它们组成 SU(6) 李代数的一组基．SU(6) 李代数为阵迹为零的六阶厄米矩阵的集合．它的生成元可取为

$$\sigma_k\,\lambda_a,\quad k=1,2,3,\quad a=1,2,\cdots,8; \tag{2.160}$$

$$\sigma_0\lambda_a,\quad a=1,2,\cdots,8; \tag{2.161}$$

和

$$\sigma_k\,\lambda_0,\quad k=1,2,3. \tag{2.162}$$

如果将 $\sigma_k, k=1,2,3$ 解释为夸克的 $\frac{1}{2}$ 自旋泡利矩阵，将 $\lambda_a, a=1,2,\cdots,8$ 解释为夸克的色 SU(3) 李代数的生成元，(2.160)~(2.162) 张的就是夸克的自旋－色 SU(6) 李代数．球口袋中的夸克运动并不具有自旋－色 SU(6) 对称，而只有自旋 SU(2) 和色 SU(3) 对称．例如 (2.158) 表示的色磁能中的因子Δ，它由夸克的 SU(6) 生成元的积组成，却只含 (2.160) 中的生成元而不含 (2.161) 和 (2.162) 中的生成元．不过采用破缺对称的观点，可从自旋－色 SU(6) 李代数的不可约表示约化到自旋 SU(2) 李代数的不可约表示和色 SU(3) 李代数的不可约表示．由于夸克只能处于色单态，即色 SU(3) 李代数的一维表示，态矢量对交换夸克的全反对称性导致自旋 SU(2) 李代数的不可约表示，即双重子的自旋 J，与味 SU(3) 李代数的不可约表示之间的关联．这类似于泡利原理导致的原子内电子系总轨道角动量量子数 L 与总自旋量子数 S 的关联．用李代数的术语，就是描写电子系轨道运动的三维转动 O(3) 李代数不可约表示与描述电子系自旋运动 1/2 自旋 SU(2) 李代数不可约表示之间的关联．将各夸克的 SU(6) 生成

元(2.160)～(2.162)加起来，即得 N 夸克系的 SU(6) 李代数直积表示的生成元

$$\sum_{i=1}^{N}\sigma_k(i)\lambda_a(i),\quad k=1,2,3,\quad a=1,2,\cdots,8; \tag{2.163}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sigma_0(i)\lambda_a(i)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_a(i),\quad a=1,2,\cdots,8\ ; \tag{2.164}$$

和

$$\sum_{i=1}^{N}\sigma_k(i)\lambda_0(i)=\sqrt{\frac{2}{3}}\sum_{i=1}^{N}\sigma_k(i),\quad k=1,2,3\ . \tag{2.165}$$

这个直积表示自然是可约的，可分解为各不可约表示的直和．约化得的自旋－色 SU(6) 李代数的各不约表示又可约化到1/2自旋 SU(2) 李代数和色 SU(3) 李代数的各不可约表示．其中只有色单态才是夸克系的实际状态．不可约表示可用卡西米尔算符的本征值标志．SU(6) 李代数的卡西米尔算符之一即各生成元的平方和．对色单态，(2.164) 中各色生成元的本征值均为零，它们的平方和自然为零．(2.165) 中各生成元的平方和为

$$\frac{8}{3}\sum_{k=1}^{3}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sigma_k(i)\right]^2=\frac{8}{3}\hat{J}^2\ , \tag{2.166}$$

$\hat{J}^2$为夸克系总自旋的平方．约化到$\frac{1}{2}$自旋 SU(2) 李代数的一个不可约表示，$\hat{J}^2$取本征值 $J(J+1)$．因此，(2.165) 中各生成元的平方和取值 $\frac{8}{3}J(J+1)$．用 (2.158) 可将 (2.163) 中各生成元的平方和表为

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{3}\sum_{a=1}^{8}\left[\sigma_k(i)\lambda_a(i)\right]^2-2\Delta=16N-2\Delta\ , \tag{2.167}$$

计算中用了(1.197)和 $\sigma_k^2=1$．可见卡西米尔算符，即 (2.163)～(2.165) 中各生成元的平方和的取值为

$$C=16N-2\Delta+\frac{8}{3}J(J+1)\,. \tag{2.168}$$

由此解得

$$\Delta=8N-\frac{1}{2}C+\frac{4}{3}J(J+1)\ . \tag{2.169}$$

代入(2.157)，再将所得的 X 代入(1.221)，可以看出夸克态所隶属的 SU(6) 李代数表示的卡西米尔算符取值越大口袋能量的极小值就会越小，它所代表的强子就越可能稳定．卡西米尔算符取值越大，夸克态的交换对称性就越高．由于夸克系的自旋－色－味态应是交换全反对称的，自旋－色态的对称性越高，味态的交换反对称性就要越高．交换反对称性最高的味态为味 SU(3) 李代数一维表示的单态，即味单态．可见 $J=0$ 的味单态双重子最可能对强作用稳定．这就是 H 粒子．由于以上分析建立在自旋－色 SU(6) 李代数基础上，关于存在低质量 H 粒子且可能稳定的预言不依赖口袋模型的细节，是与模型无关的．味 SU(3) 单态超荷 $Y=0$，双重子 $B=2$，由(1.16)知 H 粒子的奇异数为－2．如相对强作用不稳定可分解为两个 Λ^0 超子或两个 Σ 超子，或一个核子一个 Ξ 超子，其中两个 Λ^0 超子质量之和最低，为 2232 MeV．如果 H 粒子质量低于此值则对强作用是稳定的．

贾菲采用参数(1.222)算得 H 粒子的质量为 2150 MeV，比两个Λ^0超子的质量和低约 80 MeV，因此对强作用是稳定的．此质量比一个Λ^0超子与一个核子的质量和高，因而可由奇异数不守恒的弱作用衰变为一个 Λ^0 超子和一个核子．各种强子模型都计算过 H 粒子的性质，各模型算出的 H 粒子质量相差甚远．高的超过两 Λ^0 超子的质量和，按这种模型 H 粒子相对强作用就是不稳定的，只能表现为强子共振态．低的不足两核子的质量和，按这种模型 H 粒子相对弱作用也是稳定的，即是一个稳定强子，不会衰变为两个重子．可见关于 H 粒子的定量预言是强烈模型有关的．H 粒子的深入研究有赖于实验的进展．

用(2.127)中定义的 Ψ_a，$a=1,2,\cdots,8$，通过(2.134)～(2.137)表示1/2自旋重子的八重味态．由它们可按(2.109)组成双重子味单态

$$H=\frac{1}{\sqrt{8}}\sum_{a=1}^{8}\Psi_a\Psi_a$$

$$=\frac{1}{\sqrt{8}}(p\Xi^- + \Xi^- p - n\Xi^0 - \Xi^0 n$$

$$-\Sigma^+\Sigma^- - \Sigma^-\Sigma^+ + \Sigma^0\Sigma^0 + \Lambda^0\Lambda^0), \tag{2.170}$$

这就是 H 粒子的味态. 两个重子八重态还可按 (2.111) 组成反对称双重子八重态，按 (2.124) 组成对称双重子八重态. 1/2 自旋重子八重味态也可等价地用 (1.57) 中满足迹零条件 (1.60) 的系数 $C_i^j, i,j=1,2,3$ 表示. 两个重子味态的直积

$$T_{i_1 i_2}{}^{j_1 j_2}=C_{i_1}^{j_1}C_{i_2}^{j_2} \tag{2.171}$$

除约化到上述味单态和两个味八重态外，还可约化到其他不可约表示. 用 $\varepsilon^{j_3 i_1 i_2}$ 可将两个共轭表示的下标 i_1 和 i_2 按 (1.53) 约化成一个自表示的上标 j_3，再将上标 j_1,j_2,j_3 全对称化后即得十维表示 (3,0). 同样，可用 $\varepsilon_{i_3 j_1 j_2}$ 将两个自表示上标 j_1 和 j_2 按 (1.50) 约化成一个共轭表示的下标 i_3，再将下标 i_1,i_2,i_3 全对称化后即得表示 (0,3)，它也是十维的，称为反十维表示. 最后剩下一个对上标 j_1,j_2 和下标 i_1,i_2 分别对称且满足迹零条件 (1.64) 的表示 (2,2)，由 (1.65) 算得它是 27 维的. 以上这些表示穷尽了两个八重态的直积提供的总共八八六十四态，因此约化完毕. 这个结果可形象地表为

$$8\otimes 8=1\oplus 8\oplus 8'\oplus 10\oplus \overline{10}\oplus 27\ , \tag{2.172}$$

其中数字表不可约表示的维数，出现重复的表示时用撇区分，$\overline{10}$ 表反 10 维表示. 现在唯一知道的稳定双重子就是氘核. 它的同位旋为零，重子数为 2，奇异数为零，按 (1.16) 超荷为 2. 在 (2.172) 右边的各不可约表示中只有 $\overline{10}$ 含这种态. 可见，如果氘核属味 SU(3) 的一个不可约表示，这个表示只能是反十维表示. 强子的味 SU(3) 对称理论一提出，欧克斯 (Oakes 1963) 就将氘核纳入了双重子反十重

态. 不过按盖尔曼－大久保公式 (1.91)，反十重态与十重态一样应有等距离质谱结构. 可惜至今尚未发现双重子有任何等距离质谱. 氘核是否隶属一个味 SU(3) 多重态仍为悬案.

另一方面，通过对实验数据的分析发现了存在双重子味 SU(3) 27 重态的证据 (Xie 1984). 27 重态的超荷可取 2、1、0、−1 和 −2 五个不同值. 超荷为 2 与 −2 的态各组成一个同位旋三重态. 超荷为 1 与 −1 的态各组成一个同位旋二重态和一个同位旋四重态. 超荷为零的态组成一个同位旋独态、一个同位旋三重态和一个同位旋五重态. 总共 27 个独立味态，每一个都可用同位旋 T，同位旋第三分量 T_3 和超荷 Y 三个量子数刻画，记作 χ_{TT_3Y}. 实验已发现 pp (2140)，pn(2100)，Λp(2256)，Σ^-p(2320)，ΛΛ(2365) 和 Ξ^-p(2480). 它们自然只是一些非束缚的共振态. 这里用共振中的两个重子的符号并列作为该双重子的名称，后面括号内的数字是质心系中以 MeV 为单位的共振能量，也就是双重子以 MeV/c^2 为单位的质量. 如果要为这些双重子在 27 重态中找到合适位置，则 pp 只可能是 $\chi_{1\,1\,2}$，因为这是 27 个态中唯一能分解成两个质子的态. 同理，pn 只能是 $\chi_{1\,0\,2}$，Λp 只能是 $\chi_{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,1}$，ΛΛ 只能是 $\chi_{0\,0\,0}$. Σ^-p 可能是

$$\chi_{\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\,1}=\sqrt{\frac{9}{20}}(\Lambda n+n\Lambda)-\sqrt{\frac{1}{30}}(\Sigma^- p+p\Sigma^-)$$

$$+\sqrt{\frac{1}{60}}\ (\Sigma^0 n+n\Sigma^0)\ , \tag{2.173}$$

也可能是

$$\chi_{\frac{3}{2}\,-\frac{1}{2}\,1}=\sqrt{\frac{1}{3}}\ (\Sigma^0 n+n\Sigma^0)+\ \sqrt{\frac{1}{6}}(\Sigma^- p+p\Sigma^-). \tag{2.174}$$

不过前者分解为 Σ^- 和 p 的几率为 1/15，而后者分解为 Σ^- 和 p 的几率为 1/3，为前者的五倍. 因此可设 Σ^-p (2320) 为 $\chi_{\frac{3}{2}\,-\frac{1}{2}\,1}$. 类似的考虑知可设 Ξ^-p(2480) 为 $\chi_{1\,0\,0}$. 可以用关于质量谱的盖尔曼－大

久保公式来检验将这些双重子纳入味SU(3)27重态并作上列确认是否正确．由于这些双重子的质量差比本身质量小得多，可用质谱公式(1.91)．用 m_{TY} 表示同位旋为 T，超荷为 Y 的同位旋多重态的质量，即其中具不同同位旋第三分量的粒子的质量平均值．前面列出的双重子质量的实验值给出

$$\left.\begin{aligned} m_{1\,2} &= \frac{1}{2}(m_{pp}+m_{pn}) = 2120\ \mathrm{MeV}/c^2, \\ m_{\frac{1}{2}\,1} &= m_{\Lambda p} = 2256\ \mathrm{MeV}/c^2, \\ m_{\frac{3}{2}\,1} &= m_{\Sigma^- p} = 2320\ \mathrm{MeV}/c^2, \\ m_{0\,0} &= m_{\Lambda\Lambda} = 2365\ \mathrm{MeV}/c^2, \\ m_{1\,0} &= m_{\Xi^- p} = 2480\ \mathrm{MeV}/c^2. \end{aligned}\right\} \tag{2.175}$$

另一方面，取参数

$$m_0 = 2389\ \mathrm{MeV}/c^2,\quad c'_1 = -153.2\ \mathrm{MeV}/c^2,\quad c'_2 = 30.11\ \mathrm{MeV}/,c^2 \tag{2.176}$$

代入(1.91)可算得味SU(3)27重态质谱

$$\left.\begin{aligned} &m_{1\,2} = 2113\ \mathrm{MeV}/c^2,\quad m_{\frac{1}{2}\,1} = 2251\ \mathrm{MeV}/c^2,\quad m_{\frac{3}{2}\,1} = 2341\ \mathrm{MeV}/,c^2 \\ &m_{0\,0} = 2389\ \mathrm{MeV}/c^2,\quad m_{1\,0} = 2449\ \mathrm{MeV}/c^2,\quad m_{2\,0} = 2570\ \mathrm{MeV}/c^2, \\ &m_{\frac{1}{2}\,-1} = 2557\ \mathrm{MeV}/c^2,\ m_{\frac{3}{2}\,-1} = 2648\ \mathrm{MeV}/c^2,\ m_{1\,-2} = 2726\ \mathrm{MeV}/c^2. \end{aligned}\right\} \tag{2.177}$$

可以看出，理论与实验相符甚好．在有实验值的五种同位旋多重态中，理论值与实验值相差不超过1.3%，平均误差0.74%．这与重子八重态和十重态质谱理论与实验相符的程度相仿，而优于介子八重态理论与实验相符的程度．还应指出，现在是用三个参数符合五个数据．这比重子和介子的情形中用三个参数符合四个数据的要求更严格．这些都使人有信心，相信确有一个双重子味SU(3)27重态．当然，要使这一点完全肯定下来还要从实验找到这个27重态的其余双重子．它们就是这个理论预言的 $\Sigma^+\Sigma^+(2570)$，$\Sigma^+\Sigma^-(2570)$，$\Sigma^-\Sigma^-(2570)$，$\Xi^-\Lambda(2557)$，$\Sigma^+\Xi^0(2648)$，$\Sigma^-\Xi^-(2648)$，以及 $\Xi^-\Xi^0$ 和 $\Xi^-\Xi^-(2726)$ 等．最后两个双 Ξ 的奇异数达 -4．

第3章　原子核与电磁作用

3.1　电磁场的量子化，光子

原子核的 γ 射线由硬光子组成．光子是电磁场的量子，要了解 γ 衰变和分析衰变中 γ 射线带出的原子核的信息，宜自电磁场的量子化始．仍取自然单位制．电磁场由四维电磁矢量势 A_μ 描述，其中 (A_1, A_2, A_3) 组成三维空间矢量，记作 $\boldsymbol{A}$，称为矢势；$A_4 = \mathrm{i}\,\Phi$，Φ 为标势．由它们组成场强

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\ ; \tag{3.1}$$

其中

$$\mathscr{E}_k = \mathrm{i}F_{k4} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial t},\quad k = 1,2,3 \tag{3.2}$$

为电场强度；

$$\mathscr{H}_k = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{kij} F_{ij}\quad,\quad k = 1,2,3 \tag{3.3}$$

为磁场强度．(3.2)和(3.3)又可表为

$$\mathscr{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t},\quad \mathscr{H} = \nabla\times\boldsymbol{A}\ . \tag{3.4}$$

带电粒子系通过电流密度四矢量 j_μ 与电磁场作用，其中 (j_1, j_2, j_3) 组成三维空间矢量，记作 $\boldsymbol{j}$，称为电流密度矢量；$j_4 = \mathrm{i}\rho$，ρ 为电荷密度．电磁场与带电粒子系的拉格朗日量密度中与电磁场有关的部分为

$$\mathscr{L}_1 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + j_\mu A_\mu\ , \tag{3.5}$$

这里采用了爱因斯坦求和约定．要求作用量

$$\mathscr{A}_1=\int \mathscr{L}_1 \, d^4x \tag{3.6}$$

对 A_μ的变分为零,得电磁场方程

$$\partial_\nu F_{\mu\nu}=j_\mu, \qquad \mu=1,2,3,4 . \tag{3.7}$$

用(3.2)和(3.3)可将此式表成熟知的麦克斯韦方程

$$\nabla\times\mathscr{H}=\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t}+\boldsymbol{j} , \tag{3.8}$$

$$\nabla\cdot\mathscr{E}=\rho . \tag{3.9}$$

由于(3.1)定义的 $F_{\mu\nu}$ 对下标反对称,$\partial_\mu\partial_\nu F_{\mu\nu}=0$,方程(3.7)的自洽性要求

$$\partial_\mu j_\mu=0, \tag{3.10}$$

即 $j_\mu, \mu=1,2,3,4$ 应为一守恒流. 此式又可写作

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0 , \tag{3.11}$$

即表示电荷守恒的连续性方程. 将电磁势由 A_μ 变作

$$A'_\mu=A_\mu+\partial_\mu\chi , \tag{3.12}$$

$\chi(\boldsymbol{r},t)$ 为一可微函数,将 A'_μ代入(3.1)得到的场强与将 A_μ 代入得到的场强相同:

$$\partial_\mu A'_\nu-\partial_\nu A'_\mu=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu .$$

称(3.12)为电磁势的规范变换,电磁场强在规范变换下不变. 因此,拉格朗日量密度中只与电磁场有关的部分,即(3.5)中的第一项也是规范变换下的不变量. 拉格朗日量密度中电磁场与带电粒子的作用项,即(3.5)中的第二项在规范变换下会变,会多出一项 $j_\mu\partial_\mu\chi$. 此项可与拉格朗日量密度中只与带电粒子有关部分的相应变化相抵消. 这部分拉格朗日量密度没有包含在(3.5)中. 设带电粒子为狄拉克场 Ψ的量子,只与带电粒子有关的拉格朗日量密度为

$$\mathscr{L}_2=-\overline{\Psi}(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\Psi , \tag{3.13}$$

m 为带电粒子的质量. 相应的电流密度四矢量为

$$j_\mu=\mathrm{i}e\overline{\Psi}\gamma_\mu\Psi , \tag{3.14}$$

e 为带电粒子的电荷. 将 Ψ 变为

$$\Psi'=e^{\mathrm{i}e\chi}\Psi, \tag{3.15}$$

流(3.14)不变,$\mathscr{L}_2$则由于其中的微分运算 ∂_μ 而多出一项 $-j_\mu\partial_\mu\chi$,恰与 $\mathscr{L}_1$在变换(3.12)下多出的那一项相消. 这使得拉格朗日量密度

$$\begin{aligned}\mathscr{L}&=\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2\\&=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}-\overline{\Psi}[\gamma_\mu(\partial_\mu-\mathrm{i}eA_\mu)+m]\Psi\end{aligned} \tag{3.16}$$

在联合规范变换(3.12)和(3.15)下不变. 运动方程自然也就在这种规范变换下不变. 理论内容的规范不变性使得可由规范变换令理论具备给定的形式. 这叫为理论选择一种规范. 例如可令

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0 , \tag{3.17}$$

理论的这种形式称为库仑规范. 如(3.17)不成立,则恒可选择满足泊松方程

$$\nabla^2\chi=-\nabla\cdot\boldsymbol{A} , \tag{3.18}$$

的函数 χ 经规范变换(3.12)和(3.15)变换理论的形式. 新形式中的电磁势 A'_μ 满足条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}'=0 . \tag{3.19}$$

这叫把理论变入了库仑规范. 库仑规范的优点是物理解释方便,这从以下讨论中可以看出. 缺点是规范条件(3.17)不具备洛伦兹协变的形式. 由于本章要研讨的 γ 衰变的一般规律与相对论没有什么关系,我们将采用库仑规范.

准备将电磁场按正则方式量子化. 为此要将理论写成正则形式. 以电磁势作广义坐标. 由于拉格朗日量密度(3.5)不含 $\frac{\partial A_4}{\partial t}$,不存在与 A_4 正则共轭的广义动量,A_4 不能作广义坐标,应从拉格朗日量中消去. 求解拉格朗日方程组(3.7)中 $\mu=4$ 的那个方程,即方程(3.9). 将(3.4)中 $\mathscr{E}$ 的表达式代入(3.9),用规范条件(3.17)可将这个方程表成标势Φ的泊松方程

$$\nabla^2\Phi=-\rho . \tag{3.20}$$

由此解得

$$\Phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\mathrm{d}\tau' . \tag{3.21}$$

右边没有积分限的体积分在 $\boldsymbol{r}'$ 的整个空间中进行. 设电荷分布局限在有限空间内,无穷远处 Φ 为零. (3.21) 将 $A_4=\mathrm{i}\Phi$ 用带电粒子系的动力学变量 $\rho(\boldsymbol{r},t)$ 表出. 将它代入拉格朗日量密度 (3.5),即可从中消去 A_4. 结果得与电磁场有关的拉格朗日量

$$L_1=\int\mathscr{L}_1\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)^2+2\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\cdot\nabla\Phi+(\nabla\Phi)^2-(\nabla\times\boldsymbol{A})^2\right]\mathrm{d}\tau$$

$$+\int(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}-\rho\Phi)\,\mathrm{d}\tau .$$

不带积分限的积分都是在整个空间进行的体积分. 在第一个积分中将含 $\nabla\Phi$ 的项作分部积分,无穷远处的面积分因 Φ 为零而为零. 故

$$\int\left[2\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\cdot\nabla\Phi+(\nabla\Phi)^2\right]\mathrm{d}\tau=-\int\left[2\frac{\partial\nabla\cdot\boldsymbol{A}}{\partial t}+\nabla^2\Phi\right]\Phi\,\mathrm{d}\tau=\int\rho\Phi\,\mathrm{d}\tau .$$

最后等号处用了规范条件 (3.17) 和方程 (3.20). 代入上式得

$$L_1=\frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)^2-\left(\nabla\times\boldsymbol{A}\right)^2\right]\mathrm{d}\tau+\int\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}\tau-\frac{1}{2}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r},t)\rho(\boldsymbol{r}',t)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau' . \tag{3.22}$$

在拉氏量的这一形式中电磁场量只以矢势 $\boldsymbol{A}$ 的形式出现. 原来含标势 Φ 的项现由其中的第三项代替,它是带电系统的库仑能,只与带电粒子系的动力学变量有关. 如采用 (3.14),可将其中的电荷密度用带电粒子场量 Ψ 表出:

$$\rho(\boldsymbol{r},t)=e\Psi^{\dagger}(\boldsymbol{r},t)\Psi(\boldsymbol{r},t) . \tag{3.23}$$

以 $\boldsymbol{A}$ 作为电磁场的广义坐标,与它正则共轭的广义动量即为

$$\boldsymbol{\Pi}=\frac{\delta L_1}{\delta\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)}=\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\mathscr{E}_t , \tag{3.24}$$

其中

$$\mathscr{E}_t=-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{3.25}$$

为电场强度的的横分量,称为横电场,因为

$$\nabla\cdot\mathscr{E}_t=0 . \tag{3.26}$$

与 L_1 相应的哈密顿量为

$$H_1=\frac{1}{2}\int\left[\boldsymbol{\Pi}^2+(\nabla\times\boldsymbol{A})^2\right]\mathrm{d}\tau-\int\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r},t)\rho(\boldsymbol{r}',t)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau'$$

$$=\frac{1}{2}\int(\mathscr{E}_t^2+\mathscr{H}^2)\,\mathrm{d}\tau-\int\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}\tau+\frac{1}{8\pi}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r},t)\rho(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau' . \tag{3.27}$$

正则量子化由将经典正则理论中的泊松括号更改为量子泊松括号完成. 算符 $\hat{F}$ 与 $\hat{G}$ 的量子泊松括号定义为

$$[\hat{F},\hat{G}]=\frac{\hat{F}\hat{G}-\hat{G}\hat{F}}{\mathrm{i}\hbar} , \tag{3.28}$$

在自然单位制中就是 (1.29) 定义的厄米交换子. 将广义坐标与广义动量的经典泊松括号翻译为量子泊松括号用于电磁场得

$$\left.\begin{aligned}&[\hat{A}_K(\boldsymbol{r},t),\hat{A}_{K'}(\boldsymbol{r}',t)]=[\hat{\Pi}_K(\boldsymbol{r},t),\hat{\Pi}_{K'}(\boldsymbol{r}',t)]=0 ,\\&[\hat{A}_K(\boldsymbol{r},t),\hat{\Pi}_{K'}(\boldsymbol{r}',t)]=\delta_{KK'}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\end{aligned}\right\} \tag{3.29}$$

这就是电磁场的基本对易关系,它定义了电磁场的量子化. 作平面波展开

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\sum_{K=1}^{3}q_K(\boldsymbol{k},t)\boldsymbol{u}_K\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3k , \tag{3.30}$$

$$\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\sum_{K=1}^{3}p_K(\boldsymbol{k},t)\boldsymbol{u}_K\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3k . \tag{3.31}$$

$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$, 和 $\boldsymbol{u}_3$ 为一组互相垂直的单位矢量,表示偏振方向. 将 $\boldsymbol{u}_3$ 取在波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的方向上,$\boldsymbol{u}_1$ 与 $\boldsymbol{u}_2$ 都垂直于 $\boldsymbol{k}$. 将 (3.30) 代入 (3.17),将 (3.31) 经 (3.24) 代入 (3.26),注意傅立叶积分为零则积分号下傅立叶系数必为零,得

$$q_3(\boldsymbol{k},t)=p_3(\boldsymbol{k},t)=0 \ . \tag{3.32}$$

(3.30) 和 (3.31) 简化为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\sum_{K=1}^{2}q_K(\boldsymbol{k},t)\boldsymbol{u}_K\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3k \ , \tag{3.33}$$

$$\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\sum_{K=1}^{2}p_K(\boldsymbol{k},t)\boldsymbol{u}_K\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3k \ . \tag{3.34}$$

它们表明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Pi}$ 都只含偏振方向与传播方向垂直的平面波，即是横波．散度为零的条件 (3.17) 和 (3.26) 均为横波条件．也可用基矢

$$\boldsymbol{u}_{\pm1}=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_1\pm\mathrm{i}\boldsymbol{u}_2) \tag{3.35}$$

代替 $\boldsymbol{u}_1$ 与 $\boldsymbol{u}_2$ 表示偏振．它们都垂直于传播方向 $\boldsymbol{k}$，且满足正交归一条件

$$\boldsymbol{u}_K^*\cdot\boldsymbol{u}_{K'}=\delta_{K,K'}, \quad K,K'=\pm1 \ . \tag{3.36}$$

乘上时间因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 可以看出

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\boldsymbol{u}_{+1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\cos\omega t\,\boldsymbol{u}_1+\sin\omega t\,\boldsymbol{u}_2)-\mathrm{i}(\sin\omega t\,\boldsymbol{u}_1-\cos\omega t\,\boldsymbol{u}_2)\right] , \tag{3.37}$$

逆着传播方向看这个矢量逆时针旋转，因此 $\boldsymbol{u}_{+1}$ 代表左旋圆偏振；同理，$\boldsymbol{u}_{-1}$ 代表右旋圆偏振．(3.33) 与 (3.34) 中对 K 的求和可一般地理解为对两个独立横偏振态的求和．

由于 $\left[\boldsymbol{u}_K\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right]$ 是一完备正交归一平面波集，(3.33)和(3.34)的逆变换为

$$q_K(\boldsymbol{k},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\boldsymbol{u}_K^*\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}\tau \ , \tag{3.38}$$

$$p_K(\boldsymbol{k},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\boldsymbol{u}_K^*\cdot\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}\tau \ . \tag{3.39}$$

表示偏振的坐标架是对各平面波分别定义的．为确定它们的关系，设波矢量为 $\boldsymbol{k}$ 的平面波与波矢量为 $-\boldsymbol{k}$ 的平面波偏振坐标架只差一

绕 $\boldsymbol{u}_1$ 的 180° 转动．复共轭将 $\boldsymbol{k}$ 变为 $-\boldsymbol{k}$，并将 (3.35) 中的 $\boldsymbol{u}_2$ 变为 $-\boldsymbol{u}_2$，因此恰将波矢量为 $\boldsymbol{k}$ 的圆偏振平面波变为波矢量为 $-\boldsymbol{k}$ 的同种圆偏振平面波．左旋仍变为左旋，右旋仍变为右旋．由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Pi}$ 均为实矢量，将 (3.38) 与 (3.39) 两边取复共轭，得

$$q_K^*(\boldsymbol{k},t)=q_K(-\boldsymbol{k},t) \ , \quad p_K^*(\boldsymbol{k},t)=p_K(-\boldsymbol{k},t) \ . \tag{3.40}$$

由 (3.29) 得

$$\left.\begin{aligned}&[\hat{q}_K(\boldsymbol{k},t),\hat{q}_{K'}(\boldsymbol{k}',t)]=[\hat{p}_K(\boldsymbol{k},t),\hat{p}_{K'}(\boldsymbol{k}',t)]=0 \ ,\\&[\hat{q}_K(\boldsymbol{k},t),\hat{p}_{K'}(-\boldsymbol{k}',t)]=\delta_{KK'}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \ ,\end{aligned}\right\} \tag{3.41}$$

表明若取 $q_K(\boldsymbol{k},t)$ 为电磁场的广义坐标，与它正则共轭的广义动量为 $p_K(-\boldsymbol{k},t)$．由 (3.33) 与 (3.34) 可得 (3.27) 中只与电磁场有关的能量

$$E_1^0=\frac{1}{2}\int(\mathscr{E}_\mathrm{t}^2+\mathscr{H}^2)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\int\sum_{K=\pm1}\Big(p_K(\boldsymbol{k},t)p_K(-\boldsymbol{k},t)+\omega^2q_K(\boldsymbol{k},t)q_K(-\boldsymbol{k},t)\Big)\mathrm{d}^3k \ , \tag{3.42}$$

其中 $\omega=k$．$\boldsymbol{k}$ 完全确定的平面波是一种理想状态，实际上 $\boldsymbol{k}$ 都有一个小区间 d^3k．用

$$\boldsymbol{A}_\sigma(\boldsymbol{r})=\sqrt{\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}}\ \boldsymbol{u}_K\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{3.43}$$

表示这种 $\boldsymbol{k}$ 有一小范围的平面波．下标 σ 同时表示 $\boldsymbol{k}$ 与 K，$-\sigma$ 表示 $-\boldsymbol{k}$ 与 K．相应地定义

$$q_\sigma(t)=q_K(\boldsymbol{k},t)\sqrt{\mathrm{d}^3k} \ , \quad p_\sigma(t)=p_K(\boldsymbol{k},t)\sqrt{\mathrm{d}^3k} \ . \tag{3.44}$$

广义坐标的连续标号 $\boldsymbol{k}$，连同分立标号 K 一起形式上被一分立标号 σ 代替．(3.33)，(3.34) 以及 (3.40)—(3.42) 都可写成分立与求和的形式：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\sum_\sigma q_\sigma(t)\boldsymbol{A}_\sigma(\boldsymbol{r}), \tag{3.45}$$

$$\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r},t)=\sum_\sigma p_\sigma(t)\boldsymbol{A}_\sigma(\boldsymbol{r}), \tag{3.46}$$

$$q_\sigma^*(t)=q_{-\sigma}(t) \ , \quad p_\sigma^*(t)=p_{-\sigma}(t), \tag{3.47}$$

$$\left.\begin{aligned}[\hat{q}_\sigma(t),\ \hat{q}_{\sigma'}(t)]=[\hat{p}_\sigma(t),\ \hat{p}_{\sigma'}(t)]=0,\\ [\hat{q}_\sigma(t),\ \hat{p}_{-\sigma'}(t)]=\delta_{\sigma\sigma'}.\end{aligned}\right\} \tag{3.48}$$

$$E_1^0=\frac{1}{2}\sum_\sigma(p_\sigma(t)p_{-\sigma}(t)+\omega_\sigma^2 q_\sigma(t)q_{-\sigma}(t)) . \tag{3.49}$$

(3.48)表明，广义坐标 q_σ的正则共轭广义动量为 $p_{-\sigma}$. (3.49)中 ω 加上了下标 σ，表示它与其中 $\boldsymbol{k}$的长度相等. (3.47)对应的算符关系则为

$$\hat{q}_\sigma^\dagger(t)=\hat{q}_{-\sigma}(t) ,\qquad \hat{p}_\sigma^\dagger(t)=\hat{p}_{-\sigma}(t) . \tag{3.50}$$

定义算符

$$\hat{a}_\sigma=\frac{1}{\sqrt{2\omega_\sigma\hbar}}(\omega_\sigma\hat{q}_\sigma+\mathrm{i}\hat{p}_\sigma) \tag{3.51}$$

及其厄米伴随

$$\hat{a}_\sigma^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2\omega_\sigma\hbar}}(\omega_\sigma\hat{q}_\sigma^\dagger-\mathrm{i}\hat{p}_\sigma^\dagger)=\frac{1}{\sqrt{2\omega_\sigma\hbar}}(\omega_\sigma\hat{q}_{-\sigma}-\mathrm{i}\hat{p}_{-\sigma}) . \tag{3.52}$$

由 (3.48) 可得它们的对易关系

$$\left.\begin{aligned}\hat{a}_\sigma\hat{a}_{\sigma'}-\hat{a}_{\sigma'}\hat{a}_\sigma=\hat{a}_\sigma^\dagger\hat{a}_{\sigma'}^\dagger-\hat{a}_{\sigma'}^\dagger\hat{a}_\sigma^\dagger=0,\\ \hat{a}_\sigma\hat{a}_{\sigma'}^\dagger-\hat{a}_{\sigma'}^\dagger\hat{a}_\sigma=\delta_{\sigma\sigma'}.\end{aligned}\right\} \tag{3.53}$$

由 (3.51) 和 (3.52) 解得

$$\hat{q}_\sigma=\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\sigma}}(\hat{a}_{-\sigma}^\dagger+\hat{a}_\sigma) , \tag{3.54}$$

$$\hat{p}_\sigma=\sqrt{\frac{\omega_\sigma\hbar}{2}}\mathrm{i}(\hat{a}_{-\sigma}^\dagger-\hat{a}_\sigma) . \tag{3.55}$$

代入算符化的表达式 (3.49)，可得电磁场自身能量的算符

$$\begin{aligned}\hat{H}_1^0&=\frac{1}{2}\sum_\sigma(\hat{p}_\sigma\hat{p}_{-\sigma}+\omega_\sigma^2\hat{q}_\sigma\hat{q}_{-\sigma})=\sum_\sigma(\hat{a}_\sigma^\dagger\hat{a}_\sigma+\frac{1}{2})\hbar\omega_\sigma\\ &=\sum_\sigma(\hat{N}_\sigma+\frac{1}{2})\hbar\omega_\sigma .\end{aligned} \tag{3.56}$$

在第二等号处采用了对易关系 (3.53) 来化简，并将表达式写成了与单位制无关的形式. 算符

$$\hat{N}_\sigma=\hat{a}_\sigma^\dagger\hat{a}_\sigma \tag{3.57}$$

由于对易关系 (3.53) 具有且只具有非负整数本征值，因而称为 σ 模式光子的光子数算符[①]. 用 N_σ 表示本征值，$|N_\sigma\rangle$表相应的归一化本征态，

$$\hat{N}_\sigma|N_\sigma\rangle=N_\sigma|N_\sigma\rangle ,\quad N_\sigma=0,1,2,\cdots . \tag{3.58}$$

适当选择相位后有

$$\hat{a}_\sigma|N_\sigma\rangle=\sqrt{N_\sigma}\,|N_\sigma-1\rangle , \tag{3.59}$$

$$\hat{a}_\sigma^\dagger|N_\sigma\rangle=\sqrt{N_\sigma+1}\,|N_\sigma+1\rangle . \tag{3.60}$$

因而称 $\hat{a}_\sigma$ 为 σ 模式光子的消灭算符，称 $\hat{a}_\sigma^\dagger$ 为 σ 模式光子的产生算符. 用它们还可表出电磁场的动量

$$\hat{\boldsymbol{P}}=\int\mathscr{E}_t\times\mathscr{H}\,\mathrm{d}\tau=\sum_\sigma\hat{a}_\sigma^\dagger\hat{a}_\sigma\hbar\boldsymbol{k}=\sum_\sigma\hat{N}_\sigma\hbar\boldsymbol{k} . \tag{3.61}$$

此式与 (3.56) 一样表明电磁场的量子化，它的量子就是光子. 波矢量为 $\boldsymbol{k}$的电磁波的量子具有动量$\hbar\boldsymbol{k}$和能量 $\hbar\omega$，其中 $\omega=ck$. 由于电磁场的动力学变量都可用它的广义坐标 $\hat{q}_\sigma$ 和广义动量 $\hat{p}_\sigma$ 表出，因而通过 (3.54) 和 (3.55) 都可用 $\hat{a}_\sigma$ 和 $\hat{a}_\sigma^\dagger$ 表出. 消灭算符 $\hat{a}_\sigma$ 和产生算符 $\hat{a}_\sigma^\dagger$ 可当作电磁场的基本量. 除 (3.56)、(3.57) 和 (3.61) 外还有重要表达式

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\sum_\sigma\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\sigma}}(\hat{a}_\sigma(t)\boldsymbol{A}_\sigma(\boldsymbol{r})+\hat{a}_\sigma^\dagger(t)\boldsymbol{A}_\sigma^*(\boldsymbol{r})) , \tag{3.62}$$

$$\mathscr{E}_t(\boldsymbol{r},t)=-\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{i}\sum_\sigma\sqrt{\frac{\omega_\sigma\hbar}{2}}(\hat{a}_\sigma(t)\boldsymbol{A}_\sigma(\boldsymbol{r})-\hat{a}_\sigma^\dagger(t)\boldsymbol{A}_\sigma^*(\boldsymbol{r})) , \tag{3.63}$$

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{r},t)=\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{i}\sum_\sigma\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\sigma}}\boldsymbol{k}\times\left(\hat{a}_\sigma(t)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})-\hat{a}_\sigma^\dagger(t)\boldsymbol{A}_\sigma^*(\boldsymbol{r})\right) . \tag{3.64}$$

推导中用了关系

$$\boldsymbol{A}_\sigma^*(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{A}_{-\sigma}(\boldsymbol{r}) . \tag{3.65}$$

① 本节以下内容可参阅张启仁，《量子力学》，§9.1，高等教育出版社，1989.

3.2 光子的角动量和宇称，多极场

电磁场的角动量为

$$\hat{J}_{场}=\int \boldsymbol{r}\times(\mathscr{E}_t\times\mathscr{H})\mathrm{d}\tau=\frac{\hbar}{2}\sum_{\sigma\sigma'}\sqrt{\frac{\omega_\sigma}{\omega_{\sigma'}}}\left\{\hat{a}_\sigma^\dagger\hat{a}_{\sigma'}\int \boldsymbol{r}\times[\boldsymbol{A}_\sigma^*\times(\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{A}_{\sigma'})]\mathrm{d}\tau\right.$$

$$+\hat{a}_\sigma\hat{a}_{\sigma'}^\dagger\int \boldsymbol{r}\times[\boldsymbol{A}_\sigma\times(\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{A}_{\sigma'}^*)]\mathrm{d}\tau-\hat{a}_\sigma\hat{a}_{\sigma'}\int \boldsymbol{r}\times[\boldsymbol{A}_\sigma\times(\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{A}_{\sigma'})]\mathrm{d}\tau$$

$$\left.-\hat{a}_\sigma^\dagger\hat{a}_{\sigma'}^\dagger\int \boldsymbol{r}\times[\boldsymbol{A}_\sigma^*\times(\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{A}_{\sigma'}^*)]\mathrm{d}\tau\right\}. \tag{3.66}$$

$\boldsymbol{A}_\sigma$ 与 $\boldsymbol{A}_{\sigma'}$ 分别为具波矢量 $\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{k}'$ 的平面波，此式花括号内前两项积分结果含因子 $\nabla_k\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$，$\nabla_k$ 为 $\boldsymbol{k}$ 空间中的梯度算符；后两项积分结果含因子 $\nabla\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')$．这些因子只当 $\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}$ 或 $\boldsymbol{k}'=-\boldsymbol{k}$ 时不为零，这使因子 $\sqrt{\frac{\omega_\sigma}{\omega_{\sigma'}}}=1$．直接计算得

$$\int \boldsymbol{r}\times[\boldsymbol{A}_\sigma\times(\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{A}_{\sigma'})]\mathrm{d}\tau=\int(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{k}')(\boldsymbol{A}_{\sigma'}\cdot\boldsymbol{A}_\sigma)\mathrm{d}\tau-\int(\boldsymbol{A}_\sigma\cdot\boldsymbol{k}')(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{A}_{\sigma'})\mathrm{d}\tau$$

$$=\int[\boldsymbol{r}\times(-\mathrm{i}\nabla\boldsymbol{A}_{\sigma'})]\cdot\boldsymbol{A}_\sigma\mathrm{d}\tau+\mathrm{i}\int(\boldsymbol{A}_\sigma\cdot\nabla)(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{A}_{\sigma'})\mathrm{d}\tau-\mathrm{i}\int\boldsymbol{A}_\sigma\cdot(\nabla\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{A}_{\sigma'}\mathrm{d}\tau$$

$$=\int\boldsymbol{r}\times(-\mathrm{i}\nabla\boldsymbol{A}_{\sigma'})\cdot\boldsymbol{A}_\sigma\mathrm{d}\tau-\mathrm{i}\int\boldsymbol{A}_\sigma\cdot\mathrm{I}\times\boldsymbol{A}_{\sigma'}\mathrm{d}\tau$$

$$=\int\boldsymbol{r}\times(-\mathrm{i}\nabla\boldsymbol{A}_{\sigma'})\cdot\boldsymbol{A}_\sigma\mathrm{d}\tau+\mathrm{i}\int(\mathrm{I}\times\boldsymbol{A}_{\sigma'})\cdot\boldsymbol{A}_\sigma\mathrm{d}\tau\ . \tag{3.67}$$

在第三等号处对第二个积分做了分部积分，积出的部分由于无穷远处的边条件而为零，剩下的部分因 $\boldsymbol{A}_\sigma$ 的横波条件而为零．

$$\mathrm{I}=\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{y}_0+\boldsymbol{z}_0\boldsymbol{z}_0 \tag{3.68}$$

为二阶单位并矢，其中 $\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0$ 和 $\boldsymbol{z}_0$ 为互相垂直的单位矢量．

$$(\mathrm{I}\times\boldsymbol{A}_{\sigma'})\cdot\boldsymbol{A}_\sigma=\boldsymbol{A}_\sigma\cdot(\boldsymbol{x}_0\times\boldsymbol{A}_{\sigma'})\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{A}_\sigma\cdot(\boldsymbol{y}_0\times\boldsymbol{A}_{\sigma'})\boldsymbol{y}_0+\boldsymbol{A}_\sigma\cdot(\boldsymbol{z}_0\times\boldsymbol{A}_{\sigma'})\boldsymbol{z}_0$$

$$=\boldsymbol{A}_{\sigma'}\times\boldsymbol{A}_\sigma=-\boldsymbol{A}_\sigma\cdot\mathrm{I}\times\boldsymbol{A}_{\sigma'} \tag{3.69}$$

对 σ 和 σ' 反对称．(3.67) 最后得到的两个积分对 σ 和 σ' 都反对称．由于消灭算符 $\hat{a}_\sigma$ 间的对易关系 (3.53),(3.66) 花括号内第三项在求和后贡献为零．同理，其中第四项求和后贡献也为零．对第一，二两项作类似处理，在第二项中交换下标 σ 和 σ' 并作分部积分得

$$\hat{J}_{场}=\sum_{\sigma,\sigma'}\frac{\hbar}{2}(\hat{a}_\sigma^\dagger\hat{a}_{\sigma'}+\hat{a}_{\sigma'}\hat{a}_\sigma^\dagger)\int[\boldsymbol{r}\times(-\mathrm{i}\nabla\boldsymbol{A}_{\sigma'})+\mathrm{i}\,\mathrm{I}\times\boldsymbol{A}_{\sigma'}]\cdot\boldsymbol{A}_\sigma^*\mathrm{d}\tau\ . \tag{3.70}$$

由对易关系 (3.53) 知

$$\frac{1}{2}(\hat{a}_\sigma^\dagger\hat{a}_{\sigma'}+\hat{a}_{\sigma'}\hat{a}_\sigma^\dagger)=\hat{a}_\sigma^\dagger\hat{a}_{\sigma'}+\frac{1}{2}\delta_{\sigma\sigma'}\ ,$$

而

$$\sum_{\sigma,\sigma'}\delta_{\sigma\sigma'}\int[\boldsymbol{r}\times(-\mathrm{i}\nabla\boldsymbol{A}_{\sigma'})+\mathrm{i}\,\mathrm{I}\times\boldsymbol{A}_{\sigma'}]\cdot\boldsymbol{A}_\sigma^*\mathrm{d}\tau$$

$$=\sum_\sigma\int[\boldsymbol{r}\times(-\mathrm{i}\nabla\boldsymbol{A}_\sigma)+\mathrm{i}\,\mathrm{I}\times\boldsymbol{A}_\sigma]\cdot\boldsymbol{A}_\sigma^*\mathrm{d}\tau$$

为一个矢量在各方向取值之和，在各向同性的空间中这种和为零．于是

$$\hat{J}_{场}=\sum_{\sigma,\sigma'}\hat{a}_\sigma^\dagger\hat{a}_{\sigma'}\hbar\int[\boldsymbol{r}\times(-\mathrm{i}\nabla\boldsymbol{A}_{\sigma'})+\mathrm{i}\,\mathrm{I}\times\boldsymbol{A}_{\sigma'}]\cdot\boldsymbol{A}_\sigma^*\mathrm{d}\tau. \tag{3.71}$$

此式表明，电磁场的角动量可分为两部分．其中与 $\boldsymbol{r}\times(-\mathrm{i}\nabla)$ 有关的一部分可解释为由光子的轨道角动量组成，而与 $\mathrm{i}\mathrm{I}\times$ 有关的一部分则可解释为由光子的自旋组成．定义单光子的轨道角动量算符

$$\hat{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{r}\times(-\mathrm{i}\hbar\nabla), \tag{3.72}$$

自旋算符

$$\hat{\boldsymbol{S}}=\hat{S}_x\boldsymbol{x}_0+\hat{S}_y\boldsymbol{y}_0+\hat{S}_z\boldsymbol{z}_0\ , \tag{3.73}$$

$$\hat{S}_x=\mathrm{i}\hbar\boldsymbol{x}_0\times,\qquad\hat{S}_y=\mathrm{i}\hbar\boldsymbol{y}_0\times,\qquad\hat{S}_z=\mathrm{i}\hbar\boldsymbol{z}_0\times\ , \tag{3.74}$$

和总角动量算符

$$\hat{J}=\hat{L}+\hat{S} \quad (3.75)$$

它们都作用在单光子'波函数'$A_\sigma(r)$上。(3.71)可表为

$$\hat{J}_{场}=\sum_{\sigma,\sigma'}\hat{a}_\sigma^\dagger(J)_{\sigma\sigma'}\hat{a}_{\sigma'} \quad (3.76)$$

$(J)_{\sigma\sigma'}$为单光子角动量在光子态σ和σ'间的矩阵元．它的第K分量为

$$(J_K)_{\sigma\sigma'}=\int A_\sigma^*\cdot\hat{J}_K A_{\sigma'}\mathrm{d}\tau \ . \quad (3.77)$$

简单的向量运算即可验证(3.73)和(3.74)定义的算符$\hat{S}$满足角动量的对易关系：

$$[\hat{S}_x,\hat{S}_y]=\hat{S}_z, \quad [\hat{S}_y,\hat{S}_z]=\hat{S}_x, \quad [\hat{S}_z,\hat{S}_x]=\hat{S}_y, \quad (3.78)$$

且

$$\hat{S}^2\equiv\hat{S}_x^2+\hat{S}_y^2+\hat{S}_z^2=2\hbar^2=1(1+1)\hbar^2, \quad (3.79)$$

因此光子的自旋为1.

用ξ表示$\hat{S}_z$的本征值为$\mu\hbar$的本征矢，由(3.74)中$\hat{S}_z$的表达式可验证

$$\xi_0=z_0, \quad \xi_{\pm1}=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}(x_0\pm iy_0) \ . \quad (3.80)$$

这是一组正交归一矢量：

$$\xi_\mu^*\cdot\xi_{\mu'}=\delta_{\mu\mu'}, \quad (3.81)$$

任何矢量可用它们展开．例如

$$\hat{L}=\sum_{\mu=-1}^{1}(-1)^\mu L_\mu\xi_{-\mu}, \quad (3.82)$$

其中

$$\hat{L}_0=\hat{L}_z, \quad \hat{L}_{\pm1}=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{L}_x\pm i\hat{L}_y) \ . \quad (3.83)$$

将它们作用在球谐函数$Y_{LM}(\theta,\varphi)$上得

$$\hat{L}_\mu\hat{Y}_{LM}(\theta,\varphi)=(-1)^\mu\sqrt{L(L+1)}\,\hbar C^{L\ M}_{L\ M+\mu\ 1\ -\mu}Y_{L\ M+\mu}(\theta,\varphi), \quad (3.84)$$

其中的CG系数见表3-1.此式可用来建立光子总角动量的本征函

表3-1 CG系数$C^{J\ M}_{L\ M-\mu\ 1\ \mu}$

J \ μ	1	0	-1
$L+1$	$\sqrt{\frac{(L+M)(L+M+1)}{(2L+1)(2L+2)}}$	$\sqrt{\frac{(L-M+1)(L+M+1)}{(2L+1)(L+1)}}$	$\sqrt{\frac{(L-M)(L-M+1)}{(2L+1)(2L+2)}}$
L	$-\sqrt{\frac{(L+M)(L-M+1)}{2L(L+1)}}$	$\frac{M}{\sqrt{L(L+1)}}$	$\sqrt{\frac{(L-M)(L+M+1)}{2L(L+1)}}$
$L-1$	$\sqrt{\frac{(L-M)(L-M+1)}{2L(2L+1)}}$	$-\sqrt{\frac{(L-M)(L+M)}{L(2L+1)}}$	$\sqrt{\frac{(L+M+1)(L+M)}{2L(2L+1)}}$

数．同时确定光子的$\hat{L}^2,\hat{J}^2$和$\hat{J}_z$,将矢量场确定为这三个量的共同本征函数

$$T_{LJM}(\theta,\varphi)=\sum_{M=-1}^{1}C^{J\ M}_{L\ M-\mu\ 1\ \mu}\ Y_{L\ M-\mu}(\theta,\varphi)\xi_\mu, \quad (3.85)$$

矢量场随θ,φ的变化就完全确定下来．L,J和M分别为$\hat{L}^2,\hat{J}^2$和$\hat{J}_z$的量子数．要进一步确定矢量场随r的变化还要确定光子的一个动力学变量，这个量还必须能与$\hat{L}^2,\hat{J}^2$和$\hat{J}_z$同时确定．光子的能量$\hbar\omega$就是这种量．具有一定频率ω的波满足波方程

$$\nabla^2A+k^2A=0, \quad (3.86)$$

$k=\frac{\omega}{c}$．此式可当作$-\nabla^2$的本征方程．算符$-\nabla^2$与$\hat{L}^2,\hat{J}^2$和$\hat{J}_z$的共同本征函数为

$$A_{kLJM}(r,\theta,\varphi)=j_L(kr)T_{LJM}(\theta,\varphi), \quad (3.87)$$

$j_L(kr)$为kr的L阶球贝塞耳函数．作为库仑规范的矢势，必须满足横波条件(3.17)．由(3.84)知

$$T_{JJM}(\theta,\varphi)=\sum_{\mu=-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{J(J+1)}\hbar}(-1)^\mu\hat{L}_{-\mu}Y_{JM}(\theta,\varphi)\xi_\mu$$

$$=\frac{1}{\sqrt{J(J+1)}\hbar}\hat{L}Y_{JM}(\theta,\varphi). \quad (3.88)$$

乘上径向因子后得

$$A_{kJJM}(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{J(J+1)}\,\hbar}\,\hat{L}\mathrm{j}_J(kr)\mathrm{Y}_{JM}(\theta,\varphi)\ . \tag{3.89}$$

可将 $\mathrm{j}_J(kr)$ 写在 $\hat{L}$ 的右方是因轨道角动量算符不含对径向函数的运算．由

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{r}\times\nabla)=-\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{r})=-(\nabla\times\nabla)\cdot\boldsymbol{r}=0$$

立得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}_{kJJM}(r,\theta,\varphi)=0\ . \tag{3.90}$$

$\boldsymbol{A}_{kJJM}(\boldsymbol{r})$ 可表示库仑规范中的矢势．它还有一定宇称 $(-1)^{J+1}$，其中 $(-1)^J$ 来自轨道角动量的本征函数 $\mathrm{Y}_{JM-\mu}(\theta,\varphi)$，另外 $(-1)^1$ 来自偏振矢量 ξ_μ，它在空间反演变换下反向．具有一定频率 $\omega=kc$，一定角动量 J,M，和一定宇称 $(-1)^{J+1}$，并满足横波条件(3.17)的矢量场(3.89)称为磁 2^J 极场，特别记为

$$\boldsymbol{A}^{(m)}_{JM}(k\boldsymbol{r})=\frac{1}{\sqrt{J(J+1)}\,\hbar}\,\hat{L}\mathrm{j}_J(kr)\mathrm{Y}_{JM}(\theta,\varphi)\ . \tag{3.91}$$

旋度算符

$$\nabla\times=\frac{\partial}{\partial x}\,\boldsymbol{x}_0\times+\frac{\partial}{\partial y}\,\boldsymbol{y}_0\times+\frac{\partial}{\partial z}\,\boldsymbol{z}_0\times=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\,\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\nabla \tag{3.92}$$

为标量，它作用在 $\hat{J}^2$ 和 $\hat{J}_z$ 的本征态上仍得到它们的本征态，且本征值不变．在空间反演变换下 ∇ 改号，旋度算符本身具负宇称．它作用在宇称的本征态上仍得到宇称的本征态，但宇称要反号．可见

$$\boldsymbol{A}^{(e)}_{JM}(k\boldsymbol{r})\equiv-\frac{\mathrm{i}}{k}\,\nabla\times\boldsymbol{A}^{(m)}_{JM}(k\boldsymbol{r}) \tag{3.93}$$

为 $\hat{J}^2$ 和 $\hat{J}_z$ 的本征函数，量子数分别为 J 和 M，同时也是宇称的本征函数，宇称为 $(-1)^J$．由于微分运算的可交换性，这个函数还满足波方程(3.86)，因而可表示具频率 $\omega=kc$ 的波场．又由于旋度的散度恒为零，它还满足横波条件(3.17)．这种场称为电 2^J 极场，(3.93)左边的符号表达了这一含义．求出(3.93)右边的旋度[①]，由贝塞耳函数与球谐函数的递推关系得

① 参见附录 I.

$$\boldsymbol{A}^{(e)}_{JM}(k\boldsymbol{r})=\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}}\,\mathrm{j}_{J-1}(kr)\mathbf{T}_{J-1\,J\,M}(\theta,\varphi)-\sqrt{\frac{J}{2J+1}}\,\mathrm{j}_{J+1}(kr)\mathbf{T}_{J+1\,J\,M}(\theta,\varphi)\ . \tag{3.94}$$

此外可定义

$$\boldsymbol{A}^{(l)}_{JM}(k\boldsymbol{r})\equiv\frac{1}{k}\,\nabla(\mathrm{j}_J(kr)\mathrm{Y}_{JM}(\theta,\varphi))\ . \tag{3.95}$$

由于梯度的旋度为零，这是一个无旋场：

$$\nabla\times\boldsymbol{A}^{(l)}_{JM}(k\boldsymbol{r})=0\ . \tag{3.96}$$

将无旋条件加在一波矢量为 $\boldsymbol{k}$ 偏振为 $\boldsymbol{u}$ 的平面波上得

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u}=0\ , \tag{3.97}$$

即要求偏振方向与传播方向平行．可见无旋条件即纵波条件．(3.95)为纵场，不能用来表示库仑规范中的矢势．做出(3.95)右边的梯度[①]，由贝塞耳函数和球谐函数的递推关系得

$$\boldsymbol{A}^{(l)}_{JM}(k\boldsymbol{r})=\sqrt{\frac{J}{2J+1}}\,\mathrm{j}_{J-1}(kr)\mathbf{T}_{J-1JM}(\theta,\varphi)+\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}}\,\mathrm{j}_{J+1}(kr)\mathbf{T}_{J+1JM}(\theta,\varphi). \tag{3.98}$$

这个函数是 $\hat{J}^2$ 和 $\hat{J}_z$ 的本征函数，量子数分别为 J 和 M，也是宇称的本征函数，宇称为 $(-1)^J$．它还满足波方程(3.86)．这种场称为纵 2^J 极场，(3.95)左边的符号表达了这一含义．函数(3.87)的集合是一完备函数系，任何矢量函数可用它展开．将这函数系重新组合，成为磁 2^J 极场，电 2^J 极场和纵 2^J 极场，统称多极场．它们合起来组成完备函数系，其中前二者为横场，后者为纵场．如将矢量场限定为横场，像库仑规范中的矢势那样，则完备函数系中将只含电多极场和磁多极场．

3.3　平面波的多极展开与 γ 跃迁的多极分类

沿 z 方向传播的平面波可展开为

① 参见附录 I．

$$\xi_\mu e^{ikz}=\sum_{L=0}^{\infty} i^L\sqrt{4\pi(2L+1)}\ j_L(kr)Y_{L0}(\theta,\varphi)\xi_\mu$$
$$=\sum_{L=0}^{\infty} i^L\sqrt{4\pi(2L+1)}\ j_L(kr)\sum_{J=L-1}^{L+1}C^{J\mu}_{L0\,1\mu}\,T_{LJ\mu}(\theta,\varphi)\ .$$

对横波$\mu=\pm1$,从表 4 中查出 CG 系数,再由(3.91)、(3.88)和(3.94)知

$$\xi_\mu e^{ikz}=\sum_{J=1}^{\infty} i^{J-1}\sqrt{2\pi(2J+1)}\ [\boldsymbol{A}^{(e)}_{J\mu}(k\boldsymbol{r})-i\mu\boldsymbol{A}^{(m)}_{J\mu}(k\boldsymbol{r})]\ . \tag{3.99}$$

将这平面波在三维空间中作一转动Ω,即可得具任意波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的平面横波的多极展开．Ω可用平面波的本体坐标架$(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$相对于空间固定坐标架$(x_0,y_0,z_0)$的三个欧勒角表示．这一转动将球谐函数$Y_{LM}(\theta,\varphi)$变为

$$Y_{LM}(\theta',\varphi')=\sum_{M'=-L}^{L} D^L_{M'M}(\Omega)Y_{LM'}(\theta,\varphi)\ , \tag{3.100}$$

其中θ',φ'为相对本体坐标架的球坐标,$D^L_{M'M}(\Omega)$为转动函数．于是,对$\mu=\pm1$

$$\boldsymbol{u}_\mu e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=\sum_{J=1}^{\infty}\sum_{M=-J}^{J} i^{J-1}\sqrt{2\pi(2J+1)}\ D^J_{M\mu}(\Omega)[\boldsymbol{A}^{(e)}_{JM}(k\boldsymbol{r})-i\mu\boldsymbol{A}^{(m)}_{JM}(k\boldsymbol{r})]\ . \tag{3.101}$$

考虑一带电粒子系与电磁场组成的系统,它的哈密顿量为(3.27)表示的H_1与带电粒子自身的只含非电磁作用的哈密顿量H_2之和．将(3.27)中的末项,即库仑作用项与H_2合并,量子化后整个系统的哈密顿量算符为

$$\left.\begin{aligned}\hat{H}&=\hat{H}^0+\hat{H}'\ ,\\ \hat{H}^0&=\hat{H}^0_1+\hat{H}^0_2\ ,\end{aligned}\right\} \tag{3.102}$$

$$\hat{H}^0_2=\hat{H}_2+\frac{1}{8\pi}\int\frac{\hat{\rho}(\boldsymbol{r},t)\hat{\rho}(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,d\tau d\tau'\ , \tag{3.103}$$

$$\hat{H}'=-\int\hat{\boldsymbol{j}}\cdot\hat{\boldsymbol{A}}d\tau\ , \tag{3.104}$$

$\hat{H}^0_1$由(3.56)表示．$\hat{H}^0_1$的本征值问题已解出,设$\hat{H}^0_2$的本征值问题也已

解出,$\hat{H}^0$的本征值问题也就已解出:$\hat{H}^0$的本征值为$\hat{H}^0_1$与$\hat{H}^0_2$的本征值之和,$\hat{H}^0$的本征态为$\hat{H}^0_1$与$\hat{H}^0_2$的本征态的直积．带电粒子系发射和吸收光子的过程即为$\hat{H}'$引起的$\hat{H}^0$的本征态间的跃迁．电磁作用属微扰,它引起的跃迁可用微扰法求解．设起始时带电粒子系处于态$|i\rangle$,能量为E_i;电磁场处于真空态$|0\rangle$,能量为零点能E_0.整个系统的始态为$|0\rangle|i\rangle$,能量为E_i+E_0．在$\hat{H}'$作用下带电粒子跃迁到态$|f\rangle$,能量变为E_f;电磁场产生一个σ态光子,变为态$|1_\sigma\rangle$,能量变为$E_0+\hbar\omega$.整个系统的末态为$|1_\sigma\rangle|f\rangle$,能量为$E_f+E_0+\hbar\omega$.这里按上节定义,用$\sigma$表示单光子态,亦即电磁波的一种模式,它包括偏振$\boldsymbol{u}_\mu$,波矢量$\boldsymbol{k}$和它的一个小范围$d^3k$.圆频率$\omega=kc$也由$\sigma$表征．单位时间内发生上述跃迁的几率为

$$dP_{i\to f}=\frac{2\pi}{\hbar}\ |\langle f|\langle 1_\sigma|\hat{H}'|0\rangle|i\rangle|^2\delta(E_f+\hbar\omega-E_i)$$
$$=\begin{cases}\dfrac{\omega}{8\pi^2kc^3}\ |\langle f|\hat{B}^\dagger|i\rangle|^2 d\Omega\ , & \text{如 } \omega=\dfrac{E_i-E_f}{\hbar}\ ,\\ 0\ , & \text{否则},\end{cases} \tag{3.105}$$

其中$d\Omega$为d^3k张的立体角元:$d^3k=k^2dkd\Omega$,

$$\hat{B}^\dagger=-\int(\boldsymbol{u}_\mu e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})^*\cdot\hat{\boldsymbol{j}}d\tau \tag{3.106}$$

为作用在带电粒子系态矢量上的算符．(3.105)的第二个等号处用了(3.104),(3.62),(3.60),(3.43)和δ函数的性质．由$\hat{\boldsymbol{j}}$的厄米性和平面波的多极展开式(3.101)得

$$\hat{B}=-\int\hat{\boldsymbol{j}}\cdot\boldsymbol{u}_\mu e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d\tau$$
$$=-e\sum_{J=1}^{\infty}\sum_{M=-J}^{J} i^{J-1}\sqrt{2\pi(2J+1)}\ D^J_{M\mu}(\Omega)\Big[B^{(e)}_{JM}(k)-i\mu B^{(m)}_{JM}(k)\Big]\ , \tag{3.107}$$

其中

$$B^{(e)}_{JM}(k)\equiv\frac{1}{e}\int\hat{\boldsymbol{j}}\cdot\boldsymbol{A}^{(e)}_{JM}(k\boldsymbol{r})d\tau\quad 与\quad B^{(m)}_{JM}(k)\equiv\frac{1}{e}\int\hat{\boldsymbol{j}}\cdot\boldsymbol{A}^{(m)}_{JM}(k\boldsymbol{r})d\tau \tag{3.108}$$

分别为带电粒子系的动态电 2^J 极矩与动态磁 2^J 极矩算符．将(3.107)代入(3.105)，在 $\omega=\frac{E_i-E_f}{\hbar}$ 的条件下得

$$
\mathrm{d}P_{i\to f}=\frac{\omega\alpha}{2\pi c^2}\left|\sum_{J=1}^{\infty}\sum_{M=-J}^{J}\mathrm{i}^{1-J}\sqrt{2\pi(2J+1)}\ \mathrm{D}^J_{M\mu}(\Omega)^*\right.
$$
$$
\times\left[\langle f|\hat{B}^{(e)}_{JM}(k)^{\dagger}|i\rangle+\mathrm{i}\mu\langle f|\hat{B}^{(m)}_{JM}(k)|i\rangle\right]\Bigg|^2\mathrm{d}\Omega\ , \qquad (3.109)
$$

其中 $\alpha=\frac{e^2}{4\pi\hbar c}=\frac{1}{137.0}$ 为精细结构常数，表征电磁作用的强弱．按(3.14) $\hat{j}=e\Psi^{\dagger}\alpha\Psi$，代入(3.108)，由二次量子化理论关于场量与粒子量的关系知

$$
\hat{B}^{(e)}_{JM}(k)=\sum_{l}\alpha_{l}\cdot A^{(e)}_{JM}(kr_{l}),\quad \hat{B}^{(m)}_{JM}(k)=\sum_{l}\alpha_{l}\cdot A^{(m)}_{JM}(kr_{l}), \qquad (3.110)
$$

其中 l 为带电粒子标号，求和对带电粒子进行．作为角动量的本征函数，电与磁 2^J 极场 $A^{(e)}_{JM}$ 与 $A^{(m)}_{JM}$ 各自组成 J 阶不可约张量，宇称分别为 $(-1)^J$ 与 $(-1)^{J+1}$．它们与矢量 α 的标量积只是在多极场的表达式中用一阶不可约张量

$$
\alpha_{\pm}\equiv\mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_x\pm\mathrm{i}\alpha_y),\qquad \alpha_0\equiv\alpha_z \qquad (3.111)
$$

代替一阶不可约张量 ξ_{μ}．这种替代不改变该量在空间转动和反演下的变换性质．可见电与磁 2^J 极矩 $\hat{B}^{(e)}_{JM}$ 与 $\hat{B}^{(m)}_{JM}$ 也各自组成 J 阶不可约张量，宇称也分别为 $(-1)^J$ 与 $(-1)^{J+1}$．用 I_i,M_i 和 Π_i 分别表带电粒子始态角动量，角动量投影和宇称量子数；I_f,M_f 和 Π_f 表末态相应量子数．由于因子 $C^{I_iM_i}_{I_fM_f JM}$，电与磁 2^J 极矩矩阵元不为零的条件均为

$$
\left.\begin{aligned}\Delta I\equiv I_f-I_i=0,\pm1,\cdots,\pm J,\\ \Delta M\equiv M_f-M_i=0,\pm1,\cdots,\pm J.\end{aligned}\right\} \qquad (3.112)
$$

宇称的选择定则对电 2^J 极矩为

$$
\frac{\Pi_f}{\Pi_i}=(-1)^J\ , \qquad (3.113)
$$

对磁 2^J 极矩为

$$
\frac{\Pi_f}{\Pi_i}=(-1)^{J+1}\ . \qquad (3.114)
$$

(3.109)把原子核的 γ 跃迁分解成各种多极矩贡献之和，称为各种多极跃迁。(3.112)与(3.113)为电 2^J 极跃迁的选择定则，而(3.112)与(3.114)则为磁 2^J 极跃迁的选择定则．实际的角动量选择定则比(3.112)细致．为使 $C^{I_iM_i}_{I_fM_f JM}$ 不为零还必须

$$
I_i+I_f\geqslant J\ . \qquad (3.115)
$$

由于横波 $J\geqslant1$，$I_i=I_f=0$ 的 γ 跃迁不可能．这就叫 0-0 跃迁不可能．当然 0-0 跃迁只是对发射或吸收一个光子的过程不可能，对其他一些过程还是可能的．

电流密度矢量 $\hat{j}$ 在带电粒子系两态间的矩阵元只在带电粒子系占据的空间中不为零．用 R 表示带电粒子系中心到边缘的最大距离，$\hat{j}$ 的矩阵元就只在 $r<R$ 处显著不为零．另一方面，多极场与 r 的关系表现为(3.94)与(3.91)右边球贝塞耳函数与其自变量 kr 的关系．球贝塞耳函数为幂级数，其中最低幂等于函数的阶．电 2^J 极场 kr 的最低幂为 $J-1$ 次，磁 2^J 极场 kr 的最低幂为 J 次．原子核的尺度 R 为若干fm，γ 光子的能量则在 1MeV左右，由此估得 kR 为 10^{-2} 量级，为小量．可见各多极跃迁的跃迁矩阵元在数量级上明显分开：以电偶极跃矩阵元的数量级为 1，磁偶极与电四极跃迁矩阵元的数量级约为 10^{-2}，磁四极与电八极跃迁矩阵元的数量级约为 10^{-4}，… 如此等等．总之，磁 2^J 极跃迁矩阵元与电 2^{J+1} 极跃迁矩阵元同量级，而同类多极跃迁中 2^{J+1} 极跃迁矩阵元比 2^J 极跃迁矩阵元约小两个量级．在满足电偶极跃迁选择定则

$$
\Delta I=0,\pm1,\ \Delta M=0,\pm1,\quad I_i+I_f\geqslant1,\quad \frac{\Pi_i}{\Pi_f}=-1, \qquad (3.116)
$$

且没有其他禁戒电偶极跃迁的选择定则，电偶极跃迁矩阵元不致为零的情况下，将观察到电偶极跃迁，其他多极跃迁的贡献均被掩盖．如电偶极跃迁的选择定则未能满足，则应考虑磁偶极跃迁和电

四极跃迁的可能性。磁偶极跃迁的选择定则为

$$\Delta I=0,\pm 1,\ \Delta M=0,\pm 1,\ I_i+I_f\geqslant 1,\ \frac{\Pi_i}{\Pi_f}=1\ ; \tag{3.117}$$

电四极跃迁的选择定则为

$$\Delta I=0,\pm 1,\pm 2,\ \Delta M=0,\pm 1,\pm 2,\ I_i+I_f\geqslant 2,\ \frac{\Pi_i}{\Pi_f}=1. \tag{3.118}$$

这两套选择定则部分重叠．如同时满足(3.117)与(3.118)且没有其他选择定则禁戒这两种跃迁，将观察到这两种跃迁和它们之间的干涉，其他更多极的跃迁均被掩盖．不过由于它们的跃迁矩阵元比电偶极跃迁矩阵元小两个量级，跃迁几率将小四个量级，寿命将长四个量级．如电偶极，磁偶极与电四极跃迁的选择定则都未能满足，则可考虑磁四极与电八极跃迁．磁四极跃迁的选择定则为

$$\Delta I=0,\pm 1,\pm 2,\ \Delta M=0,\pm 1,\pm 2,\ I_i+I_f\geqslant 2,\ \frac{\Pi_i}{\Pi_f}=-1\ ; \tag{3.119}$$

电八极跃迁的选择定则为

$$\left.\begin{aligned}\Delta I=0,\pm 1,\pm 2\pm 3,\ \Delta M=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\\ I_i+I_f\geqslant 3,\ \frac{\Pi_i}{\Pi_f}=-1\quad .\end{aligned}\right\} \tag{3.120}$$

这两组选择定则都部分与电偶极跃迁的选择定则重叠．如这重叠的部分被满足就可能发生电偶极跃迁；虽可能同时发生磁四极与电八极跃迁，但由于跃迁矩阵元数量级相差悬殊都会被掩盖而实际无法观察到．只当(3.119)与(3.120)中与(3.116)不重叠的部分被满足而(3.116)不被满足时才能观察到磁四极跃迁，电八极跃迁，或同时观察到二者，以及它们之间的干涉．只是这时跃迁几率将再小四个量级，γ 衰变的寿命也将再长四个量级．其他更多极的跃迁也都被掩盖．除这类低极跃迁被禁戒，高极跃迁被掩盖因而只表现出一种或两种多极跃迁的情形外，也可能出现低极与高极跃迁均被禁戒因而实际只发生一种或少数几种多极跃迁的情形．例如，若 $I_i+I_f=1$ 则只可能发生偶极跃迁，而宇称选择定则使只有电偶极跃迁或只有磁偶极跃迁可能发生，其余跃迁一律被禁戒．又如，若 $\Delta I=2, I_i+I_f=2$，则只可能发生四极跃迁，宇称选择定则将决定究竟是电四极跃迁还是磁四极跃迁能发生．再如 $\Delta I=0, \Pi_f=\Pi_i, I_i+I_f=2$，则可能发生电四极跃迁与磁偶极跃迁，其余跃迁一律被禁戒．这类单纯的或简单的多极跃迁的出现不依赖 kR 取值的大小．

3.4　γ射线的角分布与角关联，总跃迁几率

按维格纳(Wigner 1931)－艾卡(Eckart 1930)定理[①]，电、磁多极矩算符(3.108)作为不可约张量在原子核的始态 $|i\rangle=|I_iM_ia_i\rangle$ 和末态 $|f\rangle=|I_fM_fa_f\rangle$ 间的矩阵元

$$\langle I_iM_ia_i|B_{JM}^{(\sigma)}(k)|I_fM_fa_f\rangle=(I_ia_i|B_J^{(\sigma)}(k)|I_fa_f)C_{J\ M\ I_f\ M_f}^{I_i\ M_i}, \tag{3.121}$$

其中 a_i 和 a_f 分别为始态和末态的除角动量外的量子数，$\sigma=\mathrm{e}$ 或 m 分别表示电或磁多极矩．(3.121)右边第一个因子为约化矩阵元，与 M_i、M 和 M_f 均无关．这三个投影量子数完全包含在随后的 CG 系数因子中．将此式取厄米伴随后代入(3.109)，由于选择定则 $M=M_i-M_f$，式中对 M 的求和可以取消．将各多极跃迁振幅对 J 求和后取绝对值平方，会出现许多干涉项．不过由于各多极跃迁振幅数量级相差悬殊，大部分干涉项表现不出来．表现出来的只有选择定则允许的最低多极跃迁．或者是一种单纯的多极跃迁，或者是相邻电多极与磁多极跃迁的简单组合，因而会有简单的角分布．如果始态核未极化，M_i 的各种取值都同样可能，就要将跃迁几率对 M_i 作等权重平均．如果不测末态核的极化，不问 M_f 的取值，就要将跃迁几率对 M_f 求和．由(3.121)知，为此可先做求和

$$\begin{aligned}\sum_{M_f}C_{J\ M\ I_f\ M_f}^{I_i\ M+M_f}\ C_{J'\ M\ I_f\ M_f}^{I_i\ M+M_f}&=\frac{2I_i+1}{\sqrt{(2J+1)(2J'+1)}}\\ \times\sum_{M_f}C_{I_i\ -M-M_f\ I_f\ M_f}^{J\ -M}\ C_{I_i\ -M-M_f\ I_f\ M_f}^{J'\ -M}&=\frac{2I_i+1}{2J+1}\delta_{JJ'}\quad ,\end{aligned} \tag{3.122}$$

① 参阅张启仁，《量子力学》，§8.4，高等教育出版社，1989.

然后再对M求和．在对M求和前先对J'求和，因子$\delta_{JJ'}$使这一求和简化为用J代替J'．于是对M的求和简化为

$$\sum_{M} \mathrm{D}^{J}_{M\mu}(\Omega)^{*}\,\mathrm{D}^{J}_{M\mu}(\Omega)=1 \ , \tag{3.123}$$

这是因为$(\mathrm{D}^{J}_{M\mu})$为一幺正矩阵，表示以z轴为极轴的角动量本征态与以k为极轴的角动量本征态间的幺正变换．最后，由于极数相同的电多极跃迁和磁多极跃迁有相反的宇称选择定则，在有一定宇称的核态间跃迁时只有一种有非零贡献．于是

$$\frac{1}{2I_i+1}\sum_{M_i,M_f}\mathrm{d}P_{i\to f}=\frac{\omega\alpha}{c^2}\sum_{J=1}^{\infty}\sum_{\sigma=\mathrm{e,m}}|(I_i a_i|B_J^{(\sigma)}(k)|I_f a_f)|^2\mathrm{d}\Omega \ , \tag{3.124}$$

它表明未极化的核发出的γ射线即使在选定偏振态的条件下也是各向同性的．将此式对偏振μ求和并对发射方向积分，得非极化核态的γ跃迁总几率

$$P_{i\to f}=\frac{1}{2I_i+1}\sum_{M_i,M_f}\sum_{\mu=\pm1}\int\mathrm{d}P_{i\to f}$$
$$=\frac{8\pi\omega\alpha}{c^2}\sum_{J=1}^{\infty}\sum_{\sigma=\mathrm{e,m}}\left|(I_i a_i|B_J^{(\sigma)}(k)\,|I_f a_f)\right|^2 . \tag{3.125}$$

这是一个完整的表达式．然而由于各多极跃迁几率数量级相差悬殊，只有选择定则允许的极数最低的一项或两项多极跃迁才有实际有意义的贡献．

如果始态核是极化的，有完全确定的量子数M_i，又若选择定则允许的最低多极跃迁只有一种，即有显著贡献的是一种单纯的2^J极跃迁，则γ射线有完全确定的角分布

$$W(\theta)=\sum_{M_f}\sum_{\mu=\pm1}\left|\mathrm{C}^{I_i\ \ M_i}_{J\,M_i-M_f\,I_f\,M_f}\,\mathrm{D}^{J}_{M_i-M_f\ \mu}(\Omega)\right|^2 . \tag{3.126}$$

由于只有一个极化方向是特殊方向，发射几率只与发射方向与极化方向的交角θ有关．这表现在转动函数$\mathrm{D}^{J}_{M\mu}(\Omega)$在取绝对值后只与欧勒角$\Omega$中的一个方位角$\theta$有关．如果始态核只是部分极化的，即$M_i$取值并不确定，各种取值却也非同等可能，而有一几率分布b_{M_i}，

则γ射线的角分布为

$$W(\theta)=\sum_{M_i}b_{M_i}\sum_{M_f}\sum_{\mu=\pm1}\left|\mathrm{C}^{I_i\ \ M_i}_{J\,M_i-M_f\,I_f\,M_f}\,\mathrm{D}^{J}_{M_i-M_f\ \mu}(\Omega)\right|^2 . \tag{3.127}$$

常用的极化核的方法是加一强磁场$\mathscr{H}$，原子核会沿磁场方向极化．设始态核的回转磁比率为g_i，磁量子数为M_i，则磁矩为$g_iM_i\mu_N$，其中$\mu_N=5.05\times10^{-27}$ J/T为核磁子的值．以磁场的方向为极轴，始态核的附加磁能为$-g_iM_i\mu_N\mathscr{H}$．在绝对温度为T的环境中始态核M_i取值的几率分布为

$$b_{M_i}=b\mathrm{e}^{\frac{g_iM_i\mu_N\mathscr{H}}{k_BT}} , \tag{3.128}$$

b为归一化常数．由于核磁子很小，只有在很强的磁场中M_i不同的核态才有显著的能量差，也只有在很低的温度下M_i不等的核态才有明显不等的几率，从而实现明显的极化．由于$g_i\Delta M_i$的量级为1，能显著极化的条件为$k_BT\approx\mu_N\mathscr{H}$．玻尔兹曼常数$k_B=1.38\times10^{-23}$ J/K，在磁场为10 T$=10^5$ Gs的情况下绝对温度应低至10^{-3} K的量级．这种低温可在短时间内做到．例如本世纪50年代吴健雄(Wu 1957)关于宇称不守恒的著名实验中就曾做到这种低温并维持达数分钟之久，以此实现了^{60}Co核的极化．在那个实验中正是用γ射线角分布的各向异性检测了低温随时间的变化．采用现代超强磁场技术，对低温的要求可以大大放松．

重离子碰撞是实现核极化的另一手段．两核擦边碰撞导致两核在反应平面内方向相反的旋转，从而导致在垂直于反应平面的方向上的极化．这样形成的极化核的γ射线角分布的实验观察结果也与理论预言很好一致．原子核还可借助发射粒子而极化．如果它再发射粒子，这第二个粒子就是从极化核发射的，因而不再各向同性．这种各向异性的极轴可取在第一个粒子发射的方向上．而第二个粒子发射的角分布就是它与第一个粒子发射方向的角关联．$\gamma-\gamma$方向角关联有成熟的理论．由于它不涉及核内的详情而只与转动的

一般性质有关，因而可靠．实验与理论相符甚好．对角关联的观察可了解核态，是确定核激发态角动量的有效手段，是核谱学的重要方法．

用 $I_i, M_i; I, M$ 和 I_f, M_f 表示核始态，中间态和末态的角动量量子数；J_1, μ_1 和 J_2, μ_2 表示第一次和第二次 γ 跃迁的多极性和光子的偏振态．由始态 i 发射第一个光子后跃迁到中间态．将这个光子的发射方向作极轴，这一过程的跃迁振幅正比于 CG 系数 $C^{I_i M_i}_{J_1 \mu_1 I M}$，比例常数与投影量子数 M_i、μ_1 和 M 均无关．在始态磁量子数 M_i 和第一个光子的偏振 μ_1 均确定的条件下，中间态磁量子数 $M = M_i - \mu_1$ 也是一定的．这就使中间态极化．由中间态再发射第二个光子后到达末态 f．如果改取第二个光子的发射方向为极轴，这个光子角动量的投影量子数可确定为 μ_2，但中间态的磁量子数将变为不确定的；如果仍以第一个光子的发射方向为极轴，中间核态磁量子数仍确定为 M，而第二个光子角动量在这个极轴上的投影量子数则不再是它的偏振 μ_2．它们之间差一个从第一个光子的发射方向到第二个光子的发射方向的转动 Ω. 第二次发射的跃迁振幅正比于

$$\sum_{M_2} C^{I M}_{J_2 M_2 I_f M_f} D^{J_2}_{M_2 \mu_2}(\Omega) = C^{I M}_{J_2 M-M_f I_f M_f} D^{J_2}_{M-M_f \mu_2}(\Omega) ,$$

比例常数也与各投影量子数无关．于是，在对始态磁量子数 M_i 平均，对末态磁量子数 M_f 以及两个光子的偏振 μ_1 与 μ_2 求和后，整个过程的几率为

$$W(\theta) \propto \sum_{M_i M_f} \sum_{\mu_1 \mu_2} \left| C^{I_i M_i}_{J_1 \mu_1 I M_i-\mu_1} C^{I M_i-\mu_1}_{J_2 M_i-\mu_1-M_f I_f M_f} D^{J_2}_{M_i-\mu_1-M_f \mu_2}(\Omega) \right|^2 \quad (3.129)$$

这是一个

$$b_M = \sum_{M_i \mu_1} \left| C^{I_i M_i}_{J_1 \mu_1 I M} \right|^2 \quad (3.130)$$

的部分极化的中间核态发射第二个光子的角分布，亦即完全不极化的始态核相继发出两个 γ 光子的角关联．(3.129) 右边的两个 CG 系数可按拉卡 (Racah) 系数的 定义和CG 系数的对称性重新组合：

$$C^{I_i M_i}_{J_1 \mu_1 I M_i-\mu_1} C^{I M_i-\mu_1}_{J_2 M_i-\mu_1-M_f I_f M_f} = \sum_J \sqrt{(2I+1)(2I_i+1)}\ (-1)^{I_f+M_f}$$
$$\times W(J_1, J_2, I_i, I_f; J, I) C^{J\ M_i-M_f}_{J_1 \mu_1 J_2 M_i-\mu_1-M_f} C^{J\ M_i-M_i}_{I_i\ -M_i\ I_f\ M_f}.$$

代入 (3.129)，取绝对值平方后求和中利用 CG 系数的正交归一性得

$$W(\theta) \propto \sum_{J, M_2} \sum_{\mu_1, \mu_2 = \pm 1} |W(J_1, J_2, I_i, I_f; J, I) C^{J\ \mu_1+M_2}_{J_1 \mu_1 J_2 M_2} D^{J_2}_{M_2 \mu_2}(\Omega)|^2. \quad (3.131)$$

此式与实验观察很好一致．通过它与实验观察结果的比较可获得 I_i, I, J_1 和 J_2 取值的信息．

3.5 内转换与对产生，单极跃迁与 0-0 跃迁

γ 跃迁只是原子核通过电磁作用释放能量的一种方式．伴随从激发态到基态或较低激发态跃迁中内部电磁结构的变化，原子核可通过电磁场将能量交给原子中的电子，将它击出原子，这就是内转换．它还可将能量交给狄拉克海中的负能量电子，将它激发到正能量状态，产生正负电子对．这些过程可由 (3.104) 表示的 $\hat{H}'$ 引起，也可由 (3.103) 右边第二项，即库仑作用引起．库仑作用包括核内质子间的库仑作用，这已包含在原子核自身能量中；电子间的库仑作用，这已包含在原子自身能量中；核电荷与电子电荷间的作用，其对角部分也已包含在原子能量及其精细结构和超精细结构中；只有核电荷与电子电荷作用的非对角部分，即始末核态不同且始末电子态也不同的非对角元才导致内转换和对产生．库仑作用为两部分电荷间的作用，正比于电荷的平方，因而它的矩阵元正比于精细结构常数 α．跃迁几率正比于跃迁矩阵元的绝对值平方，因而正比于 α^2．库仑作用的一级微扰已是二级电磁效应．不过 α 为 10^{-2} 的量级，电磁效应级别增加导致的跃迁几率减小不及多极性增加导致的跃迁几率减小严重．$\hat{H}'$ 的作用，由于 $\hat{A}$ 中含光子的产生或消灭算符，必然引起光子的发射与吸收．要导致如内转换和对产生这类光子数不变的过程需经 $\hat{H}'$ 的二次微扰，因而也是二级电磁效应．在没有

光子的条件下 $\hat{H}'$ 的第一次微扰可以是原子核跃迁到基态或低激发态并放出一个光子，第二次微扰则由电子系将这光子吸收，将一个电子甩出原子或从负能态激发到正能态．$\hat{H}'$ 的第一次微扰也可以是放出一个光子的同时将一个电子甩出原子或从负能态激发到正能态，第二次微扰则是在原子核由激发态向下跃迁的同时吸收掉这个光子．这里要注意光子只在中间态出现，而中间态的 $\hat{H}^0$ 的本征值不必与始态或末态的 $\hat{H}^0$ 的本征值相等．这被习惯地称为中间态能量可以不守恒．这种态中出现的光子叫虚光子．跃迁中始末两态 $\hat{H}^0$ 的本征值相等被称为能量守恒．这只有在无穷长时间中才能实现．这里讲的能量守恒与不守恒都是对 $\hat{H}^0$ 的取值而不是对总能量 $\hat{H}=\hat{H}^0+\hat{H}'$ 而言的．基本意义下的能量守恒，即 $\hat{H}$ 的取值在整个过程中不变对保守系恒成立，不仅对始末态成立，对中间过程也成立．采用自然单位制，用 k 表跃迁中原子核释放的能量，也就是电子系获得的能量；用 $\boldsymbol{j}^{(N)}(\boldsymbol{r})$ 与 $\boldsymbol{j}^{(e)}(\boldsymbol{r})$ 分别表示核与电子系电流密度矢量在始末态间的矩阵元；用 $\omega'=k'$，$\boldsymbol{k}'$ 和 $\boldsymbol{u}_\mu$，$\mu=1,2$，分别表示中间态虚光子的圆频率，波矢量和两个横向线偏振单位矢量，$j_\mu^{(N)}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{j}^{(N)}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{u}_\mu$，$j_\mu^{(e)}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{j}^{(e)}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{u}_\mu$．$\hat{H}'$ 引起的核与电子系的二级电磁跃迁矩阵元为

$$\sum_{\mu=1,2}\int \mathrm{d}\tau j_\mu^{(N)}(\boldsymbol{r})\left\{\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}^3k'}{2\omega'}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}}{k-k'}+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}}{k+k'}\right]\right\}j_\mu^{(e)}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'$$

$$=\sum_{\mu=1,2}\int j_\mu^{(N)}(\boldsymbol{r})\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}}{k^2-k'^2}\mathrm{d}^3k' j_\mu^{(e)}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau'$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\sum_{\mu=1,2}\int j_\mu^{(N)}(\boldsymbol{r})\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}j_\mu^{(e)}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\tau'. \tag{3.132}$$

此式可与库仑作用对跃迁振幅的贡献合并．用 $\rho^{(N)}(\boldsymbol{r})$ 与 $\rho^{(e)}(\boldsymbol{r})$ 分别表示核与电子系的电荷密度在各自始末态间的矩阵元，库仑作用引起的核与电子系的二级电磁跃迁矩阵元为

$$\frac{1}{4\pi}\int\frac{\rho^{(N)}(\boldsymbol{r})\rho^{(e)}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau'=\int\rho^{(N)}(\boldsymbol{r})\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}}{k'^2}\mathrm{d}^3k'\rho^{(e)}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau'$$

$$=\int\rho^{(N)}(\boldsymbol{r})\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}}{k^2-k'^2}\left(\frac{k^2}{k'^2}-1\right)\mathrm{d}^3k'\rho^{(e)}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau', \tag{3.133}$$

其中 $\rho^{(N)}(\boldsymbol{r})k^2\rho^{(e)}(\boldsymbol{r}')$ 可看作

$$\dot{\hat{\rho}}^{(N)}(\boldsymbol{r})=[\hat{\rho}^{(N)}(\boldsymbol{r}),\hat{H}^0] \tag{3.134}$$

在核始末态间的矩阵元与

$$\dot{\hat{\rho}}^{(e)}(\boldsymbol{r}')=[\hat{\rho}^{(e)}(\boldsymbol{r}'),\hat{H}^0] \tag{3.135}$$

在电子系始末态间的矩阵元的乘积．由连续性方程

$$\dot{\hat{\rho}}+\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{j}}=0 \tag{3.136}$$

知

$$\rho^{(N)}(\boldsymbol{r})k^2\rho^{(e)}(\boldsymbol{r}')=[\nabla\cdot\boldsymbol{j}^{(N)}(\boldsymbol{r})][\nabla'\cdot\boldsymbol{j}^{(e)}(\boldsymbol{r}')]. \tag{3.137}$$

于是，(3.133) 中的项

$$\int\rho^{(N)}(\boldsymbol{r})\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}}{k^2-k'^2}\frac{k^2}{k'^2}\mathrm{d}^3k'\rho^{(e)}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau'$$

$$=\int[\nabla\cdot\boldsymbol{j}^{(N)}(\boldsymbol{r})]\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}}{k^2-k'^2}\frac{1}{k'^2}\mathrm{d}^3k'[\nabla'\cdot\boldsymbol{j}^{(e)}(\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau', \tag{3.138}$$

∇' 为对坐标 $\boldsymbol{r}'$ 运算的梯度．做分部积分，注意 $\boldsymbol{k}'=k'\boldsymbol{u}_3$，$\boldsymbol{u}_3$ 为纵向线偏振单位矢量，得

$$\int\rho^{(N)}(\boldsymbol{r})\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}}{k^2-k'^2}\frac{k^2}{k'^2}\mathrm{d}^3k'\rho^{(e)}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau'$$

$$=\int j_3^{(N)}(\boldsymbol{r})\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}}{k^2-k'^2}\mathrm{d}^3k' j_3^{(e)}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\mathrm{d}\tau$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\int j_3^{(N)}(\boldsymbol{r})\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}j_3^{(e)}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau', \tag{3.139}$$

其中 $j_3^{(N)}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{j}^{(N)}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{u}_3$，$j_3^{(e)}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{j}^{(e)}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{u}_3$ 为电流密度矢量的纵分量．

再由 $j_4=\mathrm{i}\rho$ 知，跃迁矩阵元 (3.132) 与 (3.133) 之和为

$$T_{fi}=-\frac{1}{4\pi}\sum_{\mu=1}^{4}\int j_\mu^{(N)}(\boldsymbol{r})\frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}j_\mu^{(e)}(\boldsymbol{r}')d\tau d\tau', \tag{3.140}$$

它不仅包含横场的贡献而且包含纵场和标场的贡献．这种过程也可理解为核与电子系交换虚光子的结果，这里“虚”不仅指能量可以不守恒而且指不一定是横波光子，它们不能在可观察的始末态中出现而只能在中间态中出现．其中纵场与标场贡献的总和，或者说纵光子与标光子贡献的总和，就是库仑作用的贡献．

(3.132) 的第二个等号表明

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{3.141}$$

是方程

$$\nabla^2\psi+k^2\psi=-\rho \tag{3.142}$$

的格林函数．即 (3.142) 的解可表为

$$\psi(\boldsymbol{r})=\int G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')d\tau'. \tag{3.143}$$

在 (3.141) 中固定 $\boldsymbol{r}'$，令 $r\to\infty$，$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 具有 $\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}$ 的渐近形式，是向外发散的波．这个格林函数因而称为发射型的．如果源 $\rho(\boldsymbol{r})$ 只在有限区域中显著非零，则用它按 (3.143) 通过格林函数 (3.141) 组成的方程 (3.142) 的解在无穷远处也是向外发散的波，也是发射型的．(3.142) 也可用分离变量的方法求解．将源作谐和展开:

$$\rho(\boldsymbol{r})=\sum_{l,m}\rho_{l,m}(r)Y_{l,m}(\theta,\varphi), \tag{3.144}$$

$$\rho_{lm}(r)=\int Y_{lm}^*(\theta,\varphi)\rho(\boldsymbol{r})d\Omega, \tag{3.145}$$

r,θ 和 φ 为 $\boldsymbol{r}$ 的球坐标．将解也作谐和展开:

$$\psi(\boldsymbol{r})=\sum_{l,m}\frac{u_{lm}(r)}{r}Y_{lm}(\theta,\varphi), \tag{3.146}$$

将此式与 (3.144) 一起代入方程 (3.142)，得径向方程

$$\frac{d^2u_{lm}}{dr^2}+\left[k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]u_{lm}=-r\rho_{lm}. \tag{3.147}$$

这个方程的齐次方程，即令它的右端为零的方程有线性独立的解

$$F_l(kr)=\sqrt{\frac{\pi kr}{2}}J_{l+\frac{1}{2}}(kr)\xrightarrow{r\to\infty}\sin(kr-\frac{l\pi}{2}), \tag{3.148}$$

$$G_l(kr)=-\sqrt{\frac{\pi kr}{2}}N_{l+\frac{1}{2}}(kr)\xrightarrow{r\to\infty}\cos(kr-\frac{l\pi}{2}), \tag{3.149}$$

其中 $J_{l+\frac{1}{2}}$ 与 $N_{l+\frac{1}{2}}$ 分别为 $l+\frac{1}{2}$ 阶的贝塞耳函数和诺依曼(Neumann)函数．由它们还可组成齐次方程的发射型解

$$U_l^{(+)}(kr)\equiv G_l(kr)+iF_l(kr)=i\sqrt{\frac{\pi kr}{2}}H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr)\xrightarrow{r\to\infty}e^{i(kr-\frac{l\pi}{2})}, \tag{3.150}$$

其中 $H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}$ 为第一类汉克尔 (Hankel) 函数．由于同满足 (3.147) 的齐次方程，F_l,G_l 和 $U_l^{(+)}$ 之间的朗斯基 (Wronski) 行列式与自变量无关，因而可由渐近形式求出

$$F_l(kr)\frac{dU_l^{(+)}(kr)}{dr}-\frac{dF_l(kr)}{dr}U_l^{(+)}(kr)$$
$$=F_l(kr)\frac{dG_l(kr)}{dr}-\frac{dF_l(kr)}{dr}G_l(kr)=-k. \tag{3.151}$$

由此可验证

$$u_{lm}(r)=\frac{1}{k}\left[U_l^{(+)}(kr)\int_0^r F_l(kr')\rho_{lm}(r')r'dr'\right.$$
$$\left.+F_l(kr)\int_r^\infty U_l^{(+)}(kr')\rho_{lm}(r')r'dr'\right] \tag{3.152}$$

是方程 (3.147) 的解．如果源 $\rho(r)$ 只在有限范围内显著不为零，此解的第二项在 r 很大处趋于零，剩下的第一项为向外发散的波．因而此解是发射型的．在 $r\to0$ 处，$F_l(kr)$ 以 r^{l+1} 的方式趋于零，$G_l(kr)$ 与 $U_l^{(+)}(kr)$ 则以 r^{-l} 的方式趋于无穷或常数．这使解 (3.152) 在 $r\to0$ 处

至少以比 r^2 快的方式趋于零，从而不会导致奇点．将它代入(3.146)后与(3.143)比较，得格林函数(3.141)的多极展开

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=k\sum_{l=0}^{\infty}\frac{F_l(kr_<)}{kr_<}\frac{U_l^{(+)}(kr_>)}{kr_>}\sum_{m=-l}^{l}\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)\mathrm{Y}_{lm}^*(\theta',\varphi'),\tag{3.153}$$

其中 $r_>$ 为 r 与 r' 中的大者，$r_<$ 为 r 与 r' 中的小者．将此式代入(3.140)得跃迁矩阵元的展开式

$$T_{fi}=-k\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sum_{\mu=1}^{4}T_\mu^{(\mathrm{N})}(lm)T_\mu^{(\mathrm{e})}(lm)\ .\tag{3.154}$$

核在原子内几乎是一个点，电子在核外运动．两者相较，核子径矢长恒应取 $r_<$，电子则应取 $r_>$．核矩阵元为

$$T_\mu^{(\mathrm{N})}(lm)=\langle a_fI_fM_f\left|\hat{T}_\mu^{(\mathrm{N})}(lm)^\dagger\right|a_iI_iM_i\rangle,\tag{3,155}$$

$$\hat{T}_\mu^{(\mathrm{N})}(lm)=\int\hat{j}_\mu^{(\mathrm{N})}(\boldsymbol{r})\frac{F_l(kr)}{kr}\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega,\tag{3.156}$$

a_i 为始态核除 I_iM_i 外的量子数，a_f 为末态核的相应量子数．电子系的矩阵元为

$$T_\mu^{(\mathrm{e})}(lm)=\langle b_fJ_f\mu_f\left|\hat{T}_\mu^{(\mathrm{e})}(lm)\right|b_iJ_i\mu_i\rangle,\tag{3.157}$$

$$\hat{T}_\mu^{(\mathrm{e})}(lm)=\int\hat{j}_\mu^{(\mathrm{e})}(\boldsymbol{r})\frac{U_l^{(+)}(kr)}{kr}\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega,\tag{3.158}$$

$J_i\mu_i$ 为始态电子系的角动量及其投影量子数，b_i 为它的其余量子数，$J_f\mu_f$ 和 b_f 为末态电子系的相应量子数．$\mu=1,2$ 和 3 对应三维矢量．将矢量场 $\hat{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{r})$ 用多极场展开：

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{r})=&\frac{2}{\pi}e\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\nu=-j}^{j}\int_0^{\infty}\Big[\hat{B}_{j\nu}^{(\mathrm{e})}(k)^\dagger\boldsymbol{A}_{j\nu}^{(\mathrm{e})}(k\boldsymbol{r})+\hat{B}_{j\nu}^{(\mathrm{m})}(k)^\dagger\boldsymbol{A}_{j\nu}^{(\mathrm{m})}(k\boldsymbol{r})\\&+\hat{B}_{j\nu}^{(\mathrm{l})}(k)^\dagger\boldsymbol{A}_{j\nu}^{(\mathrm{l})}(k\boldsymbol{r})\Big]k^2\mathrm{d}k=\frac{2}{\pi}e\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\nu=-j}^{j}\int_0^{\infty}\Big[\hat{B}_{j\nu}^{(\mathrm{e})}(k)\boldsymbol{A}_{j\nu}^{(\mathrm{e})}(k\boldsymbol{r})^*\\&+\hat{B}_{j\nu}^{(\mathrm{m})}(k)\boldsymbol{A}_{j\nu}^{(\mathrm{m})}(k\boldsymbol{r})^*+\hat{B}_{j\nu}^{(\mathrm{l})}(k)\boldsymbol{A}_{j\nu}^{(\mathrm{l})}(k\boldsymbol{r})^*\Big]k^2\mathrm{d}k\ ,\end{aligned}\tag{3.159}$$

其中 $\hat{B}_{j\nu}^{(\mathrm{e})}(k)$ 与 $\hat{B}_{j\nu}^{(\mathrm{m})}(k)$ 即为(3.108)定义的带电粒子系的电与磁 2^j 极矩，

$$\hat{B}_{j\nu}^{(\mathrm{l})}(k)=\frac{1}{e}\int\hat{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{A}_{j\nu}^{(\mathrm{l})}(k\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau\tag{3.160}$$

则为带电粒子系的动态纵 2^j 极矩．它与电或磁 2^j 极矩一样，独自组成 j 阶不可约张量．定义标 2^j 极场

$$A_{j\nu}^{(\mathrm{s})}(k\boldsymbol{r})=\frac{F_j(kr)}{kr}\mathrm{Y}_{j\nu}(\theta,\varphi)\ ,\tag{3.161}$$

流矢量第 4 分量 $\hat{j}_4(\boldsymbol{r})=\mathrm{i}\hat{\rho}(\boldsymbol{r})$ 可用它展开：

$$\begin{aligned}\hat{j}_4(\boldsymbol{r})&=\mathrm{i}\frac{2}{\pi}e\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\nu=-j}^{j}\int_0^{\infty}\hat{B}_{j\nu}^{(\mathrm{s})}(k)^\dagger A_{j\nu}^{(\mathrm{s})}(k\boldsymbol{r})k^2\mathrm{d}k\\&=\mathrm{i}\frac{2}{\pi}e\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\nu=-j}^{j}\int_0^{\infty}\hat{B}_{j\nu}^{(\mathrm{s})}(k)A_{j\nu}^{(\mathrm{s})}(k\boldsymbol{r})^*k^2\mathrm{d}k\ ,\end{aligned}\tag{3.162}$$

其中

$$\hat{B}_{j\nu}^{(\mathrm{s})}(k)=-\mathrm{i}\frac{1}{e}\int\hat{j}_4(\boldsymbol{r})A_{j\nu}^{(\mathrm{s})}(k\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau=\frac{1}{e}\int\hat{\rho}(\boldsymbol{r})A_{j\nu}^{(\mathrm{s})}(k\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau\tag{3.163}$$

为带电粒子系的动态标 2^j 极矩，也单独组成一 j 阶不可约张量．将以上结果代入(3.156)和(3.158)，将 $\mu=1,2$ 和 3 的情形转换成 $\mu=0,\pm1$ 的情形，对 $\mu=4$ 的情形单独考虑．再将结果代入(3.155)和(3.157)，用维格纳-艾卡定理得，对 $\mu=0,\pm1$

$$T_\mu^{(\mathrm{N})}(lm)=\sum_{j=l-1}^{l+1}(a_fI_f\|T^{(\mathrm{N})}(jl)^\dagger\|a_iI_i)\sum_\nu C_{j\,\nu\,I_f\,M_f}^{I_i\,M_i}C_{l\,m\,1\,\mu}^{j\,\nu}\ ,\tag{3.164}$$

$$T_\mu^{(\mathrm{e})}(lm)=\sum_{j=l-1}^{l+1}(b_fJ_f\|T^{(\mathrm{e})}(jl)\|b_iJ_i)\sum_\nu C_{J_i\,\mu_i\,j\,\nu}^{J_f\,\mu_f}C_{l\,m\,1\,\mu}^{j\,\nu}\ ,\tag{3.165}$$

而

$$T_4^{(\mathrm{N})}(lm)=(a_fI_f\|T^{(\mathrm{N})}(l)^\dagger\|a_iI_i)C_{l\,m\,I_f\,M_f}^{I_i\,M_i}\ ,\tag{3.166}$$

$$T_4^{(\mathrm{e})}(lm)=(b_fJ_f\|T^{(\mathrm{e})}(l)\|b_iJ_i)C_{J_i\,\mu_i\,l\,m}^{J_f\,\mu_f}\ .\tag{3.167}$$

最后代入(3.154)，利用 CG 系数的正交归一性化简得

$$|T_{fi}|^2=\left|\sum_{j=0}^{\infty} T(j)_{fi} C^{I_i M_i}_{j\ M_i-M_f\ I_f\ M_f} C^{J_f \mu_f}_{J_i\ \mu_i\ j\ M_i-M_f}\right|^2 , \tag{3.168}$$

其中

$$T(j)_{fi}=\sum_{l=|j-1|}^{j+1} kT^{(N)}(jl)^{\dagger}_{fi}\, T^{(e)}(jl)_{fi} , \tag{3.169}$$

$$T^{(N)}(jl)^{\dagger}_{fi}=(a_f I_f|T^{(N)}(jl)^{\dagger}|a_i I_i)+\delta_{lj}(a_f I_f|T^{(N)}(l)^{\dagger}|a_i I_i) , \tag{3.170}$$

$$T^{(e)}(jl)_{fi}=(b_f J_f)|T^{(e)}(jl)|b_i J_i)+\delta_{lj}(b_f J_f|T^{(e)}(l)|b_i J_i) . \tag{3.171}$$

这些表达式可作为对内转换和对产生过程作实际计算的出发点．现在用它作些一般讨论．

最值得注意的是电子系跃迁算符(3.158)中的球汉克尔函数

$$h^{(1)}_l(kr)=-\mathrm{i}\frac{U^{(+)}_l(kr)}{kr} . \tag{3.172}$$

它在 $kr\to 0$ 处以 $(kr)^{-l-1}$ 的方式趋于无穷．这说明能量越低的内转换几率越大，越靠内层的电子内转换几率越大，l越大即多极性越高的过程内转换几率越大．就最内层电子而言，分布半径与原子序数 Z 成反比，因而原子序数越高的原子中发生内转换的几率也越大．这些规律适用于内转换而不适用于 γ 跃迁．γ 跃迁几率与核外电子无关．因此上述规律适用于内转换系数，即适用于内转换几率与 γ 跃迁几率之比．核跃迁能量越低，多极性越高，内转换系数越大．越重的原子，Z 越大，内转换系数越大．原子中越内层的电子内转换系数也越大．这些规律均——在实验中表现出来．

有时分别用(3.132)计算横场引起的电子跃迁，用(3.133)左边计算库仑作用引起的电子跃迁，这样更易于物理解释．横场引起的内转换与对产生过程中，核矩阵元只含(3.155)中 $\mu=1$ 和 2 的项，或按圆偏振组成$\mu=\pm1$ 的项．相应地在流矢量(3.159)中只保留电、磁多极矩与电、磁多极场．这样计算的结果自然与 γ 跃迁的核矩阵元一致．在计算内转换系数时彼此约去，使内转换系数只与电子波函数在核附近的行为有关．而原子内电子的性质是很好地了解了的，这

使内转换系数的计算有很高的可靠性．实际计算结果确实与实验相符很好，使内转换的观测也成为了解核谱的有效手段．纵场与标场引起的过程则与 γ 跃迁完全不同．它们的核矩阵元由(3.155)中 $\mu=3$ 和 4 的项组成，相应地在流矢量(3.159)中只取纵多极矩与纵多极场．再加上(3.162)中的标多极矩与标多极场．它们合起来就是库仑作用引起的跃迁．利用熟知的关系

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l_<}{r^{l+1}_>}\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}(-1)^m Y_{lm}(\theta,\varphi)Y_{l\,-m}(\theta',\varphi') \tag{3.173}$$

可将库仑作用引起的跃迁矩阵元作多极展开：

$$\frac{1}{4\pi}\int\frac{\rho^{(N)}(\boldsymbol{r})\rho^{(e)}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau'=\alpha\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(-1)^m Q^{(N)}_{lm}Q^{(e)}_{l\,-m} , \tag{3.174}$$

其中

$$Q^{(N)}_{lm}=\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\ \frac{1}{e}\int\rho^{(N)}(\boldsymbol{r})r^l Y_{lm}(\theta,\varphi)\,\mathrm{d}\tau \tag{3.175}$$

为核静电 2^l 极矩在其始末态间的矩阵元，

$$Q^{(e)}_{lm}=\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\ \frac{1}{e}\int\rho^{(e)}(\boldsymbol{r})r^{-l-1}Y_{lm}(\theta,\varphi)\,\mathrm{d}\tau \tag{3.176}$$

为由核向外看到的电子系静电 2^l 极矩在其始末态间的矩阵元，它们都是 l 阶不可约张量的矩阵元．静多极矩与动态电磁多极矩有很不相同的性质，它可包含 $l=0$ 的电单极矩和电单极振动，并导致电单极跃迁．其中包括 0-0 跃迁的可能性．电单极跃迁的选择定则为

$$\Delta I=0\ ,\ \Delta M=0\ ,\ \Pi_i=\Pi_f . \tag{3.177}$$

这个选择定则还不足以把它与磁偶极跃迁和电四极跃迁分开．唯独 0-0 跃迁只能是电单极跃迁．任何其他电、磁多极跃迁都不可能是 0-0 跃迁．0-0 跃迁是干净地观察电单极跃迁的窗口．内转换与对产生使这种观察成为实际可能．

第 4 章　原子核与弱作用

4.1　费米场量子化与弱作用理论概述

弱作用的研究始于 β 衰变．在早期发现的 α, β 和 γ 三种放射性中，α 粒子不是基本粒子，α 衰变也不是基本过程．原子核内两个中子和两个质子可能形成一个 α 粒子，当这个 α 粒子在核表面出现时有一定几率穿透库仑势垒而逸出，这就是 α 衰变，是核内核子系统的一种动力学过程．β 粒子即电子，是基本粒子．由于静止能量只有 0.5 MeV，要将电子维持在若干 fm 的尺度范围内必须有一种极强的作用来抵消因测不准关系而导致的 100 MeV 以上的动能．然而并不存在这种作用，可见电子不能存在于核内．β 衰变中电子以及与它相伴的反中微子只能从真空中产生出来．这一点类似 γ 衰变．γ 衰变中 γ 光子不是在核内现成的，而是在核状态发生变化的同时从真空中产生的．β 衰变和 γ 衰变都是基本过程，但有重大差别．一般说来 β 衰变比 γ 衰变的寿命长得多．β 衰变的寿命通常长于秒的量级．而电偶极 γ 衰变的寿命则在 10^{-15} s 左右．这表明导致 β 衰变的基本作用比导致 γ 衰变的电磁作用弱得多，因而称为弱作用．

弱作用的理论框架是费米(Fermi 1933, 1934)模仿电磁作用理论建立起来的．经二十多年反复的尝试和修改，特别在弱作用中宇称不守恒的发现(Lee 1956, Wu 1957)与深入研究的推动下，弱作用理论终于在 60 年代中确立下来，并于 70 年代中成为弱电统一理论的一部分(Glashow 1980, Weinberg 1980, Salam 1980)．随后实验观察到传递弱作用的 $W^{\pm}$ 粒子与 Z^0 粒子，最后确证了弱电统一理论．下面讲述的是弱作用理论中与核有关的部分．它完成于本世纪 60 年代中，成为

后来发展弱电统一理论的依据，并为后者所确认．

(3.5)表明，基本的电磁作用为电流密度四矢量 j_μ 与电磁四矢势 A_μ 的作用，简称流－场作用．(3.140) 则表明这种作用可近似地表现为两个电流密度四矢量间的作用，简称流－流作用．传递弱作用的场量子，即 $W^{\pm}$ 与 Z^0 粒子，到本世纪 80 年代中才观察到．在这之前，传递弱作用的场至多只是一种假设的存在．弱作用的有效理论自然表现为流－流作用理论．弱作用与电磁作用的另一重大差别在于它可改变粒子的荷电状态．例如可将一个中子转变为一个质子，同时产生一个电子和一个反中微子，这就是 β 衰变；也可将核内的一个质子转变为一个中子，同时产生一个正电子和一个中微子，这就是 β^+ 衰变．这使得弱作用流不同于电流，其中应含改变电荷态的机制．

用 $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ 表示参与作用的费米子场，费米子是它的量子．设自由费米子的拉格朗日量密度由(3.13)表示，且作用项不含 Ψ 对时间的微商．将 $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ 当广义坐标，与它正则共轭的广义动量即为

$$\frac{\partial \mathscr{L}_2}{\partial \dot{\Psi}(\boldsymbol{r},t)}=\mathrm{i}\Psi^{\dagger}(\boldsymbol{r},t) \tag{4.1}$$

(3.13)与此式均采用了自然单位．如写成与单位制无关的形式，则(3.13)应乘以 $\hbar c$, $x_4=\mathrm{i}ct$, 此处的广义动量应为 $\mathrm{i}\hbar\Psi^{\dagger}(\boldsymbol{r},t)$．将这个费米场量子化，即将场函数与其厄米伴随都变成算符：$\hat{\Psi}(\boldsymbol{r},t)$, $\hat{\Psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r},t)$．$\hat{\Psi}$ 与它的正则共轭动量 $\mathrm{i}\hbar\Psi^{\dagger}$ 间应有类似(3.29)的对易关系．不过由于费米子系的波函数应具交换反对称性，并服从泡利原理，应定义算符 $\hat{F}$ 与 $\hat{G}$ 的量子反泊松括号：

$$\left[\hat{F},\hat{G}\right]_{+}\equiv\frac{\hat{F}\hat{G}+\hat{G}\hat{F}}{\mathrm{i}\hbar} \tag{4.2}$$

以代替量子泊松括号(3.28)，即用反对易关系代替玻色子的对易关系．由是得将费米场量子化的基本反对易关系

$$\left.\begin{aligned}\left[\hat{\Psi}(\boldsymbol{r},t),\hat{\Psi}(\boldsymbol{r}',t)\right]_+ &= \left[i\hbar\hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r},t), i\hbar\hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r}',t)\right]_+ = 0,\\ \left[\hat{\Psi}(\boldsymbol{r},t), i\hbar\hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r}',t)\right]_+ &= \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') .\end{aligned}\right\} \quad (4.3)$$

将它们打开后整理得

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\Psi}(\boldsymbol{r},t)\hat{\Psi}(\boldsymbol{r}',t)+\hat{\Psi}(\boldsymbol{r}',t)\hat{\Psi}(\boldsymbol{r},t)\\ &=\hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r},t)\hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r}',t)+\hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r}',t)\hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r},t)=0,\\ &\hat{\Psi}(\boldsymbol{r},t)\hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r}',t)+\hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r}',t)\hat{\Psi}(\boldsymbol{r},t)=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\end{aligned}\right\} \quad (4.4)$$

由于 $\hat{\Psi}$ 与 $\hat{\Psi}^\dagger$ 都有四个分量, (4.3) 与 (4.4) 的第二式右边均略去了一个四行四列的幺矩阵. 由 (3.13) 与 (4.1) 可得费米子系统的能量密度

$$\mathscr{H}_2^{(0)} = i\Psi^\dagger\dot{\Psi} - \mathscr{L}_2 = \Psi^\dagger[\boldsymbol{\alpha}\cdot(-i\nabla)+m\beta]\Psi, \quad (4.5)$$

上标 (0) 表示未计入相互作用, $\boldsymbol{\alpha}$ 与 β 为狄拉克矩阵 (1.124). 求解定态狄拉克方程

$$[\boldsymbol{\alpha}\cdot(-i\nabla)+m\beta]\psi_\lambda = E_\lambda\psi_\lambda , \quad (4.6)$$

λ 为含能量在内的好量子数的集合. 以下用 $\psi_\lambda(\boldsymbol{r})$ 表正能级波函数, $\psi_{-\lambda}(\boldsymbol{r})$ 表负能级波函数, 并设 $\{\psi_\lambda(\boldsymbol{r}),\psi_{-\lambda}(\boldsymbol{r})\}$ 组成完备正交归一化的狄拉克波函数系. 将量子化波函数用它们展开:

$$\hat{\Psi}(\boldsymbol{r},t)=\sum_\lambda \hat{c}_\lambda\psi_\lambda(\boldsymbol{r})+\sum_{-\lambda}\hat{d}_{\bar{\lambda}}^\dagger\,\psi_{-\lambda}(\boldsymbol{r}), \quad (4.7)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\hat{c}_\lambda &= \int\psi_\lambda^\dagger(\boldsymbol{r})\hat{\Psi}(\boldsymbol{r},t)d\tau,\\ \hat{d}_{\bar{\lambda}}^\dagger &= \int\psi_{-\lambda}^\dagger(\boldsymbol{r})\hat{\Psi}(\boldsymbol{r},t)d\tau.\end{aligned}\right\} \quad (4.8)$$

(4.7) 与 (4.8) 的厄米伴随是

$$\hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r},t)=\sum_\lambda \hat{c}_\lambda^\dagger\psi_\lambda^\dagger(\boldsymbol{r})+\sum_{-\lambda}\hat{d}_{\bar{\lambda}}\,\psi_{-\lambda}^\dagger(\boldsymbol{r}), \quad (4.9)$$

与

$$\left.\begin{aligned}\hat{c}_\lambda^\dagger &= \int\hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r},t)\psi_\lambda(\boldsymbol{r})d\tau,\\ \hat{d}_{\bar{\lambda}} &= \int\hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r},t)\psi_{-\lambda}(\boldsymbol{r})d\tau.\end{aligned}\right\} \quad (4.10)$$

由 (4.8), (4.10), (4.4) 与 $\{\psi_\lambda(\boldsymbol{r}),\psi_{-\lambda}(\boldsymbol{r})\}$ 的正交归一性得反对易关系

$$\left.\begin{aligned}&\hat{c}_\lambda\hat{c}_{\lambda'}+\hat{c}_{\lambda'}\hat{c}_\lambda=\hat{d}_{\bar{\lambda}}\hat{d}_{\bar{\lambda}'}+\hat{d}_{\bar{\lambda}'}\hat{d}_{\bar{\lambda}}=0 ,\\ &\hat{c}_\lambda^\dagger\hat{c}_{\lambda'}^\dagger+\hat{c}_{\lambda'}^\dagger\hat{c}_\lambda^\dagger=\hat{d}_{\bar{\lambda}}^\dagger\hat{d}_{\bar{\lambda}'}^\dagger+\hat{d}_{\bar{\lambda}'}^\dagger\hat{d}_{\bar{\lambda}}^\dagger=0 ,\\ &\hat{c}_\lambda\hat{d}_{\bar{\lambda}'}+\hat{d}_{\bar{\lambda}'}\hat{c}_\lambda=\hat{c}_\lambda\hat{d}_{\bar{\lambda}'}^\dagger+\hat{d}_{\bar{\lambda}'}^\dagger\hat{c}_\lambda=0 ,\\ &\hat{c}_\lambda^\dagger\hat{d}_{\bar{\lambda}'}+\hat{d}_{\bar{\lambda}'}\hat{c}_\lambda^\dagger=\hat{c}_\lambda^\dagger\hat{d}_{\bar{\lambda}'}^\dagger+\hat{d}_{\bar{\lambda}'}^\dagger\hat{c}_\lambda^\dagger=0 ,\\ &\hat{c}_\lambda\hat{c}_{\lambda'}^\dagger+\hat{c}_{\lambda'}^\dagger\hat{c}_\lambda=\hat{d}_{\bar{\lambda}}\hat{d}_{\bar{\lambda}'}^\dagger+\hat{d}_{\bar{\lambda}'}^\dagger\hat{d}_{\bar{\lambda}}=\delta_{\lambda\lambda'} .\end{aligned}\right\} \quad (4.11)$$

由基本算符 $\hat{c}_\lambda, \hat{c}_\lambda^\dagger, \hat{d}_{\bar{\lambda}}$ 和 $\hat{d}_{\bar{\lambda}}^\dagger$ 可组成厄米算符

$$\hat{N}_\lambda=\hat{c}_\lambda^\dagger\hat{c}_\lambda \quad 与 \quad \hat{N}_{\bar{\lambda}}=\hat{d}_{\bar{\lambda}}^\dagger\hat{d}_{\bar{\lambda}} , \quad (4.12)$$

它们代表可观察量. 用 $|N_\lambda\rangle$ 与 $|N_{\bar{\lambda}}\rangle$ 分别表示它们的本征态:

$$\hat{N}_\lambda|N_\lambda\rangle=N_\lambda|N_\lambda\rangle, \quad \hat{N}_{\bar{\lambda}}|N_{\bar{\lambda}}\rangle=N_{\bar{\lambda}}|N_{\bar{\lambda}}\rangle, \quad (4.13)$$

本征值分别为 N_λ 与 $N_{\bar{\lambda}}$. 由基本对易关系 (4.11) 得

$$\hat{N}_\lambda^2=\hat{c}_\lambda^\dagger\hat{c}_\lambda\hat{c}_\lambda^\dagger\hat{c}_\lambda=\hat{c}_\lambda^\dagger(1-\hat{c}_\lambda^\dagger\hat{c}_\lambda)\hat{c}_\lambda=\hat{c}_\lambda^\dagger\hat{c}_\lambda=\hat{N}_\lambda , \quad (4.14)$$

经整理得

$$\hat{N}_\lambda(\hat{N}_\lambda-1)=0. \quad (4.15)$$

将它作用在 $\hat{N}_\lambda$ 的本征态上得

$$N_\lambda(N_\lambda-1)|N_\lambda\rangle=0. \quad (4.16)$$

由于 $|N_\lambda\rangle\neq 0$, 故有

$$N_\lambda(N_\lambda-1)=0. \quad (4.17)$$

由此解得

$$N_\lambda=0, 1 , \quad (4.18)$$

即 $\hat{N}_\lambda$ 的本征值只能是 0 与 1, 这恰是一个单粒子态上费米子数可取的值. 故可将 $\hat{N}_\lambda$ 解释为 λ 单粒子态上的费米子数算符. 对 λ 单粒子态上费米子数为零的态 $|0_\lambda\rangle$ 有

$$\hat{c}_\lambda|0_\lambda\rangle=\hat{c}_\lambda(\hat{c}_\lambda\hat{c}_\lambda^\dagger+\hat{c}_\lambda^\dagger\hat{c}_\lambda)|0_\lambda\rangle=0, \quad (4.19)$$

其中第一项由于 $\hat{c}_\lambda^2=0$ 而为零，第二项则由于 $\hat{N}_\lambda|0_\lambda\rangle=0$ 而为零．类似地，对 λ 单粒子态上有一个费米子的态 $|1_\lambda\rangle$ 有

$$\hat{c}_\lambda^\dagger|1_\lambda\rangle=\hat{c}_\lambda^\dagger\hat{c}_\lambda^\dagger\hat{c}_\lambda|1_\lambda\rangle=0\ . \tag{4.20}$$

又由于

$$\hat{N}_\lambda\hat{c}_\lambda^\dagger=\hat{c}_\lambda^\dagger\hat{c}_\lambda\hat{c}_\lambda^\dagger=\hat{c}_\lambda^\dagger(1-\hat{c}_\lambda^\dagger\hat{c}_\lambda)=\hat{c}_\lambda^\dagger, \tag{4.21}$$

$$\hat{N}_\lambda\hat{c}_\lambda^\dagger|0_\lambda\rangle=\hat{c}_\lambda^\dagger|0_\lambda\rangle\ . \tag{4.22}$$

此式表明 $\hat{c}_\lambda^\dagger|0_\lambda\rangle$ 为 $\hat{N}_\lambda$ 的本征值为 1 的本征态．又若 $|0_\lambda\rangle$ 是归一的，即

$$\langle 0_\lambda|0_\lambda\rangle=1, \tag{4.23}$$

则 $\hat{c}_\lambda^\dagger|0_\lambda\rangle$ 的模平方为

$$\langle 0_\lambda|\hat{c}_\lambda\hat{c}_\lambda^\dagger|0_\lambda\rangle=\langle 0_\lambda|(1-\hat{c}_\lambda^\dagger\hat{c}_\lambda)|0_\lambda\rangle=\langle 0_\lambda|0_\lambda\rangle=1\ .$$

可见

$$\hat{c}_\lambda^\dagger|0_\lambda\rangle=|1_\lambda\rangle\ . \tag{4.24}$$

$\hat{c}_\lambda^\dagger$ 的作用使 λ 单粒子态中费米子数增加一个，因而称为 λ 单粒子态费米子的产生算符．而

$$\hat{N}_\lambda\hat{c}_\lambda|1_\lambda\rangle=\hat{c}_\lambda^\dagger\hat{c}_\lambda\hat{c}_\lambda|1_\lambda\rangle=0 \tag{4.25}$$

则表明 $\hat{c}_\lambda|1_\lambda\rangle$ 为 $\hat{N}_\lambda$ 的本征值为 0 的本征态．若 $|1_\lambda\rangle$ 是归一化的，即

$$\langle 1_\lambda|1_\lambda\rangle=1, \tag{4.26}$$

则 $\hat{c}_\lambda|1_\lambda\rangle$ 的模平方为

$$\langle 1_\lambda|\hat{c}_\lambda^\dagger\hat{c}_\lambda|1_\lambda\rangle=\langle 1_\lambda|1_\lambda\rangle=1\ .$$

可见

$$\hat{c}_\lambda|1_\lambda\rangle=|0_\lambda\rangle, \tag{4.27}$$

$\hat{c}_\lambda$ 为 λ 单粒子态费米子的消灭算符．与此平行，有关系

$$\hat{N}_{\bar{\lambda}}(\hat{N}_{\bar{\lambda}}-1)=0\ , \tag{4.28}$$

$$N_{\bar{\lambda}}=0,1\ , \tag{4.29}$$

$$\hat{d}_{\bar{\lambda}}|0_{\bar{\lambda}}\rangle=0,\quad \hat{d}_{\bar{\lambda}}^\dagger|1_{\bar{\lambda}}\rangle=0\ , \tag{4.30}$$

$$\hat{d}_{\bar{\lambda}}^\dagger|0_{\bar{\lambda}}\rangle=|1_{\bar{\lambda}}\rangle,\quad \hat{d}_{\bar{\lambda}}|1_{\bar{\lambda}}\rangle=|0_{\bar{\lambda}}\rangle\ . \tag{4.31}$$

比较(4.7)右边两项可以看出，$\hat{d}_{\bar{\lambda}}^\dagger$ 应是负能态 $\psi_{-\lambda}(\boldsymbol{r})$ 中粒子的消灭算符，亦即这个能态中空穴的产生算符．参照(4.31)第一式，可将 $N_{\bar{\lambda}}$ 解释为 $\bar{\lambda}$ 态反费米子数，$\hat{N}_{\bar{\lambda}}$ 为该态反粒子数算符．$\hat{d}_{\bar{\lambda}}^\dagger$ 为该态反粒子的产生算符．(4.31)第二式则表明，$\hat{d}_{\bar{\lambda}}$ 为该态反粒子的消灭算符．这也可从(4.9)右边两项的比较中看出．它表明 $\hat{d}_{\bar{\lambda}}$ 应是负能态 $\psi_{-\lambda}(\boldsymbol{r})$ 中粒子的产生算符．产生出的粒子填充空穴，消灭空穴，因而消灭了反粒子．由(4.7)，(4.9)与展开基底的正交归一性得

$$\int\hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r},t)\hat{\Psi}(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}\tau=\sum_\lambda\hat{c}_\lambda^\dagger\hat{c}_\lambda+\sum_{\bar{\lambda}}\hat{d}_{\bar{\lambda}}\hat{d}_{\bar{\lambda}}^\dagger=\sum_\lambda\hat{c}_\lambda^\dagger\hat{c}_\lambda-\sum_{\bar{\lambda}}\hat{d}_{\bar{\lambda}}^\dagger\hat{d}_{\bar{\lambda}}+\sum_{-\lambda}1, \tag{4.32}$$

其中

$$\hat{N}_+\equiv\sum_\lambda\hat{c}_\lambda^\dagger\hat{c}_\lambda \tag{4.33}$$

为正能量粒子总数，

$$\hat{N}_-\equiv\sum_{\bar{\lambda}}\hat{d}_{\bar{\lambda}}^\dagger\hat{d}_{\bar{\lambda}} \tag{4.34}$$

为正能量反粒子总数，而 $\sum_{-\lambda}1=\infty$ 为真空中填满负能级的粒子总数．这最后一项因与真空对应，是不可观察的，宜从理论中消去．为此可定义正规乘积．正规乘积是消灭算符恒在产生算符右边的乘积．如果相乘次序不合这规则，就要对相乘次序重新排列．为此要交换产生算符与消灭算符的位置．定义规定每交换一对费米子的产生和消灭算符就要改变一次符号．例如 $\hat{\Psi}^\dagger$ 与 $\hat{\Psi}$ 的正规乘积被定义为

$$
\begin{aligned}
:\hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r},t)\hat{\Psi}(\boldsymbol{r},t):=&\sum_{\lambda,\lambda'}\hat{c}_\lambda^\dagger\hat{c}_{\lambda'}\psi_\lambda^\dagger(\boldsymbol{r})\psi_{\lambda'}(\boldsymbol{r})\\
&+\sum_{\lambda,-\lambda'}\hat{c}_\lambda^\dagger\hat{d}_{\bar{\lambda}'}^\dagger\psi_\lambda^\dagger(\boldsymbol{r})\psi_{-\lambda'}(\boldsymbol{r})+\sum_{-\lambda,\lambda'}\hat{d}_{\bar{\lambda}}\hat{c}_{\lambda'}\psi_{-\lambda}^\dagger(\boldsymbol{r})\psi_{\lambda'}(\boldsymbol{r})\\
&-\sum_{-\lambda,-\lambda'}\hat{d}_{\bar{\lambda}'}^\dagger\hat{d}_{\bar{\lambda}}\psi_{-\lambda}^\dagger(\boldsymbol{r})\psi_{-\lambda'}(\boldsymbol{r})\ .
\end{aligned} \tag{4.35}
$$

由此得费米子数算符

$$\hat{N}\equiv\hat{N}_{+}-\hat{N}_{-}=\int:\hat{\Psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r},t)\hat{\Psi}(\boldsymbol{r},t):\mathrm{d}\tau\ . \tag{4.36}$$

类似地，将(4.5)右边理解为正规乘积，费米子系的总能量可表为

$$\hat{H}_{2}^{(0)}=\int\hat{\mathscr{H}}_{2}^{(0)}\mathrm{d}\tau=\int:\hat{\Psi}^{\dagger}[\boldsymbol{\alpha}\cdot(-\mathrm{i}\nabla)+m\beta]\hat{\Psi}:\mathrm{d}\tau=\hat{H}_{2+}^{(0)}+\hat{H}_{2-}^{(0)}, \tag{4.37}$$

其中

$$\hat{H}_{2+}^{(0)}=\sum_{\lambda}\hat{c}_{\lambda}^{\dagger}\hat{c}_{\lambda}E_{\lambda}=\sum_{\lambda}\hat{N}_{\lambda}E_{\lambda} \tag{4.38}$$

为正能量费米子的总能量，而

$$\hat{H}_{2-}^{(0)}=\sum_{\bar{\lambda}}\hat{d}_{\bar{\lambda}}^{\dagger}\hat{d}_{\bar{\lambda}}E_{\lambda}=\sum_{\bar{\lambda}}\hat{N}_{\bar{\lambda}}E_{\lambda} \tag{4.39}$$

为正能量反费米子的总能量. (4.37)中已自动减去了真空中填满负能级的费米子能量，它也是不可观察量. 在将电流密度四矢量量子化时，(3.14)右边也应取正规乘积：

$$\hat{j}_{\kappa}=\mathrm{i}e:\hat{\overline{\Psi}}\gamma_{\kappa}\hat{\Psi}:=\mathrm{i}e\Big[\sum_{\lambda,\lambda'}\hat{c}_{\lambda}^{\dagger}\hat{c}_{\lambda'}\overline{\psi}_{\lambda}\gamma_{\kappa}\psi_{\lambda'}+\sum_{\lambda,-\lambda'}\hat{c}_{\lambda}^{\dagger}\hat{d}_{\bar{\lambda}'}^{\dagger}\overline{\psi}_{\lambda}\gamma_{\kappa}\psi_{-\lambda'}+\sum_{-\lambda,\lambda'}\hat{d}_{\bar{\lambda}}\hat{c}_{\lambda'}\overline{\psi}_{-\lambda}\gamma_{\kappa}\psi_{\lambda'}$$
$$-\sum_{-\lambda,-\lambda'}\hat{d}_{\bar{\lambda}'}^{\dagger}\hat{d}_{\bar{\lambda}}\overline{\psi}_{-\lambda}\gamma_{\kappa}\psi_{-\lambda'}\Big], \tag{4.40}$$

e 为费米子所带电荷，κ 为四矢量的洛伦兹下标. 用希腊字母 κ 取代希腊字母 μ 和 ν 作四矢量的下标，是为了省下后者分别表示 μ 子和中微子. (4.40)的每一项都不改变粒子的荷电状态. 其中第一项在 λ' 态消灭一个电荷为 e 的粒子却在 λ 态把它产生出来；第二项在 $\overline{\lambda}'$ 态产生一个电荷为 $-e$ 的反粒子又在 λ 态产生一个电荷为 e 的粒子；第三项在 λ' 态消灭一个电荷为 e 的粒子，在 $\overline{\lambda}$ 态则消灭一个电荷为 $-e$ 的反粒子；第四项在 $\overline{\lambda}$ 态消灭一个电荷为 $-e$ 的反粒子又在 $\overline{\lambda}'$ 态把它产生出来.

导致 β 衰变的弱作用需要两个流，一个将中子变成质子，另一个产生一个电子和一个反中微子. 从对(4.40)的分析知，这两个流都可表成类似的形式. 设中子与质子都可用狄拉克波函数描述. 这

自然只是一种近似，因为已知它们都由夸克组成，且有很大的反常磁矩. 不过这种近似在很多场合下是有用的，夸克结构的问题以后再讨论. 在这种近似下可引进中子场 $\hat{\Psi}_{\mathrm{n}}$ 和质子场 $\hat{\Psi}_{\mathrm{p}}$，中子与质子分别是它们的量子. 模仿(4.40)可得中子转变为质子的流

$$\mathrm{i}\hat{\overline{\Psi}}_{\mathrm{p}}\gamma_{\kappa}\hat{\Psi}_{\mathrm{n}}=\mathrm{i}\sum_{\lambda,\lambda'}\hat{c}_{\mathrm{p}\lambda}^{\dagger}\hat{c}_{\mathrm{n}\lambda'}\overline{\psi}_{\lambda}\gamma_{\kappa}\psi_{\lambda'}+\mathrm{i}\sum_{\lambda,-\lambda'}\hat{c}_{\mathrm{p}\lambda}^{\dagger}\hat{d}_{\mathrm{n}\bar{\lambda}'}^{\dagger}\overline{\psi}_{\lambda}\gamma_{\kappa}\psi_{-\lambda'}$$
$$+\mathrm{i}\sum_{-\lambda,\lambda'}\hat{d}_{\mathrm{p}\bar{\lambda}}\hat{c}_{\mathrm{n}\lambda'}\overline{\psi}_{-\lambda}\gamma_{\kappa}\psi_{\lambda'}-\mathrm{i}\sum_{-\lambda,-\lambda'}\hat{d}_{\mathrm{n}\bar{\lambda}'}^{\dagger}\hat{d}_{\mathrm{p}\bar{\lambda}}\overline{\psi}_{-\lambda}\gamma_{\kappa}\psi_{-\lambda'}, \tag{4.41}$$

其中 ψ_{λ} 与 $\psi_{-\lambda}$ 都是由(4.6)解出的核子定态狄拉克波函数. (4.41)的第一项将一个 λ' 态中子变为一个 λ 态质子，负责原子核的 β 衰变；末项将一个 $\overline{\lambda}$ 态反质子变为一个 $\overline{\lambda}'$ 态反中子，负责反核的 β 衰变. 其余两项表示核子－反核子对的产生与消灭，在核衰变能区中这类过程不会发生. (4.41)在固有洛伦兹变换和空间反演变换下均按四矢量变，因而称为矢量流. 也可构造赝矢流或轴矢流

$$\mathrm{i}\hat{\overline{\Psi}}_{\mathrm{p}}\gamma_{\kappa}\gamma_{5}\Psi_{\mathrm{n}}=\mathrm{i}\sum_{\lambda,\lambda'}\hat{c}_{\mathrm{p}\lambda}^{\dagger}\hat{c}_{\mathrm{n}\lambda'}\overline{\psi}_{\lambda}\gamma_{\kappa}\gamma_{5}\psi_{\lambda'}+\mathrm{i}\sum_{\lambda,-\lambda'}\hat{c}_{\mathrm{p}\lambda}^{\dagger}\hat{d}_{\mathrm{n}\bar{\lambda}'}^{\dagger}\overline{\psi}_{\lambda}\gamma_{\kappa}\gamma_{5}\psi_{-\lambda'}$$
$$+\mathrm{i}\sum_{-\lambda,\lambda'}\hat{d}_{\mathrm{p}\bar{\lambda}}\hat{c}_{\mathrm{n}\lambda'}\overline{\psi}_{-\lambda}\gamma_{\kappa}\gamma_{5}\psi_{\lambda'}-\mathrm{i}\sum_{-\lambda,-\lambda'}\hat{d}_{\mathrm{n}\bar{\lambda}'}^{\dagger}\hat{d}_{\mathrm{p}\bar{\lambda}}\overline{\psi}_{-\lambda}\gamma_{\kappa}\gamma_{5}\psi_{-\lambda'}. \tag{4.42}$$

此式右边的首项和末项也分别负责核与反核的 β 衰变. (4.41)与(4.42)左方都没有加正规乘积标志，这是因为因子 $\hat{\overline{\Psi}}_{\mathrm{p}}$ 与 $\hat{\Psi}_{\mathrm{n}}$ 中的产生、消灭算符因分属不同费米场而互相反对易. 这使普通乘积就是正规乘积. 由于在空间反演中矢量流与轴矢流变换性质不同，在宇称守恒的作用中它们不能混合. 然而已知弱作用中宇称不守恒，这两种流可以混合. 且实验表明它们的混合几乎达到最大程度. β 衰变的核子流为

$$\hat{J}_{\kappa}^{+}=\hat{V}_{\kappa}^{+}-\hat{A}_{\kappa}^{+}\ , \tag{4.43}$$

在衰变中核子动量变化可略的情况下

$$\hat{V}_{\kappa}^{+}=\mathrm{i}g_{\mathrm{V}}\hat{\overline{\Psi}}_{\mathrm{p}}\gamma_{\kappa}\hat{\Psi}_{\mathrm{n}}\ , \tag{4.44}$$

$$\hat{A}_\kappa^+ = -\mathrm{i}g_A\hat{\overline{\Psi}}_p\gamma_\kappa\gamma_5\hat{\Psi}_n \,, \tag{4.45}$$

其中上标 + 表示这个流中核子增加一份正电荷，

$$g_v = 0.974, \qquad \frac{g_A}{g_v} = 1.2573 \tag{4.46}$$

均为接近 1 的常数①．将 (4.44) 与 (4.45) 代入 (4.43) 得

$$\hat{J}_\kappa^+ = \mathrm{i}\hat{\overline{\Psi}}_p\gamma_\kappa(g_v + g_A\gamma_5)\hat{\Psi}_n \,. \tag{4.47}$$

电子与中微子场 $\hat{\Psi}_e$ 与 $\hat{\Psi}_\nu$ 组成的矢量流与轴矢流以最大程度的混合组成 β 衰变中的电子 - 中微子流

$$\hat{j}_\kappa^- = \mathrm{i}\hat{\overline{\Psi}}_e\gamma_\kappa(1+\gamma_5)\hat{\Psi}_\nu \,. \tag{4.48}$$

这里没有待定常数，表现出电子与中微子都是基本的点粒子的事实．将定态狄拉克方程 (4.6) 用于电子与中微子，这只须将其中的质量 m 分别用电子质量 m_e 和中微子质量 m_ν 替代即可．相应地，量子数集合 λ 也应分别用电子的量子数集合 λ_e 和中微子的量子数集合 λ_ν 替代．于是

$$\hat{\Psi}_e = \sum_{\lambda_e}\hat{c}_\lambda\psi_\lambda + \sum_{-\lambda_e}\hat{d}_{\bar{\lambda}}^\dagger\psi_{-\lambda} \,, \tag{4.49}$$

$$\hat{\Psi}_\nu = \sum_{\lambda}\hat{c}_\lambda\psi_\lambda + \sum_{-\lambda}\hat{d}_{\bar{\lambda}}^\dagger\psi_{-\lambda,} \,, \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned}\hat{j}_\kappa^- = &\sum_{\lambda,\lambda}\hat{c}_\lambda^\dagger\hat{c}_\lambda \mathrm{i}\overline{\psi}_\lambda\gamma_\kappa(1+\gamma_5)\psi_\lambda + \sum_{\lambda,-\lambda}\hat{c}_\lambda^\dagger\hat{d}_{\bar{\lambda}}^\dagger \mathrm{i}\overline{\psi}_\lambda\gamma_\kappa(1+\gamma_5)\psi_{-\lambda} \\ &+ \sum_{-\lambda,\lambda}\hat{d}_{\bar{\lambda}}\hat{c}_\lambda \mathrm{i}\overline{\psi}_{-\lambda}\gamma_\kappa(1+\gamma_5)\psi_\lambda - \sum_{-\lambda,-\lambda}\hat{d}_{\bar{\lambda}}^\dagger\hat{d}_{\bar{\lambda}} \mathrm{i}\overline{\psi}_{-\lambda}\gamma_\kappa(1+\gamma_5)\psi_{-\lambda}.\end{aligned} \tag{4.51}$$

(4.51) 右边第二项即负责 β 衰变中电子与反中微子的产生．导致 β 衰变的弱作用可表为

$$\hat{\mathscr{H}}'_\beta = -\frac{G}{\sqrt{2}}\hat{J}_\kappa^+\hat{j}_\kappa \,, \tag{4.52}$$

其中按爱因斯坦约定对重复的希文下标 κ 由 1 到 4 求和．

$$G = 1.16639\times10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2} = 1.02682\times10^{-5}\,m_p^{-2} \tag{4.53}$$

① g_A 有两种不同定义，两者差一个符号，此处取 $g_A>0$．

为弱作用常数，又称费米常数，m_p 为质子质量．将 (4.47) 两边取厄米伴随，得 (以下对 $\kappa=1,2,3$ 取 + 号对 $\kappa=4$ 取 − 号)

$$\hat{J}_\kappa^- = \pm(\hat{J}_\kappa^+)^\dagger = \mathrm{i}\hat{\overline{\Psi}}_n\gamma_\kappa(g_v + g_A\gamma_5)\hat{\Psi}_p \,. \tag{4.54}$$

这个流可将质子转化为中子．类似地，流

$$\hat{j}_\kappa^+ = \pm(\hat{j}_\kappa^-)^\dagger = \mathrm{i}\hat{\overline{\Psi}}_\nu\gamma_\kappa(1+\gamma_5)\hat{\Psi}_e \tag{4.55}$$

可产生正电子与中微子．作用

$$\hat{\mathscr{H}}'_{\beta\pm} = -\frac{G}{\sqrt{2}}(\hat{J}_\kappa^+\hat{j}_\kappa^- + \hat{j}_\kappa^+\hat{J}_\kappa^-) \tag{4.56}$$

是一厄米算符，可导致 β 衰变和 β$^+$ 衰变．

可按涉及的粒子种类将弱作用分类．只涉及轻子的作用称为纯轻子作用．轻子包括电子 e, 电子中微子 ν_e, μ 子 μ^-, μ 中微子 ν_μ, τ 子 τ^-, τ 中微子 ν_τ 以及它们的反粒子．典型的纯轻子弱作用过程为 μ 子的衰变

$$\mu^- \longrightarrow e + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \,, \tag{4.57}$$

$\bar{\nu}_e$ 为反电子中微子．这一过程中 μ 子转变为 μ 中微子，同时产生一个电子和一个反电子中微子，因此每一类轻子都改变了电荷状态．改变电荷状态的轻子流可一般地表为

$$\hat{j}_\kappa^- = \mathrm{i}\sum_l\hat{\overline{\Psi}}_l\gamma_\kappa(1+\gamma_5)\hat{\Psi}_{\nu_l} \tag{4.58}$$

及其厄米伴随

$$\hat{j}_\kappa^+ = \pm(\hat{j}_\kappa^-)^\dagger = \mathrm{i}\sum_l\hat{\overline{\Psi}}_{\nu_l}\gamma_\kappa(1+\gamma_5)\hat{\Psi}_l \,, \tag{4.59}$$

其中 $l=e, \mu^-$ 和 τ^-, $\nu_l=\nu_e, \nu_\mu$ 和 ν_τ．改变电荷状态的纯轻子弱作用哈密顿量密度为

$$\hat{\mathscr{H}}'_l = -\frac{G}{\sqrt{2}}\hat{j}_\kappa^+\hat{j}_\kappa \,. \tag{4.60}$$

同时涉及轻子与强子的作用为半轻子作用．典型的半轻子弱作用过程就是 β 衰变．不涉及轻子的作用为非轻子作用，(1.20) 列举的都是非轻子弱作用过程．强子是由夸克组成的，任何关于强子的基

本理论都应归结为夸克系统的理论. 涉及强子的弱作用理论也是这样. 具体地说,弱作用中的强子流应表达成夸克流. 在核物理中可暂不考虑粲夸克、底夸克等重夸克,而只考虑上夸克 u,下夸克 d 和奇夸克 s. 以基本电荷 e 为单位,u 的电荷为 $\frac{2}{3}$,d 与 s 的电荷都是 $-\frac{1}{3}$. 产生一份正电荷的流可以是消灭一个 d 夸克产生一个 u 夸克,也可以是消灭一个 s 夸克产生一个 u 夸克. 前者奇异数守恒,后者奇异数增 1. 实际上奇异数守恒与不守恒的弱作用过程都存在. β 衰变即为奇异数守恒的过程. (1.20) 中的诸过程中奇异数均增 1. 可见弱作用流应含奇异数守恒与不守恒的两部分. 卡毕博 (Cabibbo 1963) 将弱作用中改变电荷状态的夸克流表为

$$\hat{J}^{\pm}_{\kappa}=\cos\theta_c(\hat{J}^{\pm}_{\kappa})_{\Delta s=0}+\sin\theta_c(\hat{J}^{\pm}_{\kappa})_{\Delta s=\pm 1}\ , \tag{4.61}$$

其中奇异数守恒的夸克流为

$$(\hat{J}^{+}_{\kappa})_{\Delta s=0}=\mathrm{i}\hat{\bar{\Psi}}_{\mathrm{u}}\gamma_{\kappa}(1+\gamma_5)\hat{\Psi}_{\mathrm{d}}\ , \tag{4.62}$$

$$(\hat{J}^{-}_{\kappa})_{\Delta s=0}=\pm(\hat{J}^{+}_{\kappa})^{\dagger}_{\Delta s=0}=\mathrm{i}\hat{\bar{\Psi}}_{\mathrm{d}}\gamma_{\kappa}(1+\gamma_5)\hat{\Psi}_{\mathrm{u}}\ , \tag{4.63}$$

奇异数不守恒的夸克流为

$$(\hat{J}^{+}_{\kappa})_{\Delta s=1}=\mathrm{i}\hat{\bar{\Psi}}_{\mathrm{u}}\gamma_{\kappa}(1+\gamma_5)\hat{\Psi}_{\mathrm{s}}\ , \tag{4.64}$$

$$(\hat{J}^{-}_{\kappa})_{\Delta s=-1}=\pm(\hat{J}^{+}_{\kappa})^{\dagger}_{\Delta s=1}=\mathrm{i}\hat{\bar{\Psi}}_{\mathrm{s}}\gamma_{\kappa}(1+\gamma_5)\hat{\Psi}_{\mathrm{u}}\ . \tag{4.65}$$

待定常数 θ_c 称为卡毕博角,$\cos\theta_c$ 表夸克弱流在奇异数守恒方向上的投影,$\sin\theta_c$ 表夸克弱流在奇异数不守恒方向上的投影. 实际上,人们发现

$$\cos\theta_c=g_v=0.974\ , \tag{4.66}$$

即矢量流在奇异数守恒方向上的投影在夸克层次上看与在强子层次上看是一样的. 这一有趣现象的物理含义将在 4.4 节中进一步分析. 流 (4.62) ~ (4..65) 不再含待定常数,表示夸克被当作基本的点粒子. 荷电状态发生变化的弱作用哈密顿量密度可统一地表为

$$\hat{\mathscr{H}}'=-\frac{G}{\sqrt{2}}\ (\hat{J}^{+}_{\kappa}+\hat{j}^{+}_{\kappa})(\hat{J}^{-}_{\kappa}+\hat{j}^{-}_{\kappa})\ , \tag{4.67}$$

其中夸克流 $\hat{J}^{\pm}_{\kappa}$ 由 (4.61) 表示,轻子流 $\hat{j}^{\pm}_{\kappa}$ 由 (4.59) 和 (4.58) 表示,普适弱作用常数 G 由 (4.53) 表示. (4.67) 包含了纯轻子作用、半轻子作用和非轻子作用. 它的结果与实验一致,成为发展弱电统一理论的基础之一.

4.2 β 衰变及其多极分类,电子俘获与 μ 俘获

在传统的 β 衰变理论中,原子核被当作一非相对论多核子系统. 这个理论很成功,弱作用的现代理论即脱胎于此. 为讨论原子核的β 衰变,仍采用核子层次的弱流表达式 (4.47) 与 (4.54),以及弱作用哈密顿量密度 (4.56). 若只考虑 β^- 衰变,可只取 (4.56) 的第一项,即 (4.52). (4.56) 的第二项负责 β^+ 衰变与轨道电子俘获. β 衰变中的轻子流即电子-中微子流 (4.48),电子中微子 ν_e 被简记为 ν. 放出的反中微子是完全自由的,可取为平面波. 放出的电子受到核与其它核外电子的库仑作用,应用库仑波函数描述. 不过这种电作用不强,作为零级近似可用平面波代替库仑波函数描述放出的电子. 库仑作用的影响随后再予以考虑. 正能量电子的平面波可表为

$$\psi_{\lambda_e}=\sqrt{\frac{\mathrm{d}^3k_e}{(2\pi)^3}}\ u_{\lambda_e}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_e\cdot r}\ , \tag{4.68}$$

其中

$$u_{\lambda_e}=\sqrt{\frac{E_e+m_e}{2E_e}}\begin{bmatrix}\chi_e\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}_e}{E_e+m_e}\ \chi_e\end{bmatrix} \tag{4.69}$$

为狄拉克双旋量. m_e 为电子质量,

$$E_e=\sqrt{k_e^2+m_e^2} \tag{4.70}$$

为电子能量,χ_e 为电子的自旋态. 电子的量子数集合 λ_e 现包括它的动量 $\hbar\boldsymbol{k}_e$ 和它的自旋量子数. 后者可取为电子自旋在某取定极轴上

的投影．由于 $\boldsymbol{k}_e$ 可连续变化，展开式(4.49)却取成求和形成，因此(4.68)中给了 $\boldsymbol{k}_e$ 一个微区域 d^3k_e．负能量中微子的平面波可取为

$$\psi_{-\lambda_v}=\sqrt{\frac{d^3k_{\bar{v}}}{(2\pi)^3}}\,u_{-\lambda_v}e^{-i\boldsymbol{k}_{\bar{v}}\cdot\boldsymbol{r}}\ ,\tag{4.71}$$

由于中微子质量为零它的狄拉克双旋量简化为

$$u_{-\lambda_v}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}_{\bar{v}}}{k_{\bar{v}}}\chi_v\\ \chi_v\end{bmatrix}.\tag{4.72}$$

它所描写的负能量中微子的动量为 $-\hbar\boldsymbol{k}_{\bar{v}}$，能量为 $-\hbar ck_{\bar{v}}$．作为这一状态空穴的反中微子就具有动量 $\hbar\boldsymbol{k}_{\bar{v}}$ 和能量 $\hbar ck_{\bar{v}}$．(4.72)提示将反中微子的动量方向 $\boldsymbol{k}_{\bar{v}}/k_{\bar{v}}$ 取为极轴，将中微子的自旋态 χ_v 取为自旋在这个方向上投影的本征态．(4.72)成为

$$u_{-\lambda_v}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\pm\chi_v\\ \chi_v\end{bmatrix},\tag{4.73}$$

其中正号对应中微子自旋沿反中微子动量方向的状态，作为这种负能态中微子空穴的反中微子自旋将逆着它的运动方向；负号对应中微子自旋逆着反中微子动量方向的状态，它的空穴即自旋沿着自己动量方向的反中微子．自旋在动量方向上的投影称为螺旋性，投影为正称右手螺旋性，投影为负称左手螺旋性．负能态中微子的双旋量(4.73)中取正号，相应反中微子具左手螺旋性；取负号对应反中微子的右手螺旋性．β 衰变电子-中微子流(4.48)中，算符 $1+\gamma_5$ 直接作用在中微子场 $\hat{\Psi}_v$ 上．将它作用到展开式(4.50)的每一项上，由 γ_5 的表达式(2.46)知，若负能态中微子双旋量(4.73)中取正号，$1+\gamma_5$ 的作用结果将为零．这表明 β 衰变中不会产生左手螺旋的反中微子．类似的考虑得知，β^+ 衰变中不会产生右手螺旋的中微子．一般地说，右手螺旋无质量的费米子和左手螺旋无质量的反费米子都不参与弱作用．由于中微子不参与强作用和电磁作用，右手螺旋无质量中微子和左手螺旋无质量反中微子就不参加除引力作用以外的任何作用．它们如果存在就只能是除引力外不参与任何

作用的暗物质，只能由它们的引力表现探索它们．一般假定它们并不存在，在这个宇宙中只有左手螺旋中微子和右手螺旋反中微子．在负能态中微子双旋量(4.73)中恒取负号．

由正能态电子的平面波(4.68)和负能态中微子的平面波(4.71)，连同它们的双旋量(4.69)和(4.73)可得电子-中微子流展开式(4.51)中对 β 衰变有贡献的项

$$i\bar{\psi}_{\lambda_e}\gamma_\kappa(1+\gamma_5)\psi_{-\lambda_v}=b_\kappa e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\ ,\tag{4.74}$$

其中

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_e+\boldsymbol{k}_{\bar{v}}\ ,\tag{4.75}$$

$$b_\kappa=\sqrt{d^3k_e d^3k_{\bar{v}}}\ \frac{1}{(2\pi)^3}\ i\bar{u}_{\lambda_e}\gamma_\kappa(1+\gamma_5)u_{-\lambda_v}\ .\tag{4.76}$$

它类似矢势(3.62)中对 γ 衰变有贡献的项

$$\boldsymbol{A}_\sigma^*(\boldsymbol{r})=\sqrt{\frac{d^3k}{(2\pi)^3}}\ \boldsymbol{u}_K^* e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\ ,\tag{4.77}$$

b_κ, $\kappa=1,2,3,4$, 对应 $\sqrt{\frac{d^3k}{(2\pi)^3}}\ \boldsymbol{u}_K^*\cdot e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ 中的径矢 $\boldsymbol{r}$ 将取核子的位置，整个平面波因子将乘在核子流上对核子坐标积分．原子核是一个复杂系统，其中核子并非自由．核子之间有强作用，本应高度地彼此关联．然而壳模型却显示，原子核的许多重要性质可以用单核子状态的集合来描写．人们研究 β 衰变时将原子核当作非相对论性的核子系统．在将上节关于弱作用的相对论性的一般理论与传统的 β 衰变理论相衔接时要将它非相对论化．由于相对论性的量子多体理论仍在艰难的发展中，这种非相对论约化也只好对单粒子态进行，然后再将它与非相对论量子多体理论相接．在(4.6)式左边作用在 ψ_λ 上的哈密顿量算符中可加入一项势函数，表示核内其它核子对这个核子的作用．用这样得到的定态狄拉克方程的解 ψ_λ 描写核内的单核子运动．将它代入(4.41)和(4.42)，再代入(4.47)中可得 β 衰变的核子流

$$i\bar{\psi}_{\lambda_p}\gamma_\kappa(g_V+g_A\gamma_5)\psi_{\lambda_n}\ ,\tag{4.78}$$

其中 ψ_{λ_n} 为中子态，ψ_{λ_p} 为质子态。由平面波解(2.26)看出，正能态狄

拉克波函数的四个分量中，下两分量与上两分量大小的比为 $p/2m$，恢复到与单位制无关的形式后这个比为 $p/2mc$，在非相对论能区为小量．对狄拉克方程非相对论近似的一般讨论[①]表明，精确到 p/mc 的一次幂，可将定态狄拉克波函数写成

$$\psi_\lambda=\begin{bmatrix}\chi_\lambda\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{2m}\chi_\lambda\end{bmatrix} \tag{4.79}$$

并用二分量旋量函数 $\chi_\lambda(\boldsymbol{r})$ 作为非相对论的核子波函数．(4.79) 仍采用自然单位，$\hat{\boldsymbol{p}}=-\mathrm{i}\nabla$ 为动量算符．可将流 (4.78) 用非相对论波函数 $\chi_\lambda(\boldsymbol{r})$ 表达．为此只需计算下列各量到 $\dfrac{p}{mc}$ 的一次幂：

$$\mathrm{i}\overline{\psi}_{\lambda_p}\gamma_4\psi_{\lambda_n}\approx\mathrm{i}\chi_{\lambda_p}^\dagger\chi_{\lambda_n}\ , \tag{4.80}$$

$$\mathrm{i}\overline{\psi}_{\lambda_p}\boldsymbol{\gamma}\psi_{\lambda_n}=\psi_{\lambda_p}^\dagger\boldsymbol{\alpha}\psi_{\lambda_n}\approx[(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\chi_{\lambda_p})^\dagger\boldsymbol{\sigma}\chi_{\lambda_n}+\chi_{\lambda_p}^\dagger\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})\chi_{\lambda_n}]/2m\ , \tag{4.81}$$

$$\mathrm{i}\overline{\psi}_{\lambda_p}\gamma_4\gamma_5\psi_{\lambda_n}=\mathrm{i}\psi_{\lambda_p}^\dagger\gamma_5\psi_{\lambda_n}\approx-\mathrm{i}[(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\chi_{\lambda_p})^\dagger\chi_{\lambda_n}+\chi_{\lambda_p}^\dagger(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})\chi_{\lambda_n}]/2m\ , \tag{4.82}$$

$$\mathrm{i}\overline{\psi}_{\lambda_p}\boldsymbol{\gamma}\gamma_5\psi_{\lambda_n}=\psi_{\lambda_p}^\dagger\boldsymbol{\alpha}\gamma_5\psi_{\lambda_n}\approx-\chi_{\lambda_p}^\dagger\boldsymbol{\sigma}\chi_{\lambda_n}\ . \tag{4.83}$$

将 (4.80) ～ (4.83) 代入 (4.78)，再与 (4.74) 一起分别代入 (4.52) 的 $\hat{J}_\kappa^+$ 与 $\hat{j}_\kappa$．对核子态和电子–反中微子态取矩阵元后对坐标 $\boldsymbol{r}$ 积分．经分部积分得单核子 β 跃迁矩阵元

$$\begin{aligned}(H'_\beta)_{\lambda_p\lambda_n}&=\int(\mathscr{H}'_\beta)_{\lambda_p\lambda_n}\mathrm{d}\tau\\ &=-\frac{G}{\sqrt{2}}\int\chi_{\lambda_p}^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\left(A+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\sigma}+C\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{m}+\boldsymbol{D}\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{p}}}{m}\right)\chi_{\lambda_n}\mathrm{d}\tau\ ,\end{aligned} \tag{4.84}$$

其中

$$A=g_{\mathrm{V}}\left(\mathrm{i}b_4-\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{k}}{2m}\right)\ , \tag{4.85}$$

$$\boldsymbol{B}=-\left[g_{\mathrm{V}}\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{b}}{2m}+g_{\mathrm{A}}\left(\boldsymbol{b}-\mathrm{i}b_4\frac{\boldsymbol{k}}{2m}\right)\right]\ , \tag{4.86}$$

$$C=-g_{\mathrm{A}}\mathrm{i}b_4\ , \tag{4.87}$$

$$\boldsymbol{D}=g_{\mathrm{V}}\boldsymbol{b}\ , \tag{4.88}$$

均可由电子–中微子流中的 $\boldsymbol{k}$ 和 b_κ，$\kappa=1,2,3,4$ 算得．引进同位旋自由度，可将中子态 χ_{λ_n} 和质子态 χ_{λ_p} 统一为核子态 χ_λ．现在量子数集合 λ 中不仅含空间与自旋自由度的量子数，还含同位旋量子数 τ_3，$\tau_3=-1$ 为中子态，$\tau_3=1$ 为质子态．(4.84) 可表为

$$(H'_\beta)_{\lambda_f\lambda_i}=-\frac{G}{\sqrt{2}}\int\chi_{\lambda_f}^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\left(A+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\sigma}+C\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{m}+\boldsymbol{D}\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{p}}}{m}\right)\frac{\tau_+}{2}\chi_{\lambda_i}\mathrm{d}\tau\ , \tag{4.89}$$

其中 λ_i 与 λ_f 分别为始态与末态核子的量子数集合，

$$\frac{\tau_+}{2}\equiv\frac{1}{2}(\tau_1+\mathrm{i}\tau_2)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \tag{4.90}$$

为同位旋第三分量的升算符，它将中子态变成质子态．β 衰变的核子流受制于核子的夸克结构，且受强作用的重整化．(4.47) 只是它精确到 $\dfrac{p}{mc}$ 的零次幂的表示式．如果精确到 $\dfrac{p}{2m}$ 的一次幂就应在其中加一项

$$\frac{g'}{2m}\ \mathrm{i}\hat{\overline{\Psi}}_{\mathrm{p}}\sigma_{\kappa\kappa'}k_{\kappa'}\hat{\Psi}_{\mathrm{n}}\ , \tag{4.91}$$

其中 $\sigma_{\kappa\kappa'}$ 的定义见 (2.62)，$k_{\kappa'}$，$\kappa'=1,2,3,4$ 为始态中子与末态质子四动量的差，按能量动量守恒亦即放射出的电子与反中微子四动量的和．不过附加项 (4.91) 不改变跃迁矩阵元非相对论约化的形式 (4.84) 或 (4.89)，只是将其中系数 $\boldsymbol{B}$ 的表达式 (4.86) 略为更动．即在它右边的方括号内增加一项

① 参阅：张启仁，《量子力学》，§16.7，高等教育出版社，1989.

$$g'\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{b}}{2m}\quad, \tag{4.92}$$

并因而增加一个待定常数 g'. 原子核β衰变矩阵元应是其中各单核子贡献的和. 用 $|i\rangle$与$|f\rangle$分别表始态和末态原子核，它的β跃迁矩阵元为

$$\langle f|\hat{H}'_\beta|i\rangle=-\frac{G}{\sqrt{2}}\langle f|\sum_{t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_t}\left(A+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\sigma}_t+C\frac{\boldsymbol{\sigma}_t\cdot\hat{\boldsymbol{p}}_t}{m}+\boldsymbol{D}\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{p}}_t}{m}\right)\frac{(\tau_+)_t}{2}|i\rangle, \tag{4.93}$$

对t的求和遍及所有核子.

跃迁矩阵元是一个在原子核占据的空间中的积分. 由于此处的$\boldsymbol{k}$与γ衰变中γ光子的波矢量大小同数量级，$|\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}|\leqslant kR$ 也是小量，其中 R 为由核的中心到边缘的最大距离. 将平面波作泰勒展开:

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=1-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\frac{1}{2}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})^2+\cdots+\frac{(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})^l}{l!}+\cdots. \tag{4.94}$$

在(4.93)的计算中只取到这个展开式的具非零贡献的最低次幂. 这就是β跃迁矩阵元的多极展开. 用 I_iM_i 和 $I_f\ M_f$分别表示β衰变始末态核的角动量量子数，跃迁矩阵元可表成 CG 系数 $C^{I_i\ M_i}_{I_f\ M_f\ l\ M_i-M_f}$ 的线性组合. 称跃迁矩阵元中含因子 $C^{I_i\ M_i}_{I_f\ M_f\ l\ M_i-M_f}$ 的项代表 2^l极β跃迁，这种跃迁的选择定则为

$$\left.\begin{aligned}&\Delta I=I_f-I_i=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots,\pm l\ ,\\&\Delta M=M_f-M_i=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots,\pm l\ ,\\&I_i+I_f\geqslant l\ .\end{aligned}\right\} \tag{4.95}$$

它表示衰变中放出的电子-反中微子带走一份角动量 l. 用 Π_i 与 Π_f 分别表示始态与末态核的宇称. 角动量选择定则(4.95)可以配两种不同的宇称选择定则，即

$$\frac{\Pi_f}{\Pi_i}=(-1)^l \tag{4.96}$$

和

$$\frac{\Pi_f}{\Pi_i}=(-1)^{l+1}\ . \tag{4.97}$$

服从选择定则(4.95)和(4.96)的β跃迁称为费米跃迁，简称F跃迁. 相应的弱作用称为F作用. 选择定则(4.95)和(4.96)本身则称为F选择定则. 服从选择定则(4.95)和(4.97)的β跃迁称为迦莫夫-泰勒(Gamov-Teller)跃迁，简称G-T跃迁，相应的弱作用称为G-T作用，而选择定则(4.95)和(4.97)本身则称为G-T选择定则. 与γ跃迁中的选择定则比较，F跃迁相当于那里的电多极跃迁，G-T跃迁则相当于磁多极跃迁. 跃迁矩阵元(4.93)右边圆括号内含 $A,\boldsymbol{B},C,\boldsymbol{D}$ 的四项中，后两项的大小与前两项的大小之比可估计为 $\dfrac{p}{m}$，在与单位制无关的形式中即为 $\dfrac{p}{mc}$. 用 $\hbar ck$ 估计电子-反中微子系统的能量，它应与核内核子能量同量级，因而又可估计为$\dfrac{p^2}{m}$. 按测不准关系有 $p\sim\dfrac{\hbar}{R}$. 可见

$$\frac{p}{mc}\sim\hbar ck\frac{1}{pc}\sim kR\ . \tag{4.98}$$

(4.93)中 $C,\boldsymbol{D}$ 两项与展开式(4.94)中 l 次幂项配合的贡献与其中 $A,\boldsymbol{B}$ 两项与展开式(4.94)中 $l+1$ 次幂项配合的贡献量级相近. 在(4.93)中取 $A,\boldsymbol{B}$ 项，在(4.94)中取零次幂，这种配合对跃迁矩阵元的贡献最大. A 项对核而言是常数，平面波展开的零次幂项就是1，也是常数，它们配合的矩阵元不为零的条件即选择定则

$$\left.\begin{aligned}&\Delta I=I_f-I_i=0\ ,\\&\Delta M=M_f-M_i=0\ ,\end{aligned}\right\} \tag{4.99}$$

$$\frac{\Pi_f}{\Pi_i}=1\ . \tag{4.100}$$

这是 $l=0$ 的F选择定则，因此这一配合的贡献是一项F跃迁. $\boldsymbol{B}$ 项含核子的泡利算符，对核而言是一赝矢量，它与平面波的零次幂项1

配合仍是一赝矢量．赝矢量的三个分量可组成一阶不可约张量，矩阵元不为零的条件即 CG 系数 $C^{I_i\ M_i}_{I_f\ M_f\ 1\ M_i-M_f}$ 和相应约化矩阵元不为零的条件．其中 CG 系数不为零的条件给出角动量的选择定则：

$$\left.\begin{aligned}&\Delta I=I_f-I_i=0,\ \pm 1\ ,\\&\Delta M=M_f-M_i=0,\ \pm 1\ ,\\&I_i+I_f\geqslant 1.\end{aligned}\right\}\qquad(4.101)$$

赝矢量在空间反演下不变，因此宇称的选择定则同 (4.100)．(4.101) 与 (4.100) 组成 $l=1$ 的 G-T 选择定则，因此这一贡献为 G-T 跃迁．(4.101) 最后一个不等式除外了 0-0 跃迁．如果不除外 0-0 跃迁，即若只保留 (4.101) 的前两式，它就包含了选择定则 (4.99)．这种选择定则与宇称的选择定则 (4.100) 一起，选出一组 β 衰变始末态核．只要没有别的选择定则禁戒，能量上又允许，这样选出的始末态核间的 β 跃迁几率都比较大，称为容许 β 跃迁．容许跃迁中的 0-0 跃迁为纯 F 跃迁，$\Delta I=\pm 1$ 的跃迁为纯 G-T 跃迁，其它情形为 F 与 G-T 混合跃迁．对轻核，中子数与质子数相近，都排到相同的子壳层．在这种情形下，β 衰变始末态核的波函数非常相似，重叠很好．这使积分得到的跃迁矩阵元特别大，因而跃迁几率特别大．这种 β 跃迁称为超容许跃迁．表 4－1 中列举了一些超容许跃迁的例子．

表 4－1　一些超容许 β 跃迁

衰变方式	半寿期 $t_{1/2}$/s	$ft_{1/2}$/s
${}^{1}_{0}n \xrightarrow{\beta^-} {}^{1}_{1}p$	637	1115
${}^{3}_{1}H \xrightarrow{\beta^-} {}^{3}_{2}He$	3.87×10^{8}	1131
${}^{14}_{8}O \xrightarrow{\beta^+} {}^{14}_{7}N^*$	71.36	3127
${}^{26}_{13}Al^* \xrightarrow{\beta^-} {}^{26}_{12}Mg$	6.374	3086
${}^{34}_{17}Cl \xrightarrow{\beta^+} {}^{34}_{16}S$	1.565	3140
${}^{50}_{25}Mn \xrightarrow{\beta^+} {}^{50}_{24}Cr$	0.286	3125

在 (4.93) 中取 $C, \boldsymbol{D}$ 项，在 (4.94) 中取零次幂项，跃迁矩阵元中的核算符分别为

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}_\ell\cdot\hat{\boldsymbol{p}}_\ell}{m}\quad 和\quad \frac{\hat{\boldsymbol{p}}_\ell}{m}\ .\qquad(4.102)$$

在 (4.93) 中仍取 $A, \boldsymbol{B}$ 项，但在 (4.94) 中取一次项，跃迁矩阵元中的核算符分别为

$$\boldsymbol{r}_\ell\quad 和\quad \boldsymbol{r}_\ell\,\boldsymbol{\sigma}_\ell\ .\qquad(4.103)$$

这四项对跃迁矩阵元的贡献数量级相近，而比容许跃迁矩阵元小两个量级．这是因为它们多 kR 的一个幂次．这种跃迁称为一级禁戒跃迁．(4.102) 与 (4.103) 的四个核算符在空间反演中都变号，因此对跃迁矩阵元贡献不为零的宇称选择定则为

$$\frac{\Pi_f}{\Pi_i}=-1\ .\qquad(4.104)$$

(4.102) 中的 $\dfrac{\hat{\boldsymbol{p}}_\ell}{m}$ 与 (4.103) 中的 $\boldsymbol{r}_\ell$ 都是矢量，可组成一阶不可约张量，在跃迁矩阵元中都贡献一CG 系数因子 $C^{I_i\ M_i}_{I_f\ M_f\ 1\ M_i-M_f}$，它不为零的条件即角动量选择定则

$$\left.\begin{aligned}&\Delta I=I_f-I_i=0,\ \pm 1\ ,\\&\Delta M=M_f-M_i=0,\ \pm 1\ ,\\&I_i+I_f\geqslant 1\ .\end{aligned}\right\}\qquad(4.105)$$

(4.103) 中的算符 $\boldsymbol{r}_\ell\boldsymbol{\sigma}_\ell$ 可分出一赝标量 $\boldsymbol{\sigma}_\ell\cdot\boldsymbol{r}_\ell$ 和一个二阶不可约赝张量．前者与 (4.102) 中的赝标量 $\dfrac{\boldsymbol{\sigma}_\ell\cdot\hat{\boldsymbol{p}}_\ell}{m}$ 有相同的变换性质，对跃迁矩阵元贡献的 CG 系数因子为 $C^{I_i\ M_i}_{I_f\ M_f\ 0\ 0}$，角动量的选择定则为

$$\left.\begin{aligned}&\Delta I=I_f-I_i=0\ ,\\&\Delta M=M_f-M_i=0\ .\end{aligned}\right\}\qquad(4.106)$$

二阶不可约赝张量对跃迁矩阵元贡献的 CG 系数因子为 $C^{I_f\ M_f}_{I_i\ M_i\ 2\ M_f-M_i}$，因而有角动量选择定则

$$\left.\begin{aligned}\Delta I&=I_f-I_i=0,\ \pm1,\ \pm2\ ,\\ \Delta M&=M_f-M_i=0,\pm1,\ \pm2\ ,\\ I_i+I_f&\geqslant2\ .\end{aligned}\right\}\tag{4.107}$$

(4.105) 的第三式排除 0-0 跃迁，而 (4.107) 的末式则排除 0-0, 0-1 和 1-0 跃迁. (4.104) 与 (4.105) 合起来是 F 选择定则，由它选出来的 F 跃迁为 F 跃迁. (4.104) 与 (4.106) 或 (4.107) 合起来是 G-T 选择定则，由它们选出来的跃迁为 G-T 跃迁. 不过这里有重叠. 看来似乎 (4.105) 与 (4.106) 可并入 (4.107)，将 (4.104) 与 (4.107) 合起来作一级禁戒跃迁的选择定则. 当然可在其中仔细区分. 例如宇称改变的 0-0 跃迁只能来自 (4.104) 与 (4.106) 的组合，是纯 G-T 跃迁. 宇称改变的 0-1 或 1-0 跃迁只能来自 (4.104) 与 (4.105) 的组合，是纯 F 跃迁. 而宇称改变的 $\Delta I=\pm2$ 的跃迁来自 (4.104) 与 (4.107) 的组合，是纯 G-T 跃迁. 其他情形为 F 跃迁与 G-T 跃迁的混合. 如此等等. 总之 (4.93) 中的 A, $\boldsymbol{B}$ 项与展开式 (4.94) 中的 l 次项相配合，或 (4.93) 中的 C, $\boldsymbol{D}$ 项与 (4.94) 中的 $l-1$ 次项相配合，给出 l 阶禁戒跃迁. 而其中 A, $\boldsymbol{D}$ 项给出的是 F 跃迁，$\boldsymbol{B}$, C 项则给出 G-T 跃迁.

在 b_κ 中除去因子 $\sqrt{\mathrm{d}^3k_e\mathrm{d}^3k_{\bar\nu}}\,/(2\pi)^3$，定义剩下的因子为

$$b'_\kappa=\mathrm{i}\bar{u}_{\lambda_e}\gamma_\kappa(1+\gamma_5)u_{-\lambda_{\bar\nu}}\ .\tag{4.108}$$

用 b'_κ 代替 (4.85) ~ (4.88) 右边的 b_κ，可定义

$$A'=g_\mathrm{V}\left(\mathrm{i}b'_4-\frac{\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{k}}{2m}\right)\ ,\tag{4.109}$$

$$\boldsymbol{B}'=-\left[g_\mathrm{V}\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{b}'}{2m}+g_\mathrm{A}\left(\boldsymbol{b}'-\mathrm{i}b'_4\frac{\boldsymbol{k}}{2m}\right)\right]\ ,\tag{4.110}$$

$$C'=-g_\mathrm{A}\mathrm{i}b'_4\ ,\tag{4.111}$$

$$\boldsymbol{D}'=g_\mathrm{V}\boldsymbol{b}'.\tag{4.112}$$

固定电子与反中微子的发射方向与自旋态，单位时间内始态核 i 通过 β 衰变跃迁到末态核 f 的几率为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}P^\beta_{i\to f}&=\frac{2\pi}{\hbar}\ |\langle f|\hat{H}'_\beta|i\rangle|^2\delta(E_e+E_{\bar\nu}-E_d)\\&=\frac{(E_e^2-m^2c^4)(E_d-E_e)^2}{(2\pi)^5\hbar^7c^5}\ |T_{fi}|^2\mathrm{d}p_e\ \mathrm{d}\Omega_e\mathrm{d}\Omega_{\bar\nu}\ ,\end{aligned}\tag{4.113}$$

其中 E_e 与 $E_{\bar\nu}$ 分别为电子与反中微子能量，

$$E_d=E_i-E_f\ ,\tag{4.114}$$

E_i 与 E_f 分别为始末态核的能量，所有能量都计及了与静止质量相应的静止能量. $\hat{\boldsymbol{p}}_e$ 为电子动量，$\mathrm{d}\Omega_e$ 为电子发射方向张的立体角元，$\mathrm{d}\Omega_{\bar\nu}$ 为反中微子运动方向张的立体角元.

$$T_{fi}=-\frac{G}{\sqrt{2}}\langle f|\sum_l\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_l}\left(A'+\boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{\sigma}_l+C'\frac{\boldsymbol{\sigma}_l\cdot\hat{\boldsymbol{p}}_l}{m}+\boldsymbol{D}'\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{p}}_l}{m}\right)\frac{(\tau_+)_l}{2}|i\rangle.\tag{4.115}$$

通常不测衰变前后原子核角动量的投影状态，因此应将几率对末态核角动量投影求和并对始态核角动量投影求平均. 如果始态核是不极化的，即它的取向分布是无规的，则这样求和和平均后的跃迁几率应与电子-反中微子整体的空间取向无关，但可与反中微子相对于电子的取向有关. 用 $\mathrm{d}\Omega$ 表示反中微子相对于电子取向的方位立体角元，将 (4.113) 如此求和，平均和对 $\mathrm{d}\Omega_e$ 积分后得单位时间内的平均跃迁几率

$$\overline{\mathrm{d}P^\beta_{i\to f}}=\frac{(E_e^2-m_e^2c^4)(E_d-E_e)^2}{8\pi^4\hbar^7c^5}\ \overline{|T_{fi}|^2}\mathrm{d}p_e\mathrm{d}\Omega\ .\tag{4.116}$$

即使对极化的始末态核，只要不观测电子-反中微子整体的取向，也可用 (4.116) 式并按实际情况做其中的求和与平均. 此时要将对电子-反中微子整体取向的平均包含在内. 同样，如不观察反中微子相对电子的取向，可将 (4.116) 对 $\mathrm{d}\Omega$ 在 4π 立体角内积分. 这相当于将它对电子-反中微子相对取向求平均后乘以 4π，得

$$P^\beta_{i\to f}=\frac{(E_e^2-m_e^2c^4)(E_d-E_e)^2}{2\pi^3\hbar^7c^5}\ \overline{|T_{fi}|^2}\mathrm{d}p_e\ .\tag{4.117}$$

这里取平均的内涵进一步扩充，包含了对反中微子－电子相对取向的平均．若β衰变的跃迁矩阵元 T_{fi} 是电子能量的缓变函数，(4.117)中与 $\overline{|T_{fi}|^2}$ 相乘的因子就表达了β电子的动量谱．单位动量区间中放出的β电子数应为

$$I(p_e)\propto p_e^2(E_d-\sqrt{p_e^2c^2+m_e^2c^4}\ )^2. \tag{4.118}$$

以上的讨论中对放出的β电子采用了平面波近似(4.68)．由于受核电荷的作用，β电子的波函数并非平面波，而是与平面波对应的库仑波函数[①]．当电子动能很小时库仑波函数与平面波差别显著，上述近似已不能用．好在跃迁矩阵元只是在核内的积分，只需在核内用库仑波函数代替平面波．在电子看来，原子核几乎只是一个点，平面波与库仑波函数在其中均无显著变化，都可用它们在原点即原子核中心的值代替．对平面波 $e^{ik\cdot r}$ 此值为 1．设与此平面波对应的库仑波函数为 $\psi_c(r)$，考虑核电荷对β电子的作用只需在跃迁矩阵元上乘以因子 $\psi_c(0)$，即在跃迁几率上乘以

$$F(Z,E)=|\psi_c(0)|^2=\frac{\zeta}{e^{\zeta}-1}\ , \tag{4.119}$$

其中

$$\zeta=\pm 2\pi Z\alpha m_e c/p_e\ . \tag{4.120}$$

Z 为末态核的电荷数，α 为精细结构常数，

$$E=E_e-m_ec^2=\sqrt{p_e^2c^2+m_e^2c^4}\ -m_ec^2 \tag{4.121}$$

为β电子动能．对β衰变在(4.120)中取负号，对 β^+ 衰变的库仑修正则在(4.120)中取正号．$\beta^{\pm}$ 跃迁几率的库仑修正因子 $F(Z,E)$ 称为费米函数．它的表达式(4.119)～(4.120)是非相对论量子力学的结果，适用于低电荷数 $Z<30$ 和低能 $E<1\mathrm{MeV}$ 的情形．对较高的 Z 和 E 必须对 $F(Z,E)$ 作相对论修正．这是一个明确的数学问题，人们对此已作了相当详尽的研究，给出了计算各种条件下的费米函数 $F(Z,E)$ 的公式和图表以资应用(参阅 Gove 1971)，(4.117)经库仑修正后成为

① 参阅张启仁，《量子力学》，§6.6，高等教育出版社，1989.

$$P^{\beta}_{i\to f}=F(Z,E)\frac{(E_e^2-m_e^2c^4)(E_d-E_e)^2}{2\pi^3\hbar^7c^5}\overline{|T_{fi}|^2}\mathrm{d}p_e\ , \tag{4.122}$$

其中 T_{fi} 仍为对β电子作平面波近似算得的跃迁矩阵元．对容许跃迁，电子－中微子平面波可用它的展开式(4.94)的首项，即常数 1 代替．由此算得的跃迁矩阵元 T_{fi} 确为β电子能量的缓变函数，β电子谱为

$$I(p_e)\propto F(Z,E)p_e^2(E_d-\sqrt{p_e^2c^2+m_e^2c^4}\ )^2. \tag{4.123}$$

此式就是(4.118)的库仑修正．在禁戒跃迁的矩阵元中会出现展开式(4.94)的非零次项．l 级禁戒跃迁矩阵元中出现的 k 的最高幂次为 l．l 级禁戒跃迁几率中就会出现一个动量有关因子 k^{2l}．由于库仑修正对展开式(4.94)中的各项是不相同的，这一动量有关因子的作用要与库仑修正因子统一考虑．将这两方面因素的总影响用一个因子 $F_l(Z,E)$ 表示，(4.123)应修正为

$$\begin{aligned}I(p_e)&\propto F_l(Z,E)p_e^2(E_d-\sqrt{p_e^2c^2+m_e^2c^4}\ )^2\\&=F_l(Z,E)p_e^2(E_m-E)^2\ ,\end{aligned} \tag{4.124}$$

其中

$$E_m=E_d-m_ec^2 \tag{4.125}$$

为β电子的最大动能．由于对平面波展开式(4.94)各项的库仑修正是完全清楚的，$F_l(Z,E)$ 是一个完全清楚的，可以彻底计算的函数．(4.124)表明 $[I(p_e)/(F_l(Z,E)p_e^2)]^{1/2}$ 与β电子动能 E 有直线关系．这种关系画出来就是居里描绘．作居里描绘已是对β衰变数据常规处理的一部分．它的直线性已被很好地证明．作居里描绘需选择 $F_l(Z,E)$，具体地说就是要选择禁戒次数 l．以直线性来选择 l 可定出一个β衰变过程的禁戒级别．$l=0$ 则是容许跃迁．$F_0(Z,E)=F(Z,E)$．

将(4.122)对动量 p_e 积分得单位时间内β衰变总几率

$$\lambda_\beta=\frac{1}{2\pi^3\hbar^7c^3}\int_0^{p_m}F(Z,E)p_e^2(E_m-E)^2\overline{|T_{fi}|^2}\mathrm{d}p_e\ , \tag{4.126}$$

积分上限

$$p_m = \frac{1}{c}\sqrt{E_m^2 + 2E_m m_e c^2} \qquad (4.127)$$

为 β 电子的最大动量. 再一次扩充平均值 $\overline{|T_{fi}|^2}$ 的内涵, 将以 $F(Z,E)p_e^2(E_m - E)^2$ 为权重的对动量 p_e 的平均包含在内, 则(4.126)可表为

$$\lambda_\beta = \frac{m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7}\overline{|T_{fi}|^2} f(Z, E_m), \qquad (4.128)$$

其中

$$f(Z, E_m) \equiv \frac{1}{m_e^5 c^7}\int_0^{p_m} F(Z, E) p_e^2 (E_m - E)^2 \mathrm{d}p_e . \qquad (4.129)$$

λ_β^{-1} 为 β 衰变的平均寿命,

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda_\beta} \qquad (4.130)$$

为 β 衰变的半寿期. 它们都包含了末态核对 β 电子库仑作用的影响. 为扣除这种核外因素, 较干净地显示核信息, 宜在(4.128)两端同除 $f(Z, E_m)$, 即在平均寿命或半寿期上乘以 $f(Z, E_m)$. 因此称 $ft_{1/2}$ 为可比半寿期. 表 5 中列举的超容许跃迁的半寿期在数量级上相差甚大, 却有很相近的可比半寿期. 显示它们的核矩阵元 T_{fi} 的大小确实相近.

采用(4.56)中的第二项, 可对应地发展 β^+ 衰变的理论. 从(4.54)与(4.55)可以看出, $\hat{j}_\kappa^-$ 将一个质子变为中子, 而 $\hat{j}_\kappa^+$ 则将一个中子变成中微子. 所谓将一个电子变成中微子就是消灭掉一个电子同时产生一个中微子. 如果消灭的这个电子是狄拉克海中的一个负能量电子, 则会产生出一个负能态电子的空穴, 即产生出一个正电子. 这就是 β^+ 衰变. 如果消灭的是一个正能态电子, 则成为电子俘获. 通常俘获的是核所在原子内的一个电子, 称为轨道电子俘获. 在一般的轻子流(4.58)和(4.59)中, 除电子-(电子)中微子流外还有 μ 子-μ 中微子流和 τ 子-τ 中微子流. 负 μ 子进入原子轨道形成的 μ 原子早已被观察到, 并已有详细的研究. 相应地, 由 μ 子-μ 中微子流替代电子-(电子)中微子流与质子-中子流弱耦合而导致的 μ 俘获也早已被观察到, 且也已有详细的研究. 在这一过程中, 核内一个质子变成中子, 与此同时负 μ 子消失并发出一个 μ 中微子. μ 俘获的研究, 及其与电子俘获和 $\beta^\pm$ 衰变过程的比较, 对弱作用普适理论的建立起过重要作用. 而弱作用的普适理论则是后来发展弱电统一理论的基础.

4.3 矢量流守恒(CVC)与轴矢流部分守恒(PCAC), 手征对称性与 σ 模型

在普适弱作用哈密顿量密度(4.67)中, 轻子流具有简单的形式(4.58)与(4.59), 显示出它们的基本性. 夸克流(4.61)~(4.65)也是简单的, 表明它们也是基本流. 卡比博角 θ_c 和它表示的混合(4.61)可理解为强作用和弱作用具有不同对称性的结果, 前者奇异数守恒而后者奇异数不守恒. 强、弱作用对称性的这种差异和 θ_c 取值(4.66)只能在今后强、弱作用的统一理论中解释. 值得注意的是, 强子流在强子层次上的表达式(4.43)~(4.45)中矢量流(4.44)的系数 g_v 与夸克层次奇异数守恒矢量流的系数(4.66)一样. 这种情形与电荷类似: 在强子层次上计算的电荷与在夸克层次上计算的电荷是一样的. 即使无视强子的夸克结构, 一个裸强子也会因为强作用而放出并重新吸收虚强子而使自身被强子和反强子云缭绕, 像穿了一身衣服一样. 例如一个质子可能在一段时间内转化为一个中子和一个介子, 然后再转化为一个裸质子. 一个介子也可能在一段时间内转化为重子-反重子对, 然后再转化为一个裸介子. 这类虚过程会显著影响强子的性质, 改变它的一些物理量的取值. 这种机制称为重整化. 然而强作用的重整化却不改变它的电荷值. 一个裸质子经电磁作用的重整化后具有电荷 $+e$, 在强作用下可转化为一个中子和一个 π^+ 介子, 总电荷仍是 $+e$. π^0 介子电荷为零, 在强作用下可转化为一质子-反质子对, 总电荷依然为零. 由此可见, 强作用的重整化不改变电荷值反映的是强作用中的电荷守恒. (1.15)将强子电荷分解成

两部分，一部分为同位旋第三分量 T_3 的贡献，称为同位旋矢量部分，简称矢量部分；另一部分为重子数 B 和奇异数 S 的贡献，称为同位旋标量部分，简称标量部分．直接的实验事实表明重子数 B 和奇异数 S 在强作用中分别都守恒，因而电荷守恒就意味着同位旋第三分量守恒．人们关于强作用的知识从各种角度显示，它在同位旋转动变换下是不变的．这就是强作用近似味 SU(3) 对称下的严格的同位旋 SU(2) 子对称．在这种对称下同位旋守恒，即它的各分量都守恒．守恒性质可用连续性方程表示．同位旋第 K 分量守恒可表为

$$\partial_\mu \hat{V}_\mu^{(K)} = 0 , \tag{4.131}$$

其中

$$\hat{V}_\mu^{(K)} = \mathrm{i}\hat{\bar{\Psi}}\gamma_\mu T_K \hat{\Psi} \tag{4.132}$$

为同位旋第 K 分量流密度 4 维矢量的第 μ 分量．取 $K=1,2,3$，得到同位旋矢量的普通表示．其中 $K=3$ 的分量与电荷值相关．也可将同位旋矢量的三个分量重新组合，成为同位旋空间的一阶不可约张量．取 $K=0,\pm1$，其中

$$T_0 \equiv T_3 = \frac{1}{2}\tau_3 , \tag{4.133}$$

$$T_{\pm1} \equiv \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(T_1 \pm \mathrm{i}T_2) . \tag{4.134}$$

在这种表示中，T_0 与电荷相关，

$$T_+ \equiv -\sqrt{2}\,T_{+1} = T_1 + \mathrm{i}T_2 = \frac{1}{2}(\tau_1 + \mathrm{i}\tau_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.135}$$

为电荷数的升算符，将一个中子变成一个质子，而

$$T_- \equiv \sqrt{2}\,T_{-1} = T_1 - \mathrm{i}T_2 = \frac{1}{2}(\tau_1 - \mathrm{i}\tau_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.136}$$

为电荷数的降算符，将一个质子变成一个中子．β 衰变中的核子矢量流 (4.44) 可表为

$$\hat{V}_\mu^{\pm} = \mathrm{i}g_v\hat{\bar{\Psi}}\gamma_\mu T_\pm\hat{\Psi} = \mp\sqrt{2}\,g_v\mathrm{i}\hat{\bar{\Psi}}\gamma_\mu T_{\pm1}\hat{\Psi} = \mp\sqrt{2}\,g_v\hat{V}_\mu^{(\pm1)} . \tag{4.137}$$

可见，除一常数因子外，弱作用中核子同位旋矢量流与电磁作用中核子同位旋矢量流一起组成同位旋空间的一阶不可约张量，亦即同位旋矢量．这三个分量在强作用下均守恒．这就是强作用中的矢量流守恒，按英文字头简记为 CVC．

同位旋第 K 分量的荷为

$$\hat{Q}_K = -\mathrm{i}\int V_4^{(K)}\mathrm{d}\tau = \int\hat{\Psi}^\dagger T_K\hat{\Psi}\mathrm{d}\tau . \tag{4.138}$$

由场算符的反对易关系 (4.4) 得

$$\mathrm{i}\hbar[\hat{\Psi}(\boldsymbol{r},t),\hat{Q}_K] = T_K\hat{\Psi}(\boldsymbol{r},t) . \tag{4.139}$$

求此式两端在强作用的真空态 $|0\rangle$ 和单核子态 $|p\sigma\tau\rangle$ 之间的矩阵元，$\boldsymbol{p}$，σ 和 τ 分别为核子的动量、自旋量子数和同位旋量子数．此处 $|0\rangle$ 和 $|p\sigma\tau\rangle$ 都取为强作用哈密顿量 $\hat{H}$ 的严格本征态，即是已重整化了的．插入 $\hat{H}$ 的一个完备正交归一的本征态系 $[|n\rangle]$，左边得

$$\mathrm{i}\hbar\langle 0|[\hat{\Psi},\hat{Q}_K]|p\sigma\tau\rangle = \sum_n(\langle 0|\hat{\Psi}|n\rangle\langle n|\hat{Q}_K|p\sigma\tau\rangle - \langle 0|\hat{Q}_K|n\rangle\langle n|\hat{\Psi}|p\sigma\tau\rangle) . \tag{4.140}$$

由强作用的同位旋守恒知

$$[\hat{Q}_K,\hat{H}] = 0 , \tag{4.141}$$

$\hat{Q}_K$ 的作用不改变 $|n\rangle$ 的能量本征值．(4.140) 右边第二项为

$$\sum_n\langle 0|\hat{Q}_K|n\rangle\langle n|\hat{\Psi}|p\sigma\tau\rangle = \langle 0|\hat{Q}_K|0\rangle\langle 0|\hat{\Psi}|p\sigma\tau\rangle . \tag{4.142}$$

真空在同位旋转动下的不变性使它的同位旋为零，即 $\langle 0|\hat{Q}_K|0\rangle = 0$．这使 (4.142) 右边为零．同位旋与空间坐标和自旋属不同自由度，$\hat{Q}_K$ 的作用不会改变一个态的动量和自旋量子数．这使 (4.140) 右边第一项为

$$\sum_n\langle 0|\hat{\Psi}|n\rangle\langle n|\hat{Q}_K|p\sigma\tau\rangle = \sum_{\tau'}\langle 0|\hat{\Psi}|p\sigma\tau'\rangle\langle p\sigma\tau'|\hat{Q}_K|p\sigma\tau\rangle . \tag{4.143}$$

代入 (4.139) 左边的矩阵元，要求它与右边的矩阵元相等得

$$\sum_{\tau'}\langle 0|\hat{\Psi}|\boldsymbol{p}\sigma\tau'\rangle\langle\boldsymbol{p}\sigma\tau'|\hat{Q}_K|\boldsymbol{p}\sigma\tau\rangle=\langle 0|T_K\hat{\Psi}|\boldsymbol{p}\sigma\tau\rangle\ . \tag{4.144}$$

将场算符用一组两个正交归一同位旋量 χ_τ 展开:

$$\hat{\Psi}=\sum_{\tau=\pm1}\hat{\psi}_\tau\chi_\tau\ ; \tag{4.145}$$

系数 $\hat{\psi}_\tau$ 为具同位旋量子数 τ 的场算符,本身已只是空间坐标和自旋的函数.

$$T_K\hat{\Psi}=\sum_\tau\sum_{\tau'}\hat{\psi}_\tau\chi_{\tau'}(T_K)_{\tau'\tau} \tag{4.146}$$

$(T_K)_{\tau'\tau}=\chi_{\tau'}^\dagger T_K\chi_\tau$ 为 T_K 的矩阵元. 若取 χ_τ 为 T_K 的本征旋量, T_K 成为对角矩阵,此式变为

$$T_K\hat{\Psi}=\sum_\tau(T_K)_\tau\hat{\psi}_\tau\chi_\tau\ , \tag{4.147}$$

对角元

$$(T_K)_\tau=(T_K)_{\tau\tau} \tag{4.148}$$

为 χ_τ 的 T_K 本征值. 将 (4.145) 与 (4.147) 分别代入 (4.144) 两边,并将 $|\boldsymbol{p}\sigma\tau\rangle$ 取成 $\hat{Q}_K$ 的本征态,本征值记作 $(Q_K)_\tau$,得

$$(Q_K)_\tau\sum_{\tau'}\langle 0|\hat{\psi}_{\tau'}|\boldsymbol{p}\sigma\tau\rangle\chi_{\tau'}=\sum_{\tau'}\langle 0|\hat{\psi}_{\tau'}|\boldsymbol{p}\sigma\tau\rangle\chi_{\tau'}(T_K)_{\tau'} \tag{4.149}$$

比较 $\chi_{\tau'}$ 的系数知

$$(Q_K)_\tau\langle 0|\hat{\psi}_{\tau'}|\boldsymbol{p}\sigma\tau\rangle=\langle 0|\hat{\psi}_{\tau'}|\boldsymbol{p}\sigma\tau\rangle(T_K)_{\tau'}\ . \tag{4.150}$$

$|\boldsymbol{p}\sigma\tau\rangle$ 为单核子态,应能由场算符从真空态产生. 在场算符的两个同位旋分量 $\hat{\psi}_{\tau'=1}$ 和 $\hat{\psi}_{\tau'=-1}$ 中至少有一个在态 $|0\rangle$ 和态 $|\boldsymbol{p}\sigma\tau\rangle$ 间有不为零的矩阵元. 将此分量记作 $\hat{\psi}_\tau$, 由 (4.150) 得

$$(Q_K)_\tau=(T_K)_\tau\ . \tag{4.151}$$

此式表明,经强作用重整化后的同位旋荷 $(Q_K)_\tau$ 与未经重整化的同位旋本征值 $(T_K)_\tau$ 相等. 强作用的重整化不改变同位旋荷. 由于 T_K 的两个本征值彼此不同, (4.150) 导致

$$\langle 0|\hat{\psi}_{\tau'}|\boldsymbol{p}\sigma\tau\rangle=\langle 0|\hat{\psi}_\tau|\boldsymbol{p}\sigma\tau\rangle\delta_{\tau\tau'}\ . \tag{4.152}$$

考虑同位旋的第 K' 分量. 设 χ_τ 为 $T_{K'}$ 的本征旋量, $|\boldsymbol{p}\sigma\tau\rangle$ 为 $\hat{Q}_{K'}$ 的本征态. 将 (4.145) 和 (4.146) 分别代入 (4.144) 两边,利用 (4.152) 得

$$\sum_{\tau'}\langle 0|\hat{\psi}_{\tau'}|\boldsymbol{p}\sigma\tau'\rangle(Q_K)_{\tau'\tau}\chi_{\tau'}=\sum_{\tau'}\langle 0|\hat{\psi}_\tau|\boldsymbol{p}\sigma\tau\rangle(T_K)_{\tau'\tau}\chi_{\tau'}, \tag{4.153}$$

其中

$$(Q_K)_{\tau'\tau}=\langle\boldsymbol{p}\sigma\tau'|\hat{Q}_K|\boldsymbol{p}\sigma\tau\rangle \tag{4.154}$$

为 $\hat{Q}_{K'}$ 表象中的 $\hat{Q}_K$ 矩阵元,

$$(T_K)_{\tau'\tau}=\chi_{\tau'}^\dagger T_K\chi_\tau \tag{4.155}$$

为 $T_{K'}$ 表象中的 T_K 矩阵元. 比较 (4.153) 两边 $\chi_{\tau'}$ 的系数知

$$\langle 0|\hat{\psi}_{\tau'}|\boldsymbol{p}\sigma\tau'\rangle(Q_K)_{\tau'\tau}=\langle 0|\hat{\psi}_\tau|\boldsymbol{p}\sigma\tau\rangle(T_K)_{\tau'\tau}\ . \tag{4.156}$$

由于强作用的同位旋对称,对量子数 τ 的不同取值, $\langle 0|\hat{\psi}_\tau|\boldsymbol{p}\sigma\tau\rangle$ 至多差一绝对值为 1 的相因子. 将这一相因子吸收到态矢量 $|\boldsymbol{p}\sigma\tau\rangle$ 中. 在这种相角约定下 $\langle 0|\hat{\psi}_\tau|\boldsymbol{p}\sigma\tau\rangle$ 与量子数 τ 的取值无关. 因此由 (4.156) 得

$$(Q_K)_{\tau'\tau}=(T_K)_{\tau'\tau}\ . \tag{4.157}$$

它表明强作用的重整化不改变同位旋的任何矩阵元. 这是矢量流守恒 (CVC) 的直接结果. 由此解释了矢量流系数 g_v 不被强作用修正的事实.

由 (4.48), (4.55) 和 (4.61) ~ (4.65) 可以看出,由基本粒子组成的弱流中,矢量流与轴矢流总按一定比例叠加. 按此比例,核子流 (4.47) 和 (4.54) 中应有 $g_A=g_v$. 然而实际上

$$g_A=1.26g_v\ . \tag{4.158}$$

既然 g_v 不受强作用修正,此式就表明轴矢流常数 g_A 受到强作用修正. 强作用的重整化修正轴矢流表明强作用过程中轴矢流不守恒. 不过 (4.158) 也表明 g_A 的修正不大,相对 g_v 的偏差不足三成. 因此轴矢流是接近守恒的. 这被称为轴矢流部分守恒,按英文字头简记为 PCAC. 守恒是对称性的表现,部分守恒则显示一种近似的对称性. 下面跟随盖尔曼等 (Gell-Mann 1960) 和康贝尔等 (Campbell 1975) 的分析,探讨这种对称性. 表示矢量流守恒的连续

性方程(4.131)就是流密度四矢量 $V_\mu^{(K)}$ 的四散度为零条件．轴矢流不守恒可表为轴流密度四矢量

$$\hat{A}_\mu^{(K)} = -\mathrm{i}\hat{\overline{\Psi}}\gamma_\mu\gamma_5 T_K\hat{\Psi} \tag{4.159}$$

的四散度非零．而轴矢流部分守恒则要求这个四散度是一个小量．轴四矢量的四散度为一轴标量，或赝标量．轴流密度四矢量(4.159)的四散度还是一同位旋矢量．既是赝标量又是同位旋矢量的最简单的物理量为 π 介子场 $\hat{\Phi}^{(K)}(r,t)$, $K=1,2,3$. 轴矢流部分守恒可表为

$$\partial_\mu \hat{A}_\mu^{(K)} = a\hat{\Phi}^{(K)} , \tag{4.160}$$

a 为小常数，待定．将 $\hat{\Psi}$ 理解为核子场，(4.159)就是核子系轴矢流密度四矢量．对一般强子系，轴矢流密度应是(4.159)的推广．轴矢流部分守恒既是强作用的一般规律就不依赖轴矢流密度的具体表达式(4.159)，它的数学表达(4.160)应一般地成立．

考虑 π 介子的衰变

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu, \quad \pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu , \tag{4.161}$$

它由弱作用引起．在普适弱作用哈密顿量密度(4.67)中取与衰变(4.161)有关的项，仍写作

$$\hat{\mathscr{H}}' = -\frac{G}{\sqrt{2}}\left(\hat{J}_\kappa^+\hat{j}_\kappa^- + \hat{j}_\kappa^+\hat{J}_\kappa^-\right) . \tag{4.162}$$

其中轻子流即 μ 子-μ 中微子流

$$\hat{j}_\kappa^- = \mathrm{i}\hat{\overline{\Psi}}_\mu\gamma_\kappa(1+\gamma_5)\hat{\Psi}_{\nu_\mu} , \tag{4.163}$$

和

$$\hat{j}_\kappa^+ = \mathrm{i}\hat{\overline{\Psi}}_{\nu_\mu}\gamma_\kappa(1+\gamma_5)\hat{\Psi}_\mu ; \tag{4.164}$$

$\hat{\Psi}_\mu$ 为 μ 子场量，它的正能级粒子为 μ^- 粒子，负能级空穴为 μ^+ 粒子；$\hat{\Psi}_{\nu_\mu}$ 为 μ 中微子场，它的正能级粒子为 μ 中微子 ν_μ，负能级空穴为反 μ 中微子 $\overline{\nu_\mu}$．轻子流(4.163)和(4.164)的矩阵元可彻底算出，是清楚的．(4.162)中的强子流 $\hat{J}_\kappa^\pm$ 却由于强作用而变得复杂，矩阵元很难由基本原理算得，不得不作唯象处理．由于是考虑奇异数守恒的过程(4.161)，可将强子流密度四矢量写成

$$\hat{J}_\kappa^\pm = \cos\theta_c(\hat{V}_\kappa^\pm - \hat{A}_\kappa^\pm) , \tag{4.165}$$

其中 $\hat{V}_\kappa^\pm$ 为矢量流密度四矢量，$\hat{A}_\kappa^\pm$ 为轴矢流密度四矢量．设考虑了强作用和电磁作用全部影响的真空态为 $|0\rangle$，单 π 介子态为 $|\boldsymbol{p},K\rangle$，$\boldsymbol{p}$ 为介子动量，K 为介子的同位旋量子数．$|0\rangle$ 和 $|\boldsymbol{p},K\rangle$ 都是含强作用和电磁作用的强子系哈密顿量的本征态．由强作用和电磁作用哈密顿量在空间反演和转动下的对称性，矩阵元

$$\langle 0|\hat{V}_\kappa^\pm|\boldsymbol{p},K\rangle = 0 . \tag{4.166}$$

在 π 介子的静止坐标系中此式特别容易证明．在此坐标系中 $\boldsymbol{p}=0$，$|0,K\rangle$ 与 $|0\rangle$ 在空间转动下都是不变的，任何三维矢量在它们间的矩阵元都是零．即对 $\kappa=1,2$ 和 3 有

$$\langle 0|\hat{V}_\kappa^\pm|0,K\rangle = 0 . \tag{4.167}$$

此式对 $\kappa=4$ 也成立则是由于 $|0\rangle$ 与 $\hat{V}_4^\pm$ 在空间反演下均不变，而作为赝标介子态，$|0,K\rangle$ 在空间反演下变号．经洛伦兹变换，由(4.167)可得(4.166)．

由量子力学知[①]，沿 κ 方向的无穷小平移算符为

$$\hat{\mathscr{D}}_\kappa = -\mathrm{i}\hat{p}_\kappa , \tag{4.168}$$

$\hat{p}_\kappa$ 为四动量的 κ 分量．这里继续采用了自然单位制．沿 κ 方向作无穷小平移 δx_κ，任一态 $|\rangle$ 变为

$$|\rangle + \delta x_\kappa\hat{\mathscr{D}}_\kappa|\rangle = (1-\mathrm{i}\delta x_\kappa\hat{p}_\kappa)|\rangle . \tag{4.169}$$

如作有限平移 Δx_κ，可将它分为 n 等份，每份

$$\delta x_\kappa = \frac{\Delta x_\kappa}{n}$$

当 $n\to\infty$ 时为无穷小平移．有限平移可由 n 次无穷小平移合成．它将任一态 $|\rangle$ 变为

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\mathrm{i}\frac{\Delta x_\kappa\hat{p}_\kappa}{n}\right)^n|\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta x_\kappa\hat{p}_\kappa}|\rangle . \tag{4.170}$$

现考虑时空点 x 上轴矢流密度四矢量在真空态 $|0\rangle$ 与单 π 介子态 $|\boldsymbol{p},K\rangle$ 间的矩阵元．由于整个系统具有时空平移对称性，这个矩阵元不

① 参阅张启仁，《量子力学》，§7.4，高等教育出版社，1989.

会因时空平移而变．沿 λ 方向作平移 $-x_\lambda$，x_λ 为 x 的 λ 分量．这一平移将 x 点移到原点．按(4.170)，平移不变性保证

$$\begin{aligned}\langle 0|\hat{A}_\kappa^\pm(x)|\boldsymbol{p},K\rangle &= \langle 0|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{p}_\lambda x_\lambda}\hat{A}_\kappa^\pm(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{p}_\lambda x_\lambda}|\boldsymbol{p},K\rangle \\ &= \langle 0|\hat{A}_\kappa^\pm(0)|\boldsymbol{p},K\rangle \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_\lambda x_\lambda} .\end{aligned} \tag{4.171}$$

p_λ，$\lambda=1, 2, 3, 4$，为 π 介子的四动量，$\boldsymbol{p}=(p_1, p_2, p_3)$，$p_4=\mathrm{i}E$，$E=\sqrt{p^2+m_\pi^2}$ 为 π 介子的能量，m_π 为 π 介子的质量．(4.171)的第二等号处还用到真空态四动量为零的事实．矩阵元 $\langle 0|\hat{A}_\kappa^\pm(0)|\boldsymbol{p},K\rangle$ 应能由 π 介子的动力学变量表出．$\hat{A}_\kappa^\pm(0)$ 为赝矢量，π 介子为赝标介子，它们一起组成的这个矩阵元应是一四维矢量．π 介子唯一的四维矢量就是它的四动量 $(\boldsymbol{p}, \mathrm{i}E)$，因此应有

$$\langle 0|\hat{A}_\kappa^\pm(0)|\boldsymbol{p},K\rangle \propto p_\kappa . \tag{4.172}$$

$\hat{A}_\kappa^+$ 和 $\hat{A}_\kappa^-$ 的作用分别增加和减少一份电荷，因此分别只在真空态与负 π 介子态 $(K=-1)$ 和真空态与正 π 介子态 $(K=+1)$ 间有非零矩阵元．按(4.171)和(4.172)可设

$$\langle 0|\hat{A}_\kappa^\pm(x)|\boldsymbol{p},\mp 1\rangle = \pm\mathrm{i}f_\pi p_\kappa\sqrt{\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3E}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_\lambda x_\lambda} , \tag{4.173}$$

f_π 为常数．将(4.166)与此式一起代入(4.165)的矩阵元，再和(4.163)与(4.164)的矩阵元一起代入(4.162)的矩阵元，即可算得 $\pi^\mp$ 介子的衰变几率和平均寿命．要求计算值与实验值一致可定得衰变常数

$$f_\pi = 93\mathrm{MeV} . \tag{4.174}$$

另一方面，设 $\hat{\Phi}^{(\pm 1)}(x)$ 为 $\pi^\mp$ 介子的重整化了的场函数，它的作用应消灭一个 $\pi^\mp$ 介子，且

$$\langle 0|\hat{\Phi}^{(\pm 1)}(x)|\boldsymbol{p},\mp 1\rangle = \sqrt{\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2E}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_\lambda x_\lambda} , \tag{4.175}$$

右边为协变的归一化平面波．在(4.173)两边取四散度，注意 $\hat{A}_\kappa^{(\pm 1)}(x) = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{A}_\kappa^\pm(x)$，得

$$\langle 0|\partial_\kappa\hat{A}_\kappa^{(\pm 1)}(x)|\boldsymbol{p},\mp 1\rangle = -f_\pi m_\pi^2\sqrt{\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2E}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_\lambda x_\lambda} , \tag{4.176}$$

其中用到 π 介子的能量动量关系 $p_\lambda p_\lambda = -m_\pi^2$．与(4.175)比较得(4.160)中的常数

$$a = -f_\pi m_\pi^2 , \tag{4.177}$$

从而有

$$\partial_\kappa\hat{A}_\kappa^{(K)} = -f_\pi m_\pi^2\hat{\Phi}^{(K)} . \tag{4.178}$$

π 介子是最轻的强子．按强子尺度 m_π 与 f_π 均为小量，(4.177)表示的常数 a 也就是小量．(4.178)表示强作用过程中轴矢流部分守恒．

为了探明这一部分守恒反映的近似对称，盖尔曼等(Gell-Mann 1960)提出了几个模型，其中包括后来在强子物理和核物理中都常用的 σ 模型．考虑一个由核子、π 介子和一种被称为 σ 的标量介子组成的强作用系统，分别用 $\Psi(x)$、$\boldsymbol{\Phi}(x)=(\Phi^{(1)}(x), \Phi^{(2)}(x), \Phi^{(3)}(x))$ 和 $\Phi_\sigma(x)$ 表示这三种粒子的场．拉格朗日密度取为

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &-\overline{\Psi}[\gamma_\mu\partial_\mu + m - g(\Phi_\sigma + \mathrm{i}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\Phi}\gamma_5)]\Psi \\ &-\frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi_\sigma\partial_\mu\Phi_\sigma + \partial_\mu\boldsymbol{\Phi}\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\Phi} + m_\sigma^2\Phi_\sigma^2 + m_\pi^2\boldsymbol{\Phi}^2) \\ &-\zeta\left[(\Phi_\sigma^2+\boldsymbol{\Phi}^2)^2 - \frac{2}{f}\Phi_\sigma(\Phi_\sigma^2+\boldsymbol{\Phi}^2)\right] .\end{aligned} \tag{4.179}$$

m，m_π 和 m_σ 分别为核子、π 介子和 σ 介子的质量，g 为 π 或 σ 介子与核子的作用常数，

$$\zeta = \frac{f^2}{2}(m_\sigma^2 - m_\pi^2) , \tag{4.180}$$

$$f = \frac{g}{2m} . \tag{4.181}$$

作变换

$$\Phi^{(4)} = \Phi_\sigma - \frac{1}{2f} = \Phi_\sigma - \frac{m}{g} , \tag{4.182}$$

代入(4.179)得

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}' , \tag{4.183}$$

$$\mathscr{L}_0 = -\overline{\Psi}[\gamma_\mu\partial_\mu - g(\Phi^{(4)} + \mathrm{i}\tau\cdot\Phi\gamma_5)]\Psi - \frac{1}{2}\sum_{K=1}^{4}(\partial_\mu\Phi^{(K)}\partial_\mu\Phi^{(K)} + m_\pi^2\Phi^{(K)}\Phi^{(K)}) - \zeta\left(\sum_{K=1}^{4}\Phi^{(K)}\Phi^{(K)} - \frac{m^2}{g^2}\right)^2 - \frac{m_\pi^2 m^2}{2g^2}, \tag{4.184}$$

$$\mathscr{L}' = -\frac{m_\pi^2 m}{g}\Phi^{(4)} = -\frac{m_\pi^2}{2f}\Phi^{(4)}. \tag{4.185}$$

其中 $\mathscr{L}_0$ 表现出一种明显的对称性．仔细的分析表明，$\mathscr{L}_0$ 在变换

$$\left.\begin{aligned} &\Psi \to (1+\mathrm{i}\tau\cdot\boldsymbol{v}\gamma_5)\Psi, \\ &\boldsymbol{\Phi} \to \boldsymbol{\Phi} - 2\boldsymbol{v}\Phi^{(4)}, \\ &\Phi^{(4)} \to \Phi^{(4)} + 2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\Phi} \end{aligned}\right\} \tag{4.186}$$

下不变，$\boldsymbol{v}$ 为一无穷小同位旋矢量．(4.186) 称为无穷小手征变换．拉格朗日量密度在这种变换下的不变性称为动力学的手征对称性．$\mathscr{L}_0$ 在手征变换下的不变性可表为

$$\frac{\delta\mathscr{L}_0}{\delta\boldsymbol{v}} = 0, \tag{4.187}$$

$\boldsymbol{v}$ 即定义在 (4.186) 的同位旋矢量，对矢量的变分理解为对它的各分量变分的集合．将变换 (4.186) 代入 (4.185) 得

$$\frac{\delta\mathscr{L}'}{\delta\boldsymbol{v}} = -\frac{m_\pi^2}{f}\boldsymbol{\Phi}. \tag{4.188}$$

这使得

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\boldsymbol{v}} = -\frac{m_\pi^2}{f}\boldsymbol{\Phi}, \tag{4.189}$$

即由于 $\mathscr{L}'$ 项，由 $\mathscr{L}$ 表达的动力学已不具有完全的手征对称．$\mathscr{L}'$ 称为拉格朗日量密度中的手征对称破缺项．下面将看到，(4.188) 右端为小量，因此 $\mathscr{L}$ 在手征变换下是近似不变的，它所表达的动力学具有近似的手征对称．

一个由 n 个场量 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 组成的系统，若拉格朗日量密度为 $\mathscr{L}(\varphi_K, \partial_\mu\varphi_K)$ 其中，$K=1, 2, \cdots, n$, $\mu=1, 2, 3, 4$，则按哈密顿原

理可由作用量

$$\mathscr{A} = \int\mathscr{L}\mathrm{d}^4x \tag{4.190}$$

取极值：$\delta\mathscr{A}=0$ 得场方程

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_K)} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_K} = 0, \quad K=1, 2, \cdots, n. \tag{4.191}$$

考虑对场量 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 的一个变换，其中含参数 ξ．显然

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\xi} = \sum_{K=1}^{n}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_K}\frac{\delta\varphi_K}{\delta\xi} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_K)}\frac{\delta(\partial_\mu\varphi_K)}{\delta\xi}\right].$$

对右边方括号中第一项用场方程 (4.191)，在第二项中交换变分 δ 和微分 ∂_μ 的次序，得

$$\partial_\mu\sum_{K=1}^{n}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_K)}\frac{\delta\varphi_K}{\delta\xi} = \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\xi}. \tag{4.192}$$

如系统具有这种变换下的对称性，拉格朗日量密度在这种变换下不变，则 $\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\xi}=0$，(4.192) 成为流密度四矢量

$$J_\mu = \sum_{K=1}^{n}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_K)}\frac{\delta\varphi_K}{\delta\xi} \tag{4.193}$$

的连续性方程，即这个流守恒．这实际是指它的荷

$$Q = -\mathrm{i}\int J_4\mathrm{d}^3x \tag{4.194}$$

不随时间改变．若 $\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\xi}\neq 0$，则流 (4.193) 不守恒．若 $\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\xi}$ 为小量，则称流 (4.193) 部分守恒．将这一普遍规律用于拉格朗日量密度 (4.183) ~ (4.185) 和变换 (4.186) 得

$$\partial_\mu A_\mu^{(K)} = -\frac{m_\pi^2}{2f}\Phi^{(K)}, \quad K=1,2,3, \tag{4.195}$$

其中

$$A_\mu^{(K)} = -\mathrm{i}\overline{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5 T_K\Psi + \Phi^{(4)}\partial_\mu\Phi^{(K)} - \Phi^{(K)}\partial_\mu\Phi^{(4)} \tag{4.196}$$

为这个系统的轴矢流密度四矢量．比较(4.178)与(4.195)得关系 $f_\pi=\frac{1}{2f}=\frac{m}{g}$．考虑强作用对轴矢流的重整化，(4.196)右边，从而(4.195)右边应乘以

$$g_a=\frac{g_A}{g_v}=1.26\ , \tag{4.197}$$

这个关系也变为

$$f_\pi=\frac{g_a}{g}m\ . \tag{4.198}$$

此式称为哥德贝格(Goldberger 1958)－特莱曼(Treiman)关系，是强子场论存留下的一个积极成果．将(4.197)，核子质量 $m=939\,\mathrm{MeV}$ 和 π－核子作用常数的经验值

$$\frac{g^2}{4\pi}=14.6 \tag{4.199}$$

代入(4.198)右边，算得 $f_\pi=87\,\mathrm{MeV}$，与经验值 93MeV 接近．

以拉格朗日量密度(4.183)～(4.185)为基础的模型称为 σ 模型．它如此明了地表现出轴矢流部分守恒与近似手征对称的关系，并如此简单地导出哥德贝格－特莱曼关系，使它成为强子物理与核物理中的一个备受重视的模型．

4.4 从夸克层次看矢量流与轴矢流的重整化，口袋模型

本节用口袋模型讨论夸克的矢量流与轴矢流和核子的矢量流与轴矢流的关系．以此为例可了解从夸克层次到强子层次的重整化．口袋模型最成熟的部分为重子的 MIT 静球口袋模型．静球口袋对应动量为零的强子．对 $\frac{1}{2}$ 自旋重子，静球口袋中的夸克波函数对应零动量重子的狄拉克双旋量．按(2.26)它就是

$$U(0)=\begin{bmatrix}\chi\\0\end{bmatrix}\ , \tag{4.200}$$

χ 为重子的 1/2 自旋态与味态的直积，以后就用重子的符号代表．例如对质子将它记作 p，对中子将它记作 n．将目标集中于核子，味态就是同位旋态．p 为质子的自旋－同位旋态，n 为中子的自旋－同位旋态．对零动量的质子和中子，由(4.200)算得同位旋矢量流密度的三个空间分量为零，时间分量为 $iV_0^{(K)}$，除一个平面波归一化因子外

$$V_0^{(K)}=\mathrm{p}^\dagger T_K\mathrm{n}\ . \tag{4.201}$$

由(4.200)算得的零动量质子和中子的同位旋轴矢流密度时间分量为零，空间分量为

$$\boldsymbol{A}^{(K)}=\mathrm{p}^\dagger\boldsymbol{\sigma}T_K\mathrm{n}\ , \tag{4.202}$$

σ 为泡利算符．

从夸克层次看，质子的自旋－同位旋态由(1.226)表示，而中子的自旋－同位旋态则为

$$\mathrm{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{n}_{1a}\chi_{1a}+\mathrm{n}_{1s}\chi_{1s}). \tag{4.203}$$

它们都是由三个 u，d 夸克组成的全对称态．现在，核子矢量流是其中三个夸克的矢量流之和，轴矢流也是其中三个夸克的轴矢流之和．由于(1.226)和(4.203)都是全对称的，交换任一对夸克它们都不变，用它们计算三个夸克贡献的和必等于其中任一夸克的贡献的三倍．夸克波函数(1.150)可看作算符

$$\hat{\psi}=\frac{N}{\sqrt{4\pi}}\begin{bmatrix}\sqrt{\frac{\omega+m}{\omega}}\,\mathrm{j}_0(xr/R)\\ \mathrm{i}\sqrt{\frac{\omega-m}{\omega}}\,\mathrm{j}_1(xr/R)\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}_0\end{bmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{4.204}$$

作用在夸克自旋态上的结果，这里 m 为夸克质量．对零质量的 u，d 夸克，$m=0$，算符(4.204)成为

$$\hat{\psi}=\frac{N}{\sqrt{4\pi}}\begin{bmatrix}j_0(xr/R)\\ ij_1(xr/R)\sigma\cdot r_0\end{bmatrix}e^{-i\omega t}\ , \tag{4.205}$$

常数 $x=2.04$, $\omega=\dfrac{x}{R}$，归一化常数

$$N=\frac{x}{j_0(x)[2x(x-1)R^3]^{1/2}}\ . \tag{4.206}$$

作用在态(1.226)或(4.203)上的单夸克矢量流算符为

$$\hat{V}_\mu^{(K)}=i\int\hat{\bar{\psi}}\gamma_\mu T_K\hat{\psi}d\tau\ , \tag{4.207}$$

这里 γ_μ 与 T_K 都是作用在单夸克态上的算符，体积分在口袋内进行．将(4.205)代入得它的空间分量

$$\begin{aligned}\hat{V}^{(K)}&=\int\hat{\psi}^\dagger\boldsymbol{\alpha}T_K\hat{\psi}d\tau\\&=\frac{N^2}{4\pi}\ i\int j_0(xr/R)j_1(xr/R)[\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}_0)-(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{\sigma}]d\tau T_K\\&=0\ ,\end{aligned} \tag{4.208}$$

末一等式是由于单位径矢量 $\boldsymbol{r}_0$ 在 4π 立体角内的方向积分为零．这与核子层次的结果一致．(4.207)的时间分量 $\hat{V}_4^{(K)}=i\hat{V}_0^{(K)}$,

$$\hat{V}_0^{(K)}=\int\hat{\psi}^\dagger\psi d\tau T_K=T_K\ , \tag{4.209}$$

末一等式用到了(4.205)的归一性．此式右端的 T_K 为夸克的同位旋第 K 分量算符．每个夸克对核子矢量流时间分量的贡献就是它的同位旋，三个夸克的总贡献就是它们的总同位旋．可见核子矢量流时间分量的表达式(4.201)依然成立，只是其中的 T_K 应理解为三个夸克同位旋之和，而态 p 和 n 分别由(1.226)和(4.203)表示．由于(4.201)的值只取决于同位旋的代数性质而与它的具体表示无关，核子的夸克结构不改变它的矢量流．同理，单夸克轴矢流算符为

$$\hat{A}_\mu^{(K)}=-i\int\hat{\bar{\psi}}\gamma_\mu\gamma_5T_K\hat{\psi}d\tau\ . \tag{4.210}$$

将(4.205)代入，直接算得它的时间分量为零，这也与核子层次的结果一致．空间分量为

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{A}}^{(K)}&=\int\hat{\psi}^\dagger\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{\sigma}\\\boldsymbol{\sigma}&0\end{pmatrix}\hat{\psi}d\tau T_K\\&=\frac{N^2}{4\pi}\int[j_0^2(xr/R)\boldsymbol{\sigma}+j_1^2(xr/R)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}_0)]d\tau T_K\ .\end{aligned}$$

不难作出 4π 立体角的方向积分

$$\int_{4\pi}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}_0)d\Omega=-\frac{4\pi}{3}\ \boldsymbol{\sigma}\ , \tag{4.211}$$

代入上式得

$$\hat{\boldsymbol{A}}^{(K)}=N^2\int_0^R\left[j_0^2\left(\frac{x}{R}r\right)-\frac{1}{3}\ j_1^2\left(\frac{x}{R}r\right)\right]r^2dr\boldsymbol{\sigma}T_K\ . \tag{4.212}$$

利用球贝塞耳函数的不定积分

$$\int j_l^2(\xi)\xi^2d\xi=\frac{1}{2}\ \xi^3(j_l^2(\xi)-j_{l-1}(\xi)j_{l+1}(\xi))\ , \tag{4.213}$$

递推关系

$$j_{l+1}(\xi)+j_{l-1}(\xi)=\frac{2l+1}{\xi}\ j_l(\xi)\ , \tag{4.214}$$

和 MIT 边条件(1.140)用于(4.205)得到的关系

$$j_0(x)=j_1(x)\ , \tag{4.215}$$

可作出(4.212)右边的积分，并整理得

$$\eta\equiv N^2\int_0^R\left[j_0^2\left(\frac{x}{R}r\right)-\frac{1}{3}\ j_1^2\left(\frac{x}{R}r\right)\right]r^2dr=\frac{x}{3(x-1)}\ . \tag{4.216}$$

将 $x=2.04$ 代入右边得 $\eta=0.65$. 可见，从夸克层次看，零动量质子和中子的同位旋轴矢流密度四矢的空间分量应为

$$\boldsymbol{A}^{(K)}=\eta p^\dagger\sum_{l=1}^{3}\boldsymbol{\sigma}(l)T_K(l)n\ , \tag{4.217}$$

其中 p 和 n 分别为由(1.226)表示的质子态和由(4.203)表示的中子态，$\boldsymbol{\sigma}(l)$ 和 $T_K(l)$ 分别为核子中第 l 夸克的泡利算符矢量和同位旋第 K

分量．由态 p 和 n 对交换夸克的全对称性，(4.217) 可改写为

$$A^{(K)}=3\eta p^{\dagger}\sigma(1)T_K(1)n\ , \tag{4.218}$$

即可只求第一个夸克的自旋－同位旋矩阵元．而按维格纳－艾卡定理还可将它表为三个夸克的总自旋－同位旋矩阵元与常数的积，因此

$$A^{(K)}=3\eta\eta' p^{\dagger}\sigma T_K n\ , \tag{4.219}$$

其中 $\sigma=\sum_{\ell=1}^{3}\sigma(\ell)$ 为三个夸克的总自旋泡利算符矢量，$T_K=\sum_{\ell=1}^{3}T_K(\ell)$ 为三个夸克总同位旋的第 K 分量，η' 为与投影量子数无关的常数，可由特殊情形确定．为使同位旋矩阵元不为零，要在 (4.218) 和 (4.219) 中取 $K=+1$，或取 K 为 +．这样，在 (4.219) 中

$$p^{\dagger}\sigma T_{+}n=p^{\dagger}\sigma p'\ , \tag{4.220}$$

p' 为质子态，自旋则与中子态 n 相同．不过 (4.203) 表示的中子自旋态与 (1.226) 表示的质子自旋态相同，如采用这两式则有 $p'=p$．为定常数 η' 取 (4.220) 的 z 分量，即用 σ_z 代替 σ．由 (1.224) ~ (1.226) 和 (4.203) 知 n 与 p 都是 $\sigma_z=1$ 的自旋本征态，因此

$$p^{\dagger}\sigma_z T_{+}n=1\ . \tag{4.221}$$

另一方面，由 (1.224) ~ (1.226),(4.203), 以及 (1.101) 和 (1.111) 可直接算得

$$p^{\dagger}\sigma_z(1)T_{+}(1)n=\frac{5}{9}\ . \tag{4.222}$$

比较 (4.221) 与 (4.222) 得 $\eta'=\frac{5}{9}$．可见，从夸克层次看核子轴矢流密度的空间分量为

$$A^{(K)}=g_a p^{\dagger}\sigma T_K n\ , \tag{4.223}$$

$$g_a=3\eta\eta'=1.09\ . \tag{4.224}$$

核子的夸克结构确实导致轴矢流密度的重整化．由 MIT 口袋模型算得的重整化因子 g_a 的值与实验值 1.26 接近．从定性方面看，重要的是 (4.224) 给出的 g_a 的计算值与 1 很接近，符合轴矢流部分守恒的

认识．人们正是从这一认识悟出强作用过程的近似手征对称．

MIT 口袋模型在理论上受到的一个主要责难是轴矢流在口袋表面不连续．在表面内侧夸克轴矢流不为零，而外侧则因一无所有而为零．这不符合手征对称的要求．基于这种认识，人们在口袋外安排定域 π 介子场，使它的轴矢流在口袋表面与内侧夸克的轴矢流相等，以保证轴矢流在口袋表面的连续．由此发展起各式各样的手征口袋模型，大大丰富了强子物理的内容．不过平心而论、MIT 口袋模型的这一缺点并不像初看上去那么严重．至少，它符合强子轴矢流重整化常数 g_a 接近 1 这一实验事实．而这一事实正是人们认识强作用近似手征对称的根据．此外，表面内侧三个夸克的轴矢流经方向平均后为

$$\frac{N^2}{6\pi}f_0^2(x)p^{\dagger}\sum_{\ell=1}^{3}\sigma(\ell)T_K(\ell)\,n=\frac{x}{2(x-1)}\ \frac{5}{18\pi R^3}\ p^{\dagger}\sigma T_K n$$
$$\approx\frac{5}{18\pi R^3}\ p^{\dagger}\sigma T_K n\ , \tag{4.225}$$

虽然非零，却并不大．特别当口袋半径 $R\to\infty$ 时趋于零．因此，即使从概念上看这个模型与轴矢流部分守恒和近似的手征对称也没有原则冲突．从前面的推导过程看，采用相对论理论讨论夸克运动在得到与实验接近的结果方面是重要的．在非相对论理论中，核子内三个夸克形成的核子轴矢流的空间分量为

$$p^{\dagger}\sum_{\ell=1}^{3}\sigma(\ell)T_K(\ell)n=\frac{5}{3}\ p^{\dagger}\sigma T_K n\ , \tag{4.226}$$

重整化因子为 $5/3=1.667$．相对论在此式两边乘上因子 $\eta=0.65$．它将重整化因子 g_a 减小到 1.09，大大接近了 1，并接近了它的实验值 1.26．(4.216) 表明 η 的这一取值是夸克的四分量狄拉克波函数上两分量和下两分量贡献适当搭配的结果．其中下两分量的贡献是重要的，这就是相对论效应．

4.5 弱核力与核内宇称不守恒,中性流

弱作用哈密顿量密度(4.67)不仅含导致各种弱衰变的作用,也含导致粒子间散射的作用. 这种作用可理解为粒子间的一种力. 例如其中强子流 $\hat{J}_\kappa^{\pm}$ 间的作用

$$\hat{\mathscr{H}}_h' = -\frac{G}{\sqrt{2}}\hat{J}_\kappa^+\hat{J}_\kappa^- , \tag{4.227}$$

$\hat{J}_\kappa^+$ 中的核子流(4.47)将一个中子变成质子,而 J_κ^- 中的核子流(4.54)则将一个质子变成中子. 净效应为将一对中子质子改变了状态. 这一作用可理解为中子与质子间的一种力. 将核子之间的力统称核力,这种由弱作用导致的核力称为弱核力. 它比第 2 章讲的强作用导致的强核力弱许多数量级. 除这种直接作用外,两个核子也可借助介子传递弱核力. 强子流 $\hat{J}_\kappa^{\pm}$ 中不仅含核子流,也含介子流. 比较(4.173)和(4.175)知,轴矢流密度在真空态与单 π 介子态间的矩阵元

$$\langle 0|\hat{A}_\kappa^{\pm}|\boldsymbol{p},\mp 1\rangle = \pm\sqrt{2}\ f_\pi\langle 0|\frac{\partial\hat{\Phi}^{(\pm 1)}}{\partial x_\kappa}|\boldsymbol{p},\mp 1\rangle \ . \tag{4.228}$$

$\hat{\Phi}^{(\pm 1)}$中含 $\pi^{\mp}$ 介子的消灭算符也含 $\pi^{\pm}$ 介子的产生算符. 这使哈密顿量密度(4.227)在用 $\hat{J}_\kappa^+$ 将一个中子变成质子的同时用 $\hat{J}_\kappa^-$ 产生一个 π^- 介子或吸收一个 π^+ 介子,也可以在用 $\hat{J}_\kappa^-$ 将一个质子变成中子的同时用 $\hat{J}_\kappa^+$ 产生一个 π^+ 介子或吸收一个 π^- 介子. 于是它的二级微扰就可通过交换一个 $\pi^{\pm}$ 介子使两个核子相互作用,导致一项弱核力. (4.67)并非弱作用的全部,其中只包含了荷电流之间的作用. $\hat{J}_\kappa^+$ 与 $\hat{j}_\kappa^+$ 分别将强子和轻子的电荷数加 1,而 $\hat{J}_\kappa^-$ 和 $\hat{j}_\kappa^-$ 则分别将强子与轻子的电荷数减 1. 这些流称为荷电弱流,简称荷电流. 按弱电统一理论,荷电流之间的弱作用是由荷电玻色子 $W^{\pm}$ 传递的,只能导致不同电荷粒子间的弱力,例如中子与质子间的弱核力. 70 年代人们从实验与理论两方面确知,存在中性流之间的弱作用. 中性流不改变粒子的电荷,就像电磁作用中的电流那样. 荷电粒子在电流过程中不改变电荷态. 按弱电统一理论,中性流之间的弱作用是由中性玻色子 Z^0 传递的,可导致同种电荷粒子间的弱力,例如两个质子间或两个中子间的弱核力. 关于中性流间弱作用的详情可参阅粒子物理方面的专著,例如李政道先生的名著《粒子物理和场论简引》(Lee 1981)等.

用第 2 章的方法可从弱作用的哈密顿量密度导出弱力势. 例如可从(4.227)导出中子与质子间的有关弱核力势. 不过现阶段的主要兴趣还在这个问题的定性方面. 特别是由于弱核力不具有空间反演对称性导致的核内宇称不守恒. 人们都已熟知,β 衰变等弱作用过程中宇称不守恒. 但通常假定衰变前和衰变后的核态仍具有一定宇称. 这是因为人们认为原子核本身的运动属强作用过程,因此宇称守恒. 宇称与能量能同时确定,因而原子核的定态有一定宇称. β 衰变中的宇称不守恒只发生在原子核的两个定态间的弱衰变过程中. 弱核力使原子核本身的运动也混入了微弱的宇称不守恒的成分,原子核的能量和宇称并不完全能同时确定. 原子核的定态也就不会是严格的宇称本征态,一般要混进些许宇称相反的状态. 这使得即使是宇称守恒的过程,例如强作用或电磁作用的过程中也会出现宇称相反的状态间的干涉. 因为从始态 — 过程 — 末态全局来看宇称是不守恒的. 观察这种现象可判定核过程本身宇称是否守恒,核力中有没有宇称不守恒的成分,弱核力是否存在.

表现出核内宇称不守恒的一个典型强作用过程是 ^{16}O 核 2^- 激发态的 α 衰变. I^{Π} 表示一个自旋为 I,宇称为 Π 的状态. ^{16}O 核的 2^- 态激发能为 8.88 MeV,可由 ^{16}N 的 β 衰变得到,通过四种不同的 γ 衰变跃迁到 ^{16}O 的基态和三个不同的低激发态,总 γ 衰变宽度为 $(3.4\pm 0.51)\times 10^{-3}$eV,寿命为 10^{-12}s 量级. 人们发现(Wäffler 1972),^{16}O 核的这个 2^- 激发态还可能经 α 衰变跃迁到 ^{12}C 基态,α 衰变的次数约为 γ 衰变的千万分之一,α 衰变宽度为 10^{-10} eV 的量级. ^{12}C 核基态与 α 粒子的内部状态都是 0^+ 态,由角动量守恒

知 ^{16}O 核的这一 2^- 态 α 衰变中 α 粒子相对 ^{12}C 核的轨道运动角动量量子数必为 2，轨道运动宇称亦为正．这使得这一 α 衰变末态总宇称为正，而它的始态宇称为负．因此这是一个宇称不守恒的过程．如果认定 α 衰变为纯强作用过程，是宇称守恒的，宇称不守恒就来自始末态核内部的运动．不具空间反演对称性的弱核力使核定态不具完全确定的宇称．2^- 态可能混入些许正宇称成分，0^+ 态则可能混入些许负宇称成分．由此估算得这一 2^- 态 ^{16}O 核到 0^+基态 ^{12}C 核 α 衰变的宽度正好是 10^{-10} eV 的量级．

原子核内部运动的宇称不守恒也从电磁作用过程中表现出来．电磁作用过程本身是宇称守恒的，其中表现出的宇称不守恒现象也只能来自发生电磁作用过程的系统本身．这方面被仔细研究过的现象有 γ 衰变中 γ 射线的圆偏振和原子核俘获极化中子后辐射 γ 射线的各向异性．左旋圆偏振光的镜像反演为右旋圆偏振光，一个镜像反演对称的系统发出的左、右旋圆偏振光的强度应相同，非极化核发出的 γ 射线应不具圆偏振．然而实验明确观察到了非极化核发出的 γ 射线的圆偏振(Gari 1973)．可以用左旋光与右旋光强度的差与光的总强度的比 p_γ 表示圆偏振的程度．实验表明 ^{181}Ta 482 keV 的 γ 射线圆偏振在 10^{-6}至 10^{-5} 的量级(Lipson 1971, Vanderleeden 1970, Lobashov 1967, Bock 1971, Cruse 1969 等)．这一 γ 射线来自 ^{181}Ta 核 $\frac{5}{2}^+$ 态到 $\frac{7}{2}^+$ 态间的跃迁．按选择定则应是磁偶极与电四极跃迁．然而以上圆偏振实验结果表明其中还含电偶极跃迁成分．电磁过程宇称守恒，电偶极跃迁只能在宇称相反的态间发生．可见上述 γ 跃迁的始态，即 ^{181}Ta 核的 $\frac{5}{2}^+$ 态，或末态，即 ^{181}Ta 核的 $\frac{7}{2}^+$ 态混进了负宇称成分．核的定态宇称不确定表明核过程中宇称不守恒．

$\frac{1}{2}$ 自旋粒子的极化由它的自旋泡利算符的平均值 $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ 表示，这是一个赝矢量．原子核吸收一个极化中子后发射 γ 光子的方向由光

波的波矢量 $\boldsymbol{k}$ 表示，这是一个矢量．它们之间的标量积 $\overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{k}$ 是一个赝标量，在空间反演变换下要反号．在一个空间反演对称的过程中 γ 辐射的几率应与赝标量无关．电磁作用是空间反演对称的．如果发现 γ 辐射几率与赝标量有关的现象就表明核过程本身含空间反演不对称的成分．实际上已观察到由极化中子激活的原子核 γ 辐射的各向异性，即发射几率与 $\overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{k}$ 有关(Abov 1968, Abov 1965, Pratt 1970 等)．弱核力及其导致的核内宇称不守恒已被确认为事实．

第5章　原子核的集体自由度与核内核子自由度

5.1　集体平移与集体转动，总动量与总角动量确定的状态，转动谱

均匀而各向同性的空间中，原子核和所有物体一样具有平移和转动对称．这导致它的总动量和总角动量守恒．原子核的定态可同时具有确定的总动量，自旋和自旋在一选定方向上的投影．这里，自旋是指原子核绕自身质心的总角动量．总动量为 $\boldsymbol{P}$ 的态，波函数随质心坐标 $\boldsymbol{R}$ 的变化由一平面波 $e^{i\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{R}/\hbar}$ 表示．原子核的波函数

$$\Psi=\Psi_0 e^{i\frac{\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{R}}{\hbar}}, \tag{5.1}$$

其中 Ψ_0 与核的质心坐标 $\boldsymbol{R}$ 无关．含 A 个核子的原子核的波函数 Ψ 是 $3A$ 个空间坐标的函数．在约化掉表示质心运动的平面波后，表示原子核内部运动的波函数 Ψ_0 已只是 $3A-3$ 个空间坐标的函数．Ψ_0 就像是固定了质心坐标的原子核的波函数，亦即放在一定位置上的原子核的内部波函数．

固定核子间相对位置，考虑核子系统整体的转动．这种转动是原子核空间取向自由度的运动，由它的空间取向的波函数描写．这种波函数称为转动波函数．原子核的取向由固定在它上面的本体坐标系 $\xi\eta\zeta$ 的取向代表，可用它的三个欧拉(Euler)角表示．欧拉角的定义并不统一，我们取图 5-1 定义的 θ,φ 和 φ_ζ 为欧拉角．其中 θ 和 φ 为 ζ 轴相对于空间固定坐标系 xyz 的方位角，φ_ζ 则表示 ξ 与 η 轴的取向．取一辅助的半固定坐标系 $x'y'\zeta$，y' 轴在 xy 平面内垂

直于 $z\zeta$ 平面，x' 则垂直于 $y'\zeta$ 平面．φ_ζ 为 ξ 轴与 x' 轴的交角．$\xi\eta\zeta$ 相对于 xyz 的取向可看成是相继实施三个绕定轴的转动的结果．它们是：(1) 绕 z 轴转 φ_ζ 角，(2) 绕 y 轴转 θ 角，和 (3) 绕 z 轴转 φ 角．转动波函数可表为欧拉角 $\theta,\varphi,\varphi_\zeta$ 的函数．完全确定系统的总角动量就可完全确定转动波函数随欧拉角的变化．

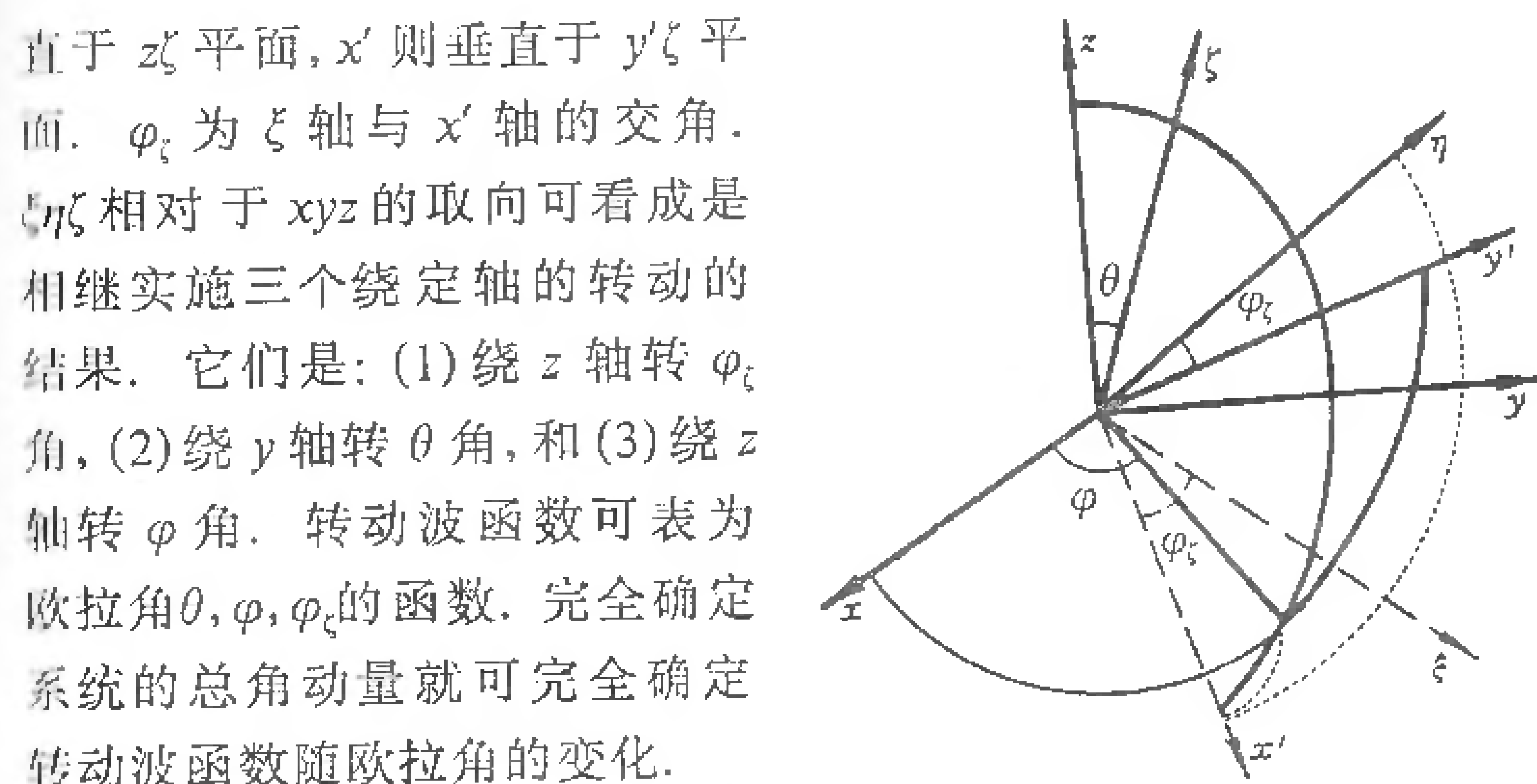


图 5-1　欧拉角

总角动量 $\hat{\boldsymbol{I}}$ 的三个分量 $\hat{I}_x$，$\hat{I}_y$ 和 $\hat{I}_z$ 分别为绕 x, y 和 z 轴的转动角的正则共轭广义动量．由于绕两个不同轴的转动并非彼此独立的，角动量的不同分量彼此不对易．角动量的基本对易关系为

$$[\hat{I}_x,\hat{I}_y]=\hat{I}_z,\qquad [\hat{I}_y,\hat{I}_z]=\hat{I}_x,\qquad [\hat{I}_z,\hat{I}_x]=\hat{I}_y\ . \tag{5.2}$$

它表明角动量在空间不同固定轴上的投影不能同时确定．不过由(5.2)可推知，角动量的任何投影都与

$$\hat{I}^2=\hat{I}_x^2+\hat{I}_y^2+\hat{I}_z^2 \tag{5.3}$$

对易，因而可与 $\hat{I}^2$ 同时确定．本体坐标系诸轴上的单位矢量 $\hat{\xi}_0$，$\hat{\eta}_0$ 和 $\hat{\zeta}_0$ 是随本体坐标系的取向而变的，即是欧拉角的函数．对转动波函数它们都是算符．在转动时它们都按矢量方式变换，这使角动量在本体坐标轴上的投影

$$\hat{I}_\xi=\hat{\boldsymbol{I}}\cdot\hat{\xi}_0\ ,\qquad \hat{I}_\eta=\hat{\boldsymbol{I}}\cdot\hat{\eta}_0\ ,\qquad \hat{I}_\zeta=\hat{\boldsymbol{I}}\cdot\hat{\zeta}_0 \tag{5.4}$$

在转动时按标量变换，即是不变量．任一矢量 $\hat{V}$ 与角动量间有对易关系

$$\left.\begin{aligned}
&[\hat{V}_x,\hat{I}_x]=0, &&[\hat{V}_x,\hat{I}_y]=\hat{V}_z, &&[\hat{V}_x,\hat{I}_z]=-\hat{V}_y,\\
&[\hat{V}_y,\hat{I}_x]=-\hat{V}_z, &&[\hat{V}_y,\hat{I}_y]=0, &&[\hat{V}_y,\hat{I}_z]=\hat{V}_x,\\
&[\hat{V}_z,\hat{I}_x]=\hat{V}_y, &&[\hat{V}_z,\hat{I}_y]=-\hat{V}_x, &&[\hat{V}_z,\hat{I}_z]=0\ ,
\end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

而标量则与角动量对易．这使角动量在任一本体坐标轴上的投影与

它在任一固定坐标轴上的投影对易:

$$\left.\begin{aligned}[\hat{I}_\xi,\hat{I}_x]=[\hat{I}_\xi,\hat{I}_y]=[\hat{I}_\xi,\hat{I}_z]=0,\\ [\hat{I}_\eta,\hat{I}_x]=[\hat{I}_\eta,\hat{I}_y]=[\hat{I}_\eta,\hat{I}_z]=0,\\ [\hat{I}_\zeta,\hat{I}_x]=[\hat{I}_\zeta,\hat{I}_y]=[\hat{I}_\zeta,\hat{I}_z]=0.\end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

(5.5)还表明,矢量的任一分量与角动量的同一分量对易,这使任一矢量与角动量的标量积与乘积的次序无关. 由此可知由(5.4)定义的角动量在本体坐标轴上的投影为厄米算符. 由定义(5.4),对易关系(5.2),$\hat{\xi}_0$、$\hat{\eta}_0$和$\hat{\zeta}_0$的矢量性质,以及矢量的对易关系(5.5)还可导出角动量在本体坐标轴上的各投影间有对易关系

$$[\hat{I}_\xi,\hat{I}_\eta]=-\hat{I}_\zeta,\qquad [\hat{I}_\eta,\hat{I}_\zeta]=-\hat{I}_\xi,\qquad [\hat{I}_\zeta,\hat{I}_\xi]=-\hat{I}_\eta\ . \tag{5.7}$$

与角动量在固定坐标轴上各投影间的对易关系(5.2)比较,右边多出一负号. 引进

$$\hat{I}_\xi'=\hat{I}_\xi\ ,\quad \hat{I}_\eta'=-\hat{I}_\eta\ ,\quad \hat{I}_\zeta'=\hat{I}_\zeta\ , \tag{5.8}$$

则

$$[\hat{I}_\xi',\hat{I}_\eta']=\hat{I}_\zeta',\qquad [\hat{I}_\eta',\hat{I}_\zeta']=\hat{I}_\xi',\qquad [\hat{I}_\zeta',\hat{I}_\xi']=\hat{I}_\eta'\ , \tag{5.9}$$

且

$$\hat{I}'^2=\hat{I}_\xi'^2+\hat{I}_\eta'^2+\hat{I}_\zeta'^2=\hat{I}_\xi^2+\hat{I}_\eta^2+\hat{I}_\zeta^2=\hat{I}_x^2+\hat{I}_y^2+\hat{I}_z^2=\hat{I}^2\ . \tag{5.10}$$

(5.9)表明$\hat{I}_\xi'$, $\hat{I}_\eta'$和$\hat{I}_\zeta'$具有角动量分量间的标准对易关系. 由此对易关系导出的全部角动量理论可适用于它们. 现在可同时确定的量有$\hat{I}^2$, $\hat{I}$在一固定轴上的投影如$\hat{I}_z$,和$\hat{I}$在一本体轴上的投影如$\hat{I}_\zeta=\hat{I}_\zeta'$. 这三个量应能确定波函数与三个欧拉角的关系. 为此要求解联立的本征方程组

$$\hat{I}^2\chi_{IMK}=I(I+1)\hbar^2\chi_{IMK}\ , \tag{5.11}$$

$$\hat{I}_z\chi_{IMK}=M\hbar\chi_{IMK}\ , \tag{5.12}$$

$$\hat{I}_\zeta\chi_{IMK}=K\hbar\chi_{IMK}\ . \tag{5.13}$$

而要得到转动波函数χ_{IMK}与欧拉角的明显关系还须知$\hat{I}^2$, $\hat{I}_z$和$\hat{I}_\zeta$的欧拉角表象,它们是[①]

① 参阅张启仁,《量子力学》,§8.6,高等教育出版社,1989.

$$\hat{I}^2=-\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\ \frac{\partial}{\partial\theta}\ \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi_\zeta^2}\right)-\frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}\ \frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\varphi_\zeta}\right]\ , \tag{5.14}$$

$$\hat{I}_z=-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\ , \tag{5.15}$$

$$\hat{I}_\zeta=-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi_\zeta}\ . \tag{5.16}$$

将(5.15)和(5.16)分别代入(5.12)和(5.13)立刻解出转动波函数随φ和φ_ζ的变化:

$$\chi_{IMK}(\theta,\varphi,\varphi_\zeta)=f(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}M\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\varphi_\zeta}. \tag{5.17}$$

一个费米子的态矢量绕轴旋转360°要改号. 含奇数个费米子的态矢量转360°要改奇数次号因而要改号,含偶数个费米子的态矢量转360°要改偶数次号因而不变. 可见转动波函数(5.17)中的量子数M和K对奇A核为半整数,对偶A核为整数. 将(5.17)和(5.14)代入(5.11)得

$$\frac{1}{\sin\theta}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ \sin\theta\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}+\left[I(I+1)-\frac{M^2+K^2}{\sin^2\theta}+\frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}MK\right]f=0\ . \tag{5.18}$$

作自变量变换和函数变换

$$\tau=\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}\ , \tag{5.19}$$

$$f(\tau)=\tau^{\frac{|M-K|}{2}}(1-\tau)^{\frac{|M+K|}{2}}F(\tau)\ , \tag{5.20}$$

代入(5.18)得

$$\tau(1-\tau)\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}\tau^2}+[c-(a+b+1)\tau]\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\tau}-abF=0\ , \tag{5.21}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}a&=\max(|M|,|K|)+I+1\ ,\\ b&=\max(|M|,|K|)-I\ ,\\ c&=|M-K|+1\ ,\end{aligned}\right\} \tag{5.22}$$

$\max(|M|,|K|)$ 为 $|M|$ 与 $|K|$ 中的大者. (5.21) 为超几何方程, 它在 $\tau=0$ 附近的正规解为超几何函数

$$\begin{aligned} F(a,b,c;\tau) &= 1+\frac{ab}{c\cdot 1!}\tau+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)\cdot 2!}\tau^2 \\ &\quad +\cdots+\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n\cdot n!}\tau^n+\cdots \\ &= (1-\tau)^{-b}F(b,c-a,c;\frac{\tau}{\tau-1}), \end{aligned} \tag{5.23}$$

其中

$$(a)_n=a(a+1)\cdots(a+n-1), \qquad n \text{ 为正整数}. \tag{5.24}$$

(5.23)的第一个等号为超几何函数的定义, 第二个等号则来自超几何函数的性质[1]. 由于 I, M 和 K 同为整数或半整数, (5.22)定义的 a, b 和 c 都是整数, 且由于 $|M|, |K|\leqslant I$, b 为负整数或零. 这使解(5.23)蜕化为 $-b$ 次多项式. 将解(5.23)经变换(5.20)和(5.19)代回(5.17), 经归一化即得 $\hat{I}^2, \hat{I}_z$ 和 $\hat{I}_\zeta$ 的共同本征函数. 另一方面, 已知这个本征函数可用转动函数表出[2]:

$$\chi_{IMK}(\theta,\varphi,\varphi_\zeta)=\sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2}}\,D^{I}_{MK}{}^{*}(\theta,\varphi,\varphi_\zeta). \tag{5.25}$$

它满足归一化条件

$$\int_0^{2\pi}d\varphi_\zeta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\left|\chi_{IMK}(\theta,\varphi,\varphi_\zeta)\right|^2\sin\theta d\theta=1. \tag{5.26}$$

比较(5.25)与(5.17)～(5.24), 注意 $D^I_{MK}(000)=\delta_{MK}$ 及角动量本征态间的相角关系, 得

$$\begin{aligned} D^I_{MK}(\theta,\varphi,\varphi_\zeta) &= e^{-iM\varphi}e^{-iK\varphi_\zeta}\sum_n(-1)^n \\ &\times\frac{\sqrt{(I+M)!(I-M)!(I+K)!(I-K)!}\,\cos^{2I-M+K-2n}(\theta/2)\sin^{2n+M-K}(\theta/2)}{(I-M-n)!(I+K-n)!n!(n+M-K)!}, \end{aligned} \tag{5.27}$$

① 参阅王竹溪, 郭敦仁,《特殊函数概论》, §4.3, 科学出版社, 1965.

② 参阅张启仁,《量子力学》, §8.6, 高等教育出版社, 1989.

求和指标 n 为整数且保证阶乘自变量非负.

空间的各向同性保证 $\hat{\boldsymbol{I}}$ 守恒却并不保证 $\hat{I}_\zeta=\hat{\boldsymbol{I}}\cdot\hat{\zeta}_0$ 守恒. 这使原子核的定态可同时是 $\hat{I}^2$ 和 $\hat{I}_z$ 的本征态却不一定是 $\hat{I}_\zeta$ 的本征态. 定态波函数应从(5.1)约化为

$$\Psi=\sum_K\psi_K(\xi\eta\zeta)\chi_{IMK}(\theta,\varphi,\varphi_\zeta)\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{i\frac{\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{R}}{\hbar}}, \tag{5.28}$$

ψ_K 为原子核的内部运动波函数, 简称内禀波函数. 内禀波函数描写除质心运动和整体转动外的核运动, 在核子层次上是核子本体坐标的函数, 在(5.28)中本体坐标由 $\xi\eta\zeta$ 代表. 不过 A 个核子的 $3A$ 个本体坐标不是完全独立的, 分离出质心坐标 $\boldsymbol{R}$ 和整体取向欧拉角 $\theta\varphi\varphi_\zeta$ 后还剩 $3A-6$ 个独立坐标. 对一定的自旋 I, K 可取 $I, I-1, \cdots, -I$ 等 $2I+1$ 个值, 因此内禀波函数有 $2I+1$ 个分量. 如果原子核的内部运动是轴对称的, 它的内禀形状有一对称轴, 可将本体坐标轴 ζ 取在对称轴上. 在此情况下 $\hat{I}_\zeta$ 也守恒, 它的量子数 K 也成为好量子数, 可以用来刻画原子核的定态. (5.28)进一步约化为

$$\Psi=\psi_K(\xi\eta\zeta)\chi_{IMK}(\theta,\varphi,\varphi_\zeta)\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{i\frac{\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{R}}{\hbar}}. \tag{5.29}$$

随着质心运动的分离也分离出一项质心运动能量

$$E_c=\frac{P^2}{2Am}, \tag{5.30}$$

这一分离可由 A 个核子的非相对论薛定谔方程严格导出. 剩下的能量最好能分解成转动能与内禀运动能量. 可惜这种简单的分解不能一般地做到, 这是因为转动会导致内禀运动中的离心和科里奥利(Coriolis)力的作用, 而内禀运动及相应的内禀形状也会影响整体转动. 原子核的转动和内禀运动相互影响. 好在这种影响在许多场合并不严重, 在这些场合中转动与内禀运动可近似地分离. 其结果是在原子核低激发能谱中出现大片转动谱. 在质量数 $155<A<185$, $A>225$, $19\leqslant A\leqslant 25$ 和 $9\leqslant A\leqslant 14$ 等广大远离满壳层的区域中转动谱特别明显. 转动能谱的基本形式为

$$E_I=\frac{\hbar^2}{2\mathscr{J}}I(I+1)\ , \tag{5.31}$$

$\mathscr{J}$为转动惯量．有时为了更精确符合实测能谱再加一自旋平方的高次修正项，将转动能表为

$$E_I=\frac{\hbar^2}{2\mathscr{J}}I(I+1)-BI^2(I+1)^2\ , \tag{5.32}$$

B为一小正数。比值

$$\delta=B\Big/\left(\frac{\hbar^2}{2\mathscr{J}}\right) \tag{5.33}$$

约为10^{-3}至10^{-4}量级．这使(5.32)中的修正项只在自旋I很高时才有显著作用．它的作用是使给定自旋态的转动能减小．这可理解为高自旋态惯性离心作用大，核被拉长使转动惯量增加，从而使转动能减小．按此观点，可将(5.32)仍表成

$$E_I=\frac{\hbar^2}{2\mathscr{J}'}I(I+1)\ , \tag{5.34}$$

其中有效转动惯量

$$\mathscr{J}'=\mathscr{J}[1+I(I+1)\delta] \tag{5.35}$$

随自旋I增加而增加，δ为由(5.33)表示的小量．形如(5.31)的能谱其实不一定由转动造成．设满壳层外有两个核子，处于角动量为j的单粒子态，设它们之间有一耦合作用能

$$\hat{H}'=\alpha\hat{j}_1\cdot\hat{j}_2\ , \tag{5.36}$$

其中$\hat{j}_1$与$\hat{j}_2$分别为这两个核子的角动量算符，α为作用常数．作用(5.36)将两个核子耦合成总角动量确定的状态$|jjIM\rangle$．由于满壳层自身的总角动量为零，原子核的总角动量

$$\hat{I}=\hat{j}_1+\hat{j}_2 \tag{5.37}$$

就是满壳层外两个核子总角动量之和．可见耦合(5.36)引起的原子核能量修正为

$$\Delta E=\langle jjIM|\hat{H}'|jjIM\rangle$$

$$=\alpha\langle jjIM\left|\frac{\hat{I}^2-\hat{j}_1^2-\hat{j}_2^2}{2}\right|jjIM\rangle$$

$$=\frac{\alpha\hbar^2}{2}[I(I+1)-2j(j+1)]\ , \tag{5.38}$$

它随核自旋I的变化与转动谱(5.31)一致，与转动惯量$\mathscr{J}$相当的量为α^{-1}．可见，将形如(5.31)的能谱称为转动谱还需佐以其他条件．例如前面列出的那些质量范围远离满壳层的核不仅有形如(5.31)的能谱，且有较大的电四极矩，表明它们有较大的形变．显著偏离球形的核自应具有转动自由度．

为了对转动和转动谱作定量讨论，必须将问题简化．三维空间中最简单的转动为刚体转动．微观系统由于能量和定态不能连续变化与刚体有类似之处．从刚体模型入手研究核转动是很自然的．将本体坐标系$\xi\eta\zeta$的三个轴放在刚体的三个惯量主轴上，刚体的转动能可表为

$$\hat{H}=\frac{\hat{I}_\xi^2}{2\mathscr{J}_\xi}+\frac{\hat{I}_\eta^2}{2\mathscr{J}_\eta}+\frac{\hat{I}_\zeta^2}{2\mathscr{J}_\zeta}\ . \tag{5.39}$$

刚体又称陀螺，此式即是陀螺能量的一般表示式．如果陀螺有一对称轴就称为对称陀螺．将对称轴取为ζ轴，对称陀螺能量可表为

$$\hat{H}=\frac{\hat{I}_\xi^2}{2\mathscr{J}}+\frac{\hat{I}_\eta^2}{2\mathscr{J}}+\frac{\hat{I}_\zeta^2}{2\mathscr{J}'}=\frac{\hat{I}^2}{2\mathscr{J}}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathscr{J}'}-\frac{1}{\mathscr{J}}\right)\hat{I}_\zeta^2\ , \tag{5.40}$$

其中

$$\mathscr{J}=\mathscr{J}_\xi=\mathscr{J}_\eta\ ,\qquad \mathscr{J}'=\mathscr{J}_\zeta\ . \tag{5.41}$$

由(5.6)知转动能与$\hat{I}_x$、$\hat{I}_y$和$\hat{I}_z$都对易，因而可与$\hat{I}^2$和$\hat{I}_z$同时确定．(5.40)进一步表明对称陀螺的转动能还与角动量在对称本体轴上的投影$\hat{I}_\zeta$对易，因而可与$\hat{I}_\zeta$同时确定．对称陀螺转动的定态应是$\hat{I}^2$、$\hat{I}_z$和$\hat{I}_\zeta$的共同本征态(5.27)，转动能谱为

$$E_{I,K}=\frac{\hbar^2}{2\mathscr{J}}I(I+1)+\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{1}{\mathscr{J}'}-\frac{1}{\mathscr{J}}\right)K^2\ . \tag{5.42}$$

对于一固定$|K|$，此式表示的能级随I的变化即是转动谱(5.31)．此

式表示的新内容则是，应按 $|K|$ 值将转动谱分类．由于 $I \geq |K|$，与每一 $|K|$ 值对应的转动带，I 的最小取值为 $|K|$．(5.29) 中描写原子核内禀运动的波函数 ψ_K 也与量子数 K 有关，它所对应的内禀运动能量自然也与 K 有关．不过核能量算符对包含对称轴 ζ 的平面的反演应是不变的．而这一反演将 K 变成 $-K$，即能量应与量子数 K 的符号无关，而只与 $|K|$ 有关．在加入内禀运动能量后，核能谱与 K 的关系一般不会有 (5.42) 的简单形式．再加上转动惯量 $\mathscr{I}$ 也可能与 $|K|$ 有关，与不同 $|K|$ 值对应的转动带常常表现为彼此独立的，而不能按 (5.42) 简单地关联．(5.42) 中的第二项可与内禀能量合并，剩下第一项表转动谱．$|K|$ 的取值则从 I 的最小值表现出来．

中子数与质子数均为偶数的核简称偶偶核．偶偶核基态自旋恒为零．包含基态在内的偶偶核转动带必有 $K=0$．在此情形下 $\hat{I}$ 的本征方程 (5.18) 变得与轨道角动量平方的本征方程一样，因而有

$$\chi_{IM0}(\theta, \varphi, \varphi_\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{Y}_{IM}(\theta, \varphi) , \qquad (5.43)$$

如不理会 φ_ζ 自由度可径直将角动量的本征函数写成球谐函数 $\mathrm{Y}_{IM}(\theta, \varphi)$．自然，此处 I 为整数．前面曾提到相对于含对称轴 ζ 的平面的反演将量子数 K 变成 $-K$．一个 $K=0$ 的态经此变换后仍是一 $K=0$ 的态，它的波函数可能不变，称为对称态，也可能变号称为反对称态．通常对称态因节点较少而能量较低．若一个 $K=0$ 的态经此变换后得到另一 $K=0$ 的态，它的波函数与变换前的波函数不同，且不只是改变符号，则可将它与原来的波函数相加或相减，得到这种反演变换下的对称态或反对称态，且这两态能量相同．这时就出现这种反演变换下的对称态与反对称态的偶然简并．一般不考虑这种偶然简并．若它果然出现，可作例外处理．轴对称核也可有相对于垂直对称轴的平面的反演对称性．轴对称椭球的对称轴中垂面就是这种对称平面．如果能量算符在相对这一平面的镜像反演下不变，则原子核的定态波函数也会具有这种镜像反演的对称性．或对称，或反对称，其中对称态也会因节点较少而能量较低．相继实施这两种反演：先相对含对称轴 ζ 的平面反演，再相对垂直于 ζ 的对称平面反演．其结果是一个将对称轴 ζ 反向的转动．能量最低的定态在这两次反演中波函数都不变，因而在将对称轴反向的转动中波函数不变．这一变换用方位角来表示就是 $\theta \to \pi - \theta, \varphi \to \pi + \varphi$．在这一变换下球谐函数 $\mathrm{Y}_{IM}(\theta, \varphi)$ 变为 $(-1)^I \mathrm{Y}_{IM}(\theta, \varphi)$，要它不变必须且只须 I 为偶数．可见，轴对称偶偶核如兼有上列反演对称性，在含基态的转动带中自旋 I 只能是偶数．这正是观察到的实验事实．图 5-2是一些典型事例．

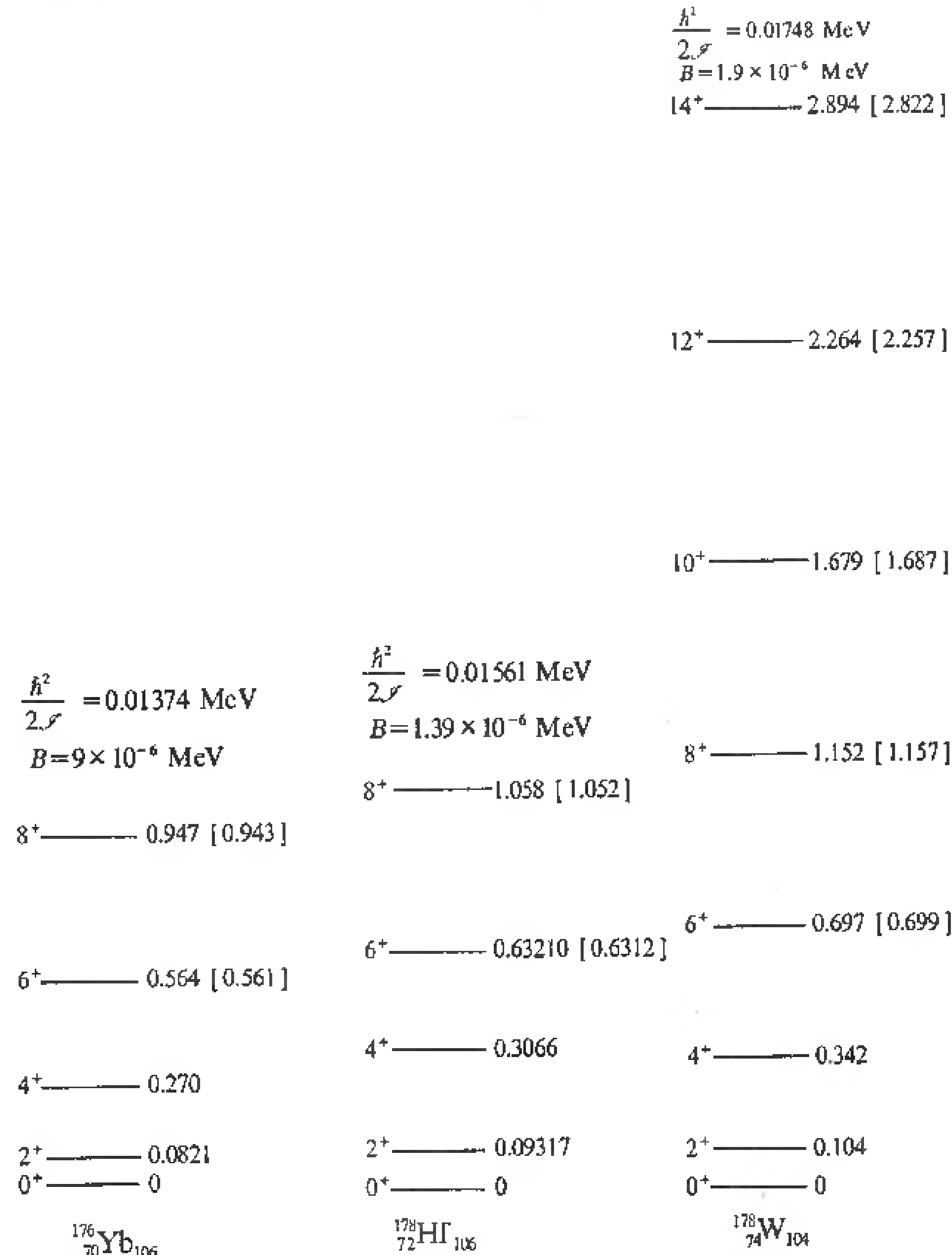


图 5-2　偶偶核转动谱．能量单位为 MeV.括号中的数字是用图上方的参数按 (5.32) 算出的 [取自 Shalit 1974]

奇 A 核的情形因有一个没有配对的奇核子而复杂化．设除这个奇核子外的偶数个质子和偶数个中子一起组成一个轴对称核心，可视为一对称陀螺．我们面对的就是由一个对称陀螺和一个核子组成的系统的问题．在对称陀螺上架起本体坐标系 $\xi\eta\zeta$，仍以对称轴为 ζ 轴．现在用 $\mathscr{I}$ 表示陀螺绕 ξ 或 η 轴的转动惯量，$\mathscr{I}'$ 表示陀螺绕 ζ 轴的转动惯量．陀螺的转动能为

$$\hat{H}_R=\frac{1}{2\mathscr{I}}\left(\hat{L}_\xi^2+\hat{L}_\eta^2\right)+\frac{1}{2\mathscr{I}'}\hat{L}_\zeta^2$$

$$=\frac{1}{2\mathscr{I}}\hat{L}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathscr{I}'}-\frac{1}{\mathscr{I}}\right)\hat{L}_\zeta^2\ , \tag{5.44}$$

$\hat{L}_\xi$，$\hat{L}_\eta$ 和 $\hat{L}_\zeta$ 为陀螺角动量在本体坐标轴 ξ，η 和 ζ 上的投影，

$$\hat{L}^2=\hat{L}_\xi^2+\hat{L}_\eta^2+\hat{L}_\zeta^2\ . \tag{5.45}$$

未成对的那个奇核子在对称陀螺作用下运动，能量算符记作 $\hat{H}_P$．$\hat{H}_P$ 显然不会因绕对称轴 ζ 的转动而变．这使奇核子角动量 $\hat{j}$ 在 ζ 轴上的投影 $\hat{j}_\zeta$ 守恒，它的量子数 Ω 为好量子数．组成陀螺的那些核子与角动量 $\hat{L}$ 无关的能量在考虑转动谱时是常数，可并入 $\hat{H}_P$ 中．这个奇 A 核的总能量算符即为

$$\hat{H}=\hat{H}_R+\hat{H}_P\ . \tag{5.46}$$

组成陀螺的核子对陀螺运动的影响表现在转动惯量 $\mathscr{I}$ 和 $\mathscr{I}'$ 与它们的关系中．至于一个单吊核子对陀螺运动的影响，则除保证总角动量

$$\hat{I}=\hat{L}+\hat{j} \tag{5.47}$$

守恒外，其余均略去．这是因为陀螺质量比一个核子大得多，一个单吊核子对它的影响确实是很小的．奇 A 核的基态和低激发态中，它的偶偶核心的内部运动可认为是不激发的．偶数质子和偶数中子各自配对，使陀螺的角动量 $\hat{L}$ 在对称轴上的投影为零，即 $L_\zeta=0$．这使 $I_\zeta=j_\zeta=\Omega\hbar$，与(5.13)比较知 $K=\Omega$．可见这种情形中奇 A 核的波函数也可表成(5.29)的形式，只是其中的量子数 I，M 和 K 都是半整数．也可把这种核当作半整数量子数的对称陀螺．把其中的偶偶核心和单吊奇核子的运动看作这个整体陀螺的内部运动．利用(5.47)消去(5.44)中的 $\hat{L}$，得

$$\hat{H}_R=\frac{1}{2\mathscr{I}}(\hat{I}-\hat{j})^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathscr{I}'}-\frac{1}{\mathscr{I}}\right)(\hat{I}_\zeta-\hat{j}_\zeta)\ .$$

由 $I_\zeta=j_\zeta$，此式右边第二项贡献为零．将第一项乘开整理后得

$$\hat{H}_R=\frac{\hat{I}^2}{2\mathscr{I}}+\frac{\hat{j}^2}{2\mathscr{I}}-\frac{1}{\mathscr{I}}\hat{I}\cdot\hat{j}\ . \tag{5.48}$$

此式右边第二项只与那个奇核子有关，可以并入 $\hat{H}_P$．它的作用可影响内禀波函数 ψ_K 和单核子能量，却不会影响转动谱．经这样重新划分 $\hat{H}_R$ 和 $\hat{H}_P$ 后，前者变为

$$\hat{H}_R=\frac{1}{2\mathscr{I}}\hat{I}^2-\frac{1}{\mathscr{I}}\hat{I}_\zeta\hat{j}_\zeta+\hat{H}'\ , \tag{5.49}$$

$$\hat{H}'=-\frac{1}{2\mathscr{I}}(\hat{I}'_+\hat{j}_++\hat{I}'_-\hat{j}_-)\ , \tag{5.50}$$

$$\hat{I}'_\pm=\hat{I}_\xi'\pm\mathrm{i}\hat{I}_\eta'=\hat{I}_\xi\mp\mathrm{i}\hat{I}_\eta\ , \tag{5.51}$$

$$\hat{j}_\pm=\hat{j}_\xi\pm\mathrm{i}\hat{j}_\eta\ . \tag{5.52}$$

(5.29)是(5.49)前两项的本征函数，本征值为

$$E_{IK}=\frac{\hbar^2}{2\mathscr{I}}[I(I+1)-2K^2]\ . \tag{5.53}$$

方括号中的末项只与奇核子的量子数 K 有关，可以与 $\hat{H}_P$ 的本征值合并，成为奇核子能量的一部分．奇 A 核的转动谱仍为(5.31)的形式，只是 I 及其最小值$|K|$均为半整数．图 5-3 给出了奇 A 核的典型转动谱．

(5.50)表示的 $\hat{H}'$ 是由科里奥利力导致的整体转动与奇核子转动的耦合能，它使定态成为具不同量子数 K 的态的叠加．从物理上讲，即使是轴对称陀螺，当它绕垂直对称轴的方向转动起来以后对内部核子的作用也不再是轴对称的了．此时，除原先的对称轴外，又横生出一特殊方向，即转动轴的方向．它破坏了原先的轴对称性，使 K 不再是严格的好量子数．严格的定态本应是具不同 K 的

$\frac{\hbar^2}{2\mathscr{I}}=0.01379$, $B=6.76\times10^{-6}$		$\frac{\hbar^2}{2\mathscr{I}}=0.01286$, $B=4.20\times10^{-6}$		$\frac{\hbar^2}{2\mathscr{I}}=0.01368$, $B=8.52\times10^{-5}$	
$17/2^+$	[0.85377] 0.8550	$17/2^-$	[0.84543] 0.84488	$17/2^+$	[1.38510] 1.3896
$15/2^+$	[0.63599] 0.63620	$15/2^-$	[0.63723] 0.63708	$15/2^+$	[1.17452] 1.1768
$13/2^+$	[0.44059] 0.44065	$13/2^-$	0.45150	$13/2^+$	[0.98493] 0.98531
$11/2^+$	0.26878	$11/2^-$	0.283	$11/2^+$	[0.81645] 0.81670
$9/2^+$	0.12162	$9/2^-$	0.15039	$9/2^+$	0.67195
$7/2^+$	0			$7/2^+$	0.55212
				$5/2^+$	0.45792

图 5-3　奇 A 核 $^{177}_{71}$Lu 的转动带. 括号内为按 (5.32) 的计算值. 能量单位为 MeV [取自 Shalit 1974]

态的叠加. 不过 K 同时是刻画那个奇核子在轴对称场中运动的量子数, 不同 K 意味着不同单粒子态, 不同 $|K|$ 意味着不同单粒子能级. 单粒子能级间距一般比转动能大得多, 而 $\hat{H}'$ 为转动能的量级. $\hat{H}'$ 在具不同 K 的单粒子态间的扰动可认为是很小的, 通常忽略不计. 只当 $K=\pm\frac{1}{2}$ 时这项耦合必须考虑. 这是因为轴对称场中能量算符在相对于含对称轴的平面镜像反演变换下是不变的, 而在这一变换下 K 变为 $-K$. 可见轴对称场中能级对 K 的符号简并. $K=\pm\frac{1}{2}$ 的两个态能量是一样的. $\hat{H}'$ 无论如何小, 在 $\hat{H}^0$ 的两个简并本征态之间的扰动都是不可忽略的.

对奇 A 核相继实施两个变换. 一是将整个核的对称轴反向. 对转动波函数, 这个变换就是 $\theta\to\pi-\theta, \varphi\to\pi+\varphi$ 和 $\varphi_\zeta\to\pi+\varphi_\zeta$. 在转动函数的表达式 (5.27) 中这导致变换 $\cos\frac{\theta}{2}\to\sin\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\to\cos\frac{\theta}{2}$, 以及一个因子 $(-1)^{M+K}$. 将其中的求和指标 n 改写为 $I-M-n$ 不会改变求和结果, 却显示变换 $\theta\to\pi-\theta$ 对 (5.27) 的求和而言除多出一因子 $(-1)^{I-M}$ 外就是将其中的 K 变为 $-K$. 可见这一变换将转动函数 $D^I_{MK}(\theta,\varphi,\varphi_\zeta)$ 变为 $(-1)^{I+K}D^I_{M\,-K}(\theta\varphi-\varphi_\zeta)$. 由于只是整个核取向的变化, 在这一变换下内禀波函数 ψ_K 不变. 接着进行的变换是在半固定坐标系 $x'y'\zeta$ 中相对 $\zeta x'$ 平面的反演. 它将 ψ_K 变为 ψ_{-K}, 并将 $D^I_{M\,-K}(\theta\varphi-\varphi_\zeta)$ 变为 $D^I_{M\,-K}(\theta,\varphi,\varphi_\zeta)$. 两个变换的总效果是将核的定态波函数由

$$\Psi_{I\,M\,K}=\psi_K(\xi\eta\zeta)\chi_{IMK}(\theta,\varphi,\varphi_\zeta) \tag{5.54}$$

变成 $(-1)^{I+K}\Psi_{I\,M\,-K}$. 这里定态是指

$$\hat{H}^0=\frac{1}{2\mathscr{I}}\hat{I}^2-\frac{1}{\mathscr{I}}\hat{I}_\zeta^2+\hat{H}_P \tag{5.55}$$

的本征态, 没有考虑整体转动与奇核子转动的耦合能 $\hat{H}'$. 上述两个变换都不改变 $\hat{H}^0$, 因此变换前后的两个态是 $\hat{H}^0$ 的两个简并的本征态. 它们应当适当组合起来成为总能量

$$\hat{H}=\hat{H}^0+\hat{H}' \tag{5.56}$$

的本征态. 将它们组成在上述联合变换下对称和反对称的两种状态, 其中的对称态为

$$\Psi^S_{IMK}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_{I\,M\,K}+(-1)^{I+K}\Psi_{I\,M\,-K}\right). \tag{5.57}$$

上述联合变换的净效果是将奇 A 核的偶偶核心对称轴反向. 类似前面对偶偶核的讨论知, 奇 A 核基态和低激发态波函数应在这种变换下不变. 它的零级近似态应为对称态 (5.57). 在这个态中取 $\hat{H}'$ 的平均值即得科里奥利力引起的一级能量修正. 由于 $\hat{I}'_\pm$ 和 $\hat{j}_\pm$ 都只将 K 增减 1, 这种修正只对 $|K|=\frac{1}{2}$ 的态不为零. 由

$$\hat{I}'_\pm\chi_{I\,M\,K}(\theta,\varphi,\varphi_\zeta)=\hbar\sqrt{I(I+1)-K(K\pm1)}\;\chi_{I\,M\,K\pm1}(\theta,\varphi,\varphi_\zeta) \tag{5.58}$$

可算得$|K|=\frac{1}{2}$ 转动带的能量修正

$$\Delta E_I=\int \Psi^{S\dagger}_{IM\frac{1}{2}}\hat{H}'\Psi^{S}_{IM\frac{1}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\varphi_{\zeta}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

$$=-\frac{1}{2\mathscr{J}}(-1)^{I+\frac{1}{2}}\mathrm{Re}\left(\int \Psi^{\dagger}_{IM\frac{1}{2}}\hat{I}'_{+}\hat{j}_{+}\Psi_{IM-\frac{1}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\varphi_{\zeta}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta\right)$$

$$=\frac{\hbar^2}{2\mathscr{J}}a(-1)^{I+\frac{1}{2}}\left(I+\frac{1}{2}\right), \tag{5.59}$$

其中

$$a=-\frac{1}{\hbar}\mathrm{Re}\left(\int \psi^{\dagger}_{\frac{1}{2}}\hat{j}_{+}\psi_{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta\right) \tag{5.60}$$

只含内禀自由度的矩阵元，为与I无关的常数．$|K|=1/2$转动带的能谱

$$E_I=\frac{\hbar^2}{2\mathscr{J}}\left[I(I+1)+a(-1)^{I+\frac{1}{2}}\left(I+\frac{1}{2}\right)\right] \tag{5.61}$$

含两个参数$\mathscr{J}$和a，由符合实验确定．图5-4给出了奇A核$|K|=1/2$转动带的典型能谱．它与(5.61)相符很好，确证了科里奥利力对能谱的修正．

图 5-4 奇 A 核 $_{69}{}^{171}\mathrm{Tm}$ $K=1/2$的转动带，括号内为按(5.61)的计算值
[取自Shalit 1974]

5.2 四极形变，形状转动与形状振动，无旋流体，玻尔哈密顿量

转动是空间取向的运动．一个在空间有特殊取向的物体必是各向不同性的．一个各向同性的物体没有转动自由度．球形核不会转动．进一步描写转动就要能描写物体的各向不同性．对像原子核这样的密度近于常数的物体就是要描写它的形状．原子核有一比较明确的表面，描写核形状就是描写它的表面．在核内取一点，通常取它的对称中心，作为原点．用$R(\theta,\varphi)$表示θ,φ方向表面上一点与原点的距离．函数$R(\theta,\varphi)$就是对核形状的描述．将它用球谐函数展开(多极展开)：

$$R(\theta,\varphi)=R_0\left[1+\sum_{\lambda=2}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}\alpha_{\lambda\mu}\mathrm{Y}_{\lambda\mu}(\theta,\varphi)\right]/\xi, \tag{5.62}$$

展开系数$\alpha_{\lambda\mu}$可作为描写形状的广义坐标．ξ为归一化常数，保证形状变化时体积不变．它也是$\alpha_{\lambda\mu}$的函数．(5.62)不含$\lambda=0$的项．这是因为$\mathrm{Y}_{00}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$为常数，而常数项已由(5.62)中方括号内第一项1代表．(5.62)也不含$\lambda=1$的项，因为这种项表示的是平移而不是形变．$R(\theta,\varphi)$为实数要求

$$\sum_{\lambda\mu}\alpha^*_{\lambda\mu}\mathrm{Y}^*_{\lambda\mu}(\theta,\varphi)=\sum_{\lambda\mu}\alpha_{\lambda\mu}\mathrm{Y}_{\lambda\mu}(\theta,\varphi), \tag{5.63}$$

由$\mathrm{Y}^*_{\lambda\mu}(\theta,\varphi)=(-1)^{\mu}\mathrm{Y}_{\lambda\,-\mu}(\theta,\varphi)$知

$$\alpha^*_{\lambda\mu}=(-1)^{\mu}\alpha_{\lambda\,-\mu}. \tag{5.64}$$

表面$R(\theta,\varphi)$包围的体积为

$$V=\frac{1}{3}\int_{4\pi}R^3(\theta,\varphi)\mathrm{d}\Omega, \tag{5.65}$$

$d\Omega=\sin\theta d\theta d\varphi$ 为立体角元．如(5.62)中全部广义坐标 $\alpha_{\lambda\mu}=0$，则 $\xi=1$，$R(\theta,\varphi)=R_0$，表面所围为球体积 $V_0=\frac{4\pi}{3}R_0^3$．要求形变过程中体积不变，即要始终有 $V=V_0$．由此得归一化常数

$$\xi=\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{4\pi}\left[1+\sum_{\lambda\mu}\alpha_{\lambda\mu}Y_{\lambda\mu}(\theta,\varphi)\right]^3 d\Omega\right\}^{1/3}$$

$$=\left\{1+\frac{3}{4\pi}\sum_{\lambda\mu}|\alpha_{\lambda\mu}|^2+O(\alpha_{\lambda\mu}^3)\right\}^{1/3}, \tag{5.66}$$

$$O(\alpha_{\lambda\mu}^3)=\sum_{\substack{\lambda_1\mu_1\\ \lambda_2\mu_2\\ \lambda_3\mu_3}}\alpha^*_{\lambda_1\mu_1}\alpha_{\lambda_2\mu_2}\alpha_{\lambda_3\mu_3}\sqrt{\frac{(2\lambda_2+1)(2\lambda_3+1)}{(4\pi)^3(2\lambda_1+1)}}\,C^{\lambda_1 0}_{\lambda_2 0\lambda_3 0}C^{\lambda_1\mu_1}_{\lambda_2\mu_2\lambda_3\mu_3}. \tag{5.67}$$

如形变不大，$\alpha_{\lambda\mu}$ 为小量，可略去 $\alpha_{\lambda\mu}$ 的三次幂．将(5.66)右边作二项式展开得

$$\xi=1+\frac{1}{4\pi}\sum_{\lambda\mu}\left|\alpha_{\lambda\mu}\right|^2. \tag{5.68}$$

若略去 $\alpha_{\lambda\mu}$ 的二次幂则有 $\xi=1$．

(5.62)中与一定 λ 对应的项表示的形变称 2^λ 极形变，其中最简单的是 $\lambda=2$ 的四极形变，它由五个广义坐标 $\alpha_{2\mu}$，$\mu=-2,-1,0,1,2$，描写，有五个自由度．将核的空间取向作一转动 $\mathscr{R}$，球谐函数 $Y_{\lambda\mu}(\theta,\varphi)$ 变为

$$\hat{\mathscr{R}}Y_{\lambda\mu}(\theta,\varphi)=\sum_{\mu'=-\lambda}^{\lambda}D^{\lambda}_{\mu'\mu}(\mathscr{R})Y_{\lambda\mu'}(\theta,\varphi), \tag{5.69}$$

$\hat{\mathscr{R}}$ 为转动算符，转动函数 $D^{\lambda}_{\mu'\mu}(\mathscr{R})$ 是转动 $\mathscr{R}$ 的函数．(5.69)表明 2^λ 极形变核经转动后仍为 2^λ 极形变核，只是形变坐标 $\alpha_{\lambda\mu}$ 变了．转动可用形变坐标的变化表示．设 t 时核取向相对它在 t_0 时的取向差一转动 $\mathscr{R}(t)$，则 t 时 2^λ 极形变坐标与 t_0 时形变坐标有关系

$$\alpha_{\lambda\mu}(t)=\sum_{\mu'=-\lambda}^{\lambda}D^{\lambda}_{\mu\mu'}(\mathscr{R}(t))\alpha_{\lambda\mu'}(t_0). \tag{5.70}$$

转动可以只是一种形变运动，而不必真有物质或能量的转动．可归结为单纯形变的转动称为形状转动．下面将看到，在角动量不太高的范围内，核转动相当接近形状转动．转动有三个自由度．在 2^λ 极形变的 $2\lambda+1$ 个自由度中扣除这三个自由度，剩下的就是固定空间取向后的形变自由度．固定空间取向后的形变才是通常所指的形变，称为内禀形变．对四极形变，内禀形变自由度只有两个．

考虑四极内禀形变，即设多极展开(5.62)中只含 $\lambda=2$ 的项，且空间取向是固定的．进一步要求反演对称性

$$R(\theta,-\varphi)=R(\pi-\theta,\varphi)=R(\theta,\varphi) \tag{5.71}$$

则有 $\alpha_{2\,1}=\alpha_{2\,-1}=0$，$\alpha_{2\,2}=\alpha_{2\,-2}\equiv\alpha_2$．将 α_{20} 写作 α_0，(5.62)简化为

$$R(\theta,\varphi)=R_0[1+\alpha_0 Y_{20}(\theta,\varphi)+\alpha_2(Y_{2\,2}(\theta,\varphi)+Y_{2\,-2}(\theta,\varphi))]/\xi. \tag{5.72}$$

令

$$\alpha_0\equiv\beta\cos\gamma,\qquad \alpha_2\equiv\frac{\beta}{\sqrt{2}}\sin\gamma, \tag{5.73}$$

由此定义的 β 和 γ 就是描写四极内禀形变的两个广义坐标．将

$$Y_{2\,0}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta-1\right),\quad Y_{2\,\pm2}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm2i\varphi} \tag{5.74}$$

代入(5.72)，得

$$R(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=R_0\left[1+\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\beta\sum_{\kappa=1}^{3}\cos\theta_\kappa\cos\left(\gamma-\frac{2\kappa\pi}{3}\right)\right]\Big/\xi, \tag{5.75}$$

其中 θ_κ 表示所考虑的方向与 κ 轴的交角，$\kappa=1,2,3$ 分别代表 x,y,z 三轴．θ_3 就是球坐标中的方位角 θ，而 θ_1 和 θ_2 分别是所在方向与 x 轴和 y 轴的交角，因此与球坐标 $\theta\varphi$ 的关系为

$$\cos\theta_1=\sin\theta\cos\varphi,\qquad \cos\theta_2=\sin\theta\sin\varphi. \tag{5.76}$$

自然，θ_1，θ_2 和 θ_3 彼此不是独立的，只相当于 θ,φ 两个自由度．(5.75)表明，四极内禀形状有三条主轴，对应 $\kappa=1$、2 和 3．当它用(5.72)表示时，这三条主轴分别与 x，y 和 z 轴重合．第 κ 主轴半轴长为

$$R_\kappa=R_0\left[1+\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\beta\cos\left(\gamma-\frac{2\kappa\pi}{3}\right)\right]\Big/\xi. \tag{5.77}$$

给定方向表面点与中心的距离只与这个方向与各主轴夹角余弦的

平方有关．这实际上是由对称性(5.71)规定的．由(5.72)和(5.73)知

$$\sqrt{\alpha_0^2+2\alpha_2^2}=|\beta|\ , \tag{5.78}$$

可用 β 表示总形变．在 $\gamma=0$ 时，β 表示轴对称四极形变，$\beta>0$ 为长四极形变，$\beta<0$ 为扁四极形变．不为零的 γ 破坏轴对称．由(5.77)看出，当 $\beta>0$ 时，γ 由零向正方向的微小偏离使 x 主轴的长度大于 y 主轴的长度，向负方向的偏离则使 y 主轴的长度大于 x 主轴的长度．当 $\beta<0$ 时情形相反．当 γ 增大到 $\frac{2\pi}{3}$ 时，从(5.75)和(5.77)看到，内禀形状又回到 $\gamma=0$ 的情形，只是第 κ 主轴变成第 $\kappa-1$ 主轴，第 1 主轴变成第 3 主轴．这实际上是一个绕方向余弦为$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$的轴的 $-\frac{2\pi}{3}$ 形状转动，而不是内禀形变．因此，为描写内禀形变可限定 $|\gamma|<\pi/3$ ．

考虑一般四极形变，包括转动和内禀形变的动力学．设形变是缓慢的，广义速度 $\dot{\alpha}_{2\mu}$ 为小量．将拉格朗日量展成广义速度的幂级数．零次项记为 $-V(\alpha_{2\mu})$, $V(\alpha_{2\mu})$ 为势函数．广义速度的一次项因时间反演对称而为零；二次项即为动能，按转动对称的要求为

$$T=\frac{B}{2}\sum_{\mu=-2}^{2}|\dot{\alpha}_{2\mu}|^2\ . \tag{5.79}$$

B 为四极形变的惯量参数，可与广义坐标 $\alpha_{2\mu}$ 有关，但为简单计可暂取作常数．对内禀形变(5.72)—(5.73)，动能为

$$T_D=\frac{B}{2}\left(\dot{\alpha}_0^2+2\dot{\alpha}_2^2\right)=\frac{B}{2}\left(\dot{\beta}^2+\beta^2\dot{\gamma}^2\right)\ . \tag{5.80}$$

对形状转动，内禀形状不变，$\dot{\beta}=\dot{\gamma}=0$，只是用(5.72)表示内禀形状的参照系发生转动．经这种转动后在固定参照系看，同样的内禀形状已不由(5.72)表示．不过由于(5.69)它仍由(5.62)表示，且仍只含

$\lambda=2$ 的项．设原子核绕 z 轴转无穷小角 $\mathrm{d}\varphi$，表示表面形状的函数 $R(\theta,\varphi)$ 在内禀形状不变的条件下应变为

$$R(\theta,\varphi-\mathrm{d}\varphi)=R(\theta,\varphi)-\mathrm{d}\varphi\frac{\partial R}{\partial\varphi}$$
$$=\left(1+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{i}\hbar}\hat{L}_z\right)R(\theta,\varphi)\ , \tag{5.81}$$

其中 $\hat{L}_z=-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$ 为轨道角动量 z 投影的算符．此式是角动量算符与无穷小转动关系的一例．在此处讨论的问题中，它可一般地表述为：绕任一轴 κ 转无穷小角 $\mathrm{d}\varphi_\kappa$，形状函数 $R(\theta,\varphi)$ 在内禀形状不变的条件下变为

$$R(\theta,\varphi)+\frac{\mathrm{d}\varphi_\kappa}{\mathrm{i}\hbar}\hat{L}_\kappa R(\theta,\varphi)=\left(1+\frac{\mathrm{d}\varphi_\kappa}{\mathrm{i}\hbar}\hat{L}_\kappa\right)R(\theta,\varphi)\ , \tag{5.82}$$

$\hat{L}_\kappa$ 为轨道角动量在 κ 方向上投影的算符．将(5.72)代入此式右边可算出绕 κ 轴转 $\mathrm{d}\varphi_\kappa$ 角时广义坐标 $\alpha_{2\mu}$ 的变化．例如对绕 x 轴的转动，$\kappa=1$,

$$\hat{L}_1=\hat{L}_x=\frac{1}{2}\left(\hat{L}_++\hat{L}_-\right)\ ,$$

其中 $\hat{L}_+$ 为 $\hat{L}_z$ 的量子数的升算符：

$$\hat{L}_+\mathrm{Y}_{\lambda\mu}(\theta,\varphi)=\hbar\sqrt{\lambda(\lambda+1)-\mu(\mu+1)}\ \mathrm{Y}_{\lambda\,\mu+1}(\theta,\varphi),$$

$\hat{L}_-$ 为 $\hat{L}_z$ 的量子数的降算符：

$$\hat{L}_-\mathrm{Y}_{\lambda\mu}(\theta,\varphi)=\hbar\sqrt{\lambda(\lambda+1)-\mu(\mu-1)}\ \mathrm{Y}_{\lambda\,\mu-1}(\theta,\varphi)\ .$$

因此

$$\hat{L}_1R(\theta,\varphi)=R_0\left[\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha_0+\alpha_2\right)\left(\mathrm{Y}_{2\,1}(\theta,\varphi)+\mathrm{Y}_{2\,-1}(\theta,\varphi)\right)\right]\Big/\xi\ . \tag{5.83}$$

设在 $\mathrm{d}t$ 时间内原子核绕 x 轴转了 $\mathrm{d}\varphi_1$ 角，因而有角速度 $\omega_1=\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t}$．由(5.62)，(5.72)，(5.82)，(5.83)和(5.73)得在此转动下四极形变的广义速度

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\alpha}_{2\,2}=\dot{\alpha}_{2\,-2}=\dot{\alpha}_{2\,0}=0,\\&\dot{\alpha}_{2\,1}=\dot{\alpha}_{2\,-1}=-\mathrm{i}\omega_1\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\ \alpha_0+\alpha_2\right)=\mathrm{i}\omega_1\sqrt{2}\ \beta\sin\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\right).\end{aligned}\right\}\tag{5.84}$$

因此绕 x 主轴转动的动能按(5.79)可表为

$$T_1=\frac{1}{2}\ \mathscr{I}_1\omega_1^2\ ,\tag{5.85}$$

其中绕 x 主轴的转动惯量为

$$\mathscr{I}_1=4B\beta^2\sin^2\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\right)\ .\tag{5.86}$$

类似的办法可得绕 y 主轴和 z 主轴的转动惯量 $\mathscr{I}_2$ 和 $\mathscr{I}_3$. 它们可统一地表为

$$\mathscr{I}_\kappa=4B\beta^2\sin^2\left(\gamma-\frac{2\kappa\pi}{3}\right)\ ,\quad \kappa=1,2,3\ .\tag{5.87}$$

而转动动能即为

$$T_R=\frac{1}{2}\sum_{\kappa=1}^{3}\mathscr{I}_\kappa\omega_\kappa^2\ .\tag{5.88}$$

四极形变总动能为

$$T=T_D+T_R=\frac{B}{2}\ (\dot{\beta}^2+\beta^2\dot{\gamma}^2)+\frac{1}{2}\sum_{\kappa=1}^{3}\mathscr{I}_\kappa\omega_\kappa^2\ ,\tag{5.89}$$

它由一个惯性参量 B 完全确定.

原子核处于各向同性的环境中,势函数应与它的空间取向无关,而只与内禀形变广义坐标 β 和 γ 有关. 将它记作 $V(\beta,\gamma)$, 原子核四极形变的拉格朗日量为

$$L=T-V=\frac{B}{2}\ (\dot{\beta}^2+\beta^2\dot{\gamma}^2)+\frac{1}{2}\sum_{\kappa=1}^{3}\mathscr{I}_\kappa\omega_\kappa^2-V(\beta,\gamma)\ .\tag{5.90}$$

为将此动力学量子化最好将它写成正则形式. 而为避免任意性则最好采用广义笛卡尔坐标. 为此,重新采用

$$a_0=\beta\cos\gamma=\alpha_0\quad 和\quad a_2=\beta\sin\gamma=\sqrt{2}\ \alpha_2\tag{5.91}$$

为表示内禀形状的广义坐标. 拉格朗日量(5.90)可写为

$$L=\frac{B}{2}\ (\dot{a}_0^2+\dot{a}_2^2)+\sum_{\kappa=1}^{3}\frac{1}{2}\ \mathscr{I}_\kappa\omega_\kappa^2-V(a_0,a_2)\ .\tag{5.92}$$

与 a_0 和 a_2 正则共轭的广义动量分别为

$$b_0=\frac{\partial L}{\partial\dot{a}_0}=B\dot{a}_0\quad 和\quad b_2=\frac{\partial L}{\partial\dot{a}_2}=B\dot{a}_2\ ,\tag{5.93}$$

而与绕 κ 轴转动的方位角 φ_κ 正则共轭的广义动量则为 κ 方向的角动量

$$I_\kappa=\frac{\partial L}{\partial\omega_\kappa}=\mathscr{I}_\kappa\omega_\kappa\ .\tag{5.94}$$

哈密顿量为

$$\begin{aligned}H&=b_0\dot{a}_0+b_2\dot{a}_2+\sum_{\kappa=1}^{3}I_\kappa\omega_\kappa-L\\&=\frac{1}{2B}\ (b_0^2+b_2^2)+\sum_{\kappa=1}^{3}\frac{1}{2\mathscr{I}_\kappa}\ I_\kappa^2+V(a_0,a_2)\ .\end{aligned}\tag{5.95}$$

量子化就是将动力学变量 a_0, a_2, b_0, b_2 和 I_κ 分别变成算符 $\hat{a}_0, \hat{a}_2, \hat{b}_0, \hat{b}_2$ 和 $\hat{I}_\kappa$, 并令它们满足正则对易关系.

$$\left.\begin{aligned}&[\hat{a}_0,\hat{a}_2]=[\hat{b}_0,\hat{b}_2]=[\hat{a}_0,\hat{b}_2]=[\hat{a}_2,\hat{b}_0]=0\ ,\\&[\hat{a}_0,\hat{b}_0]=[\hat{a}_2,\hat{b}_2]=1\ .\end{aligned}\right\}\tag{5.96}$$

$\hat{I}_\kappa$ 则满足角动量的熟知对易关系. 在广义坐标表象中 $\hat{a}_0$ 和 $\hat{a}_2$ 为乘算符,为满足对易关系(5.96)可将与它们正则共轭的广义动量表为

$$\hat{b}_0=-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial a_0}\ ,\qquad \hat{b}_2=-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial a_2}\ .\tag{5.97}$$

哈密顿量算符为

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2B}\left(\frac{\partial^2}{\partial a_0^2}+\frac{\partial^2}{\partial a_2^2}\right)+\sum_{\kappa=1}^{3}\frac{\hat{I}_\kappa^2}{2\mathscr{I}_\kappa}+V(a_0,a_2)\ .\tag{5.98}$$

由(5.91)及其逆变换

$$\beta=\pm\sqrt{a_0^2+a_2^2}\ ,\qquad \gamma=\tan^{-1}\frac{a_2}{a_1}\tag{5.99}$$

可将算符(5.98)重新用变量 β 和 γ 表出:

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2B}\left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)+\sum_{\kappa=1}^{3}\frac{\hat{I}_\kappa^2}{2\mathscr{I}_\kappa}+V(\beta,\gamma)\ . \tag{5.100}$$

表示内禀形状运动的波函数 ψ，作为广义笛卡尔坐标 a_0 和 a_2 的函数，几率解释是内禀形状在 a_0 附近 $\mathrm{d}a_0$ 区间和 a_2 附近 $\mathrm{d}a_2$ 区间内的几率为

$$|\psi(a_0,a_2)|^2\mathrm{d}a_0\mathrm{d}a_2\ . \tag{5.101}$$

由 (5.91) 知

$$\mathrm{d}a_0\mathrm{d}a_2=|\beta|\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\gamma\ . \tag{5.102}$$

变换成 β 和 γ 的函数后，波函数的统计解释是内禀形状在 β 附近 $\mathrm{d}\beta$ 区间和 γ 附近 $\mathrm{d}\gamma$ 区间内的几率为

$$|\psi(\beta,\gamma)|^2|\beta|\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\gamma\ . \tag{5.103}$$

这里多出权重 $|\beta|$，β 是变换 (5.91) 的雅可比 (Jacobi) 行列式的值.

定义新波函数

$$\psi_{\mathrm{B}}(\beta,\gamma)=(\beta^3\sin3\gamma)^{-1/2}\,\psi(\beta,\gamma)\ , \tag{5.104}$$

内禀形状在 β 附近 $\mathrm{d}\beta$ 区间和 γ 附近 $\mathrm{d}\gamma$ 区间的几率可表为

$$|\psi_{\mathrm{B}}(\beta,\gamma)|^2\beta^4|\sin3\gamma|\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\gamma\ . \tag{5.105}$$

与 (5.103) 相比又多一权重 $|\beta^3\sin3\gamma|$. 为保证量子力学的内容不变，须对所有算符作相应的相似变换. 例如哈密顿量算符 (5.100) 就须变为

$$\hat{H}_{\mathrm{B}}=(\beta^3\sin3\gamma)^{-1/2}\hat{H}(\beta^3\sin3\gamma)^{1/2}$$

$$=-\frac{\hbar^2}{2B}\left(\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{\beta^2\sin3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)+\sum_{\kappa=1}^{3}\frac{\hat{I}_\kappa^2}{2\mathscr{I}_\kappa}+V_{\mathrm{B}}(\beta,\gamma), \tag{5.106}$$

其中

$$V_{\mathrm{B}}(\beta,\gamma)=V(\beta,\gamma)+\frac{9\hbar^2}{8B}\frac{1}{\beta^2\sin^2 3\gamma}\ . \tag{5.107}$$

原子核四极形变的理论由小玻尔 (Bohr 1952) 详细研究，(5.106) 称为玻尔哈密顿量. 由于 (5.100) 表示的 $\hat{H}$ 比 (5.106) 表示的 $\hat{H}_{\mathrm{B}}$ 简单，(5.103) 中的权重也比 (5.105) 的权重简单，在实际计算中可采用 $\hat{H}$ 和 ψ 代替 $\hat{H}_{\mathrm{B}}$ 和 ψ_{B} .

(5.100) 或 (5.106) 有时可分离变量. 例如 (5.100) 可表为

$$\hat{H}=\hat{H}_D+\hat{H}_R\ , \tag{5.108}$$

其中

$$\hat{H}_D=-\frac{\hbar^2}{2B}\left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)+V(\beta,\gamma) \tag{5.109}$$

只与描写内禀形状的广义坐标 β 和 γ 有关；

$$\hat{H}_R=\sum_{\kappa=1}^{3}\frac{\hat{I}_\kappa^2}{2\mathscr{I}_\kappa} \tag{5.110}$$

则为上节已初步讨论过的转动哈密顿量. 不过此处的转动惯量 $\mathscr{I}_\kappa$ 与内禀形状坐标 β 和 γ 有明确关系 (5.87). 这使得 (5.108) 在一般情况下并不能真的分离变量. 但若冻结 $\gamma=0$，变形限定为轴对称的，转动波函数就完全确定为 $\chi_{IMK}(\Theta)$，Θ 为描写核的空间取向的三个广义坐标，可以就是上节定义的三个欧拉角，但与内禀形状坐标 β 和 γ 无关. $\hat{H}$ 的本征函数可写为

$$\Psi=\psi(\beta,\gamma)\chi_{IMK}(\Theta)\ , \tag{5.111}$$

这就分离了变量. 由于

$$\hat{H}_R\chi_{IMK}=E_{I,K}(\beta)\chi_{IMK} \tag{5.112}$$

的本征值通过转动惯量 (5.87) 与 β 有关，且已冻结 $\gamma=0$，$\hat{H}$ 的本征方程成为 $\psi(\beta)\equiv\psi(\beta,0)$ 的方程

$$-\frac{\hbar^2}{2B}\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta\frac{\partial\psi}{\partial\beta}+V_{IK}(\beta)\psi=E\psi\ , \tag{5.113}$$

其中

$$V_{IK}(\beta)=V(\beta,0)+E_{I,K}(\beta)\ . \tag{5.114}$$

如事先已选定了势函数 $V(\beta,\gamma)$，$V_{IK}(\beta)$ 就是 β 的一个确定函数. 将它代入 (5.113) 即可讨论 β 形变运动. 对它的基态和低激发态，可将 $V_{IK}(\beta)$ 在取极小值处 β_0 附近展开. $\beta-\beta_0$ 的零次项即 V_{IK} 的极小值，一次项为零，二次项导致绕平衡位形 β_0 的简谐振动；高次项为对振动的非简谐修正，这种修正被设为小量而常被忽略. 这就是 β 振动. 由于 $\gamma=0$，β 振动为轴对称的. 由于它只是内禀形变中 $\mathrm{Y}_{20}(\theta,\varphi)$ 模式

的激发，β 振动声子角动量量子数 $\lambda=2$，角动量在对称轴上投影的量子数 $\mu=0$. (5.113) 的本征值 E 通过 V_{IK} 而与转动量子数 I, K 有关. 因此每一 β 振动能级实际都是一个转动带. 由于声子角动量在对称轴上投影为零，轴对称核本身又不能绕对称轴转动，β 振动－转动带的量子数 $K=0$.

也可允许 γ 在零附近涨落，如果将 β 冻结在它的平衡值 β_0 处，这就是 γ 振动. 仍取 (5.111) 为零级近似波函数，不过冻结 $\beta=\beta_0$，$\hat{H}$ 的本征方程成为 $\psi(\gamma)\equiv\psi(\beta_0,\gamma)$ 的方程

$$-\frac{\hbar^2}{2B\beta_0^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\gamma^2}+V(\beta_0,\gamma)\psi=\Delta E_{IK}\psi\ , \tag{5.115}$$

其中

$$\Delta E_{IK}=E-E_{I,K}(\beta_0) \tag{5.116}$$

为 γ 形变能. 同样将 $V(\beta_0,\gamma)$ 在 $\gamma=0$ 附近展成泰勒级数，二次项即导致简谐 γ 振动. γ 振动是偏离轴对称的振动，两条垂直于对称轴的主轴长度交替消涨. 它包括内禀形变中 $Y_{22}(\theta,\varphi)$ 和 $Y_{2-2}(\theta,\varphi)$ 模式的激发，γ 振动声子角动量量子数 $\lambda=2$，角动量在对称轴上投影的量子数 $\mu=\pm2$. γ 振动能级也对应一个转动带. 由于声子在对称轴上的角动量投影为 ±2，γ 振动－转动带的量子数 $K=2$. β 振动－转动带和 γ 振动转动带的上述特征，以及振动能级的等距离谱均已在实验中观察到.

达维多夫(Davydov 1958)等还研究过 $\gamma\neq0$ 的 β 振动和非轴对称核的转动. 在 $\gamma\neq0$ 从而非轴对称情况下，核角动量在三个主轴上的投影均不守恒，K 不再是好量子数，转动波函数应一般地写为

$$\chi_{IM}(\beta,\gamma;\Theta)=\sum_{K=-I}^{I}C_{IM}(\beta,\gamma;K)\chi_{IMK}(\Theta)\ , \tag{5.117}$$

其中的系数 C_{IM} 由本征方程

$$\hat{H}_R\chi_{IM}=E_I\chi_{IM} \tag{5.118}$$

解出. 由于 I 总是好量子数，K 只能取 $2I+1$ 个不同值，(5.118) 中 $\hat{H}_R$ 可表为一个 $2I+1$ 阶矩阵，(5.118) 本身不过是一组 $2I+1$ 个联立线性

代数方程，求解是不困难的. 问题是形变坐标 $\beta\gamma$ 通过转动惯量 $\mathscr{I}_\kappa$ 进入 $\hat{H}_R$，从而影响系数 C_{IM}. 这使 χ_{IM} 与 β,γ 和 Θ 都有关系，因而不能分离变量. 然而略为仔细观察就会发现，β 在转动惯量的表达式 (5.87) 中不过是一相乘因子. 在 (5.118) 两边同乘 β^2 后，左边的算符不再与 β 有关，右边则只是在本征值 E 上乘了 β^2. 这使系数 C_{IM} 实际只与 γ 有关而与 β 无关. $\hat{H}_R$ 的本征函数 $\chi_{IM}(\gamma;\Theta)$ 与 β 无关，而本征值 $E_I\propto\frac{1}{\beta^2}$. $\hat{H}$ 的本征函数在冻结 γ 的情况下可写为

$$\Psi=\psi(\beta,\gamma)\chi_{IM}(\gamma;\Theta)\ , \tag{5.119}$$

变量 β 得以与 Θ 分离. 将冻结了 γ 的形变波函数简写为 $\psi(\beta)$，$\hat{H}$ 的本征方程即关于它的方程

$$-\frac{\hbar^2}{2B}\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta\frac{\partial\psi}{\partial\beta}+V_I(\beta,\gamma)\psi=E(I,\gamma)\psi\ , \tag{5.120}$$

其中

$$V_I(\beta,\gamma)=V(\beta,\gamma)+\frac{\mathscr{E}_I(\gamma)}{\beta^2}\ , \tag{5.121}$$

$\mathscr{E}_I(\gamma)$ 为 $\beta^2\hat{H}_R$ 的本征值. (5.120) 给出非轴对称变形核的 β 振动—转动谱 $E(I,\gamma)$ 随非轴对称形变参数 γ 的变化规律.

本世纪60年代，库马尔(Kumar 1967)等用参数化势函数对玻尔哈密顿量作了广泛的数值研究. 检验了求解的各种近似方法，讨论了解的对称性质，并得以说明原子核从球形到变形的过渡. 玻尔哈密顿量对原子核四极形变的研究，定性地说是相当成功的.

玻尔哈密顿量 (5.106) 或 (5.100) 中的惯性参量 B 和势函数 V 原则上都可从理论计算. 为此需要一个关于核内物质运动和相互作用的模型理论. 将熟知的液滴模型发展成动力学的，可建立原子核的流体力学模型，它将核内的运动看作核流体的流动. 下面看看，如果核流体是一种理想流体，如果它既无粘滞性也没有旋涡，四极形变的惯性参量 B 应取何值. 用 $\boldsymbol{v}(r,\theta,\varphi)$ 表核内 (r,θ,φ) 处流点的速度. 对无旋流体有

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=0\ ,\tag{5.122}$$

因此有速度势 $\Phi(r,\theta,\varphi)$,

$$\nabla\Phi=\boldsymbol{v}\ .\tag{5.123}$$

用 $\rho(r,\theta,\varphi)$ 表核流体的密度,连续性方程为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0\ .\tag{5.124}$$

由于核内密度可当作常数,这个方程简化为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0\ ,\tag{5.125}$$

即核流体的速度场还是无散的. 将(5.123)代入此式得

$$\nabla^2\Phi=0\ ,\tag{5.126}$$

它的通解可写为

$$\Phi(r,\theta,\varphi)=\sum_{\lambda\mu}A_{\lambda\mu}\left(\frac{r}{R_0}\right)^{\lambda}\mathrm{Y}_{\lambda\mu}(\theta,\varphi)\ ,\tag{5.127}$$

常数 $A_{\lambda\mu}$ 为 Φ 的多极展开系数,R_0 为当原子核为球形时的半径. 由(5.127)和(5.123)可得核表面的径向速度

$$v_r(R,\theta,\varphi)=\left.\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_R\approx\left.\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_{R_0}=\sum_{\lambda\mu}\frac{\lambda A_{\lambda\mu}}{R_0}\mathrm{Y}_{\lambda\mu}(\theta,\varphi)\ ,\tag{5.128}$$

在第二等号处已设核形变为小量. 另一方面,由(5.62)和(5.66)知,到 $\alpha_{\lambda\mu}$ 和 $\dot{\alpha}_{\lambda\mu}$ 的一次项,$\theta\varphi$ 方向表面的径向速度为

$$\frac{\partial R}{\partial t}=R_0\sum_{\lambda\mu}\dot{\alpha}_{\lambda\mu}\mathrm{Y}_{\lambda\mu}(\theta,\varphi)\ ,\tag{5.129}$$

其中 $\dot{\alpha}_{\lambda\mu}\equiv\frac{\mathrm{d}\alpha_{\lambda\mu}}{\mathrm{d}t}$ 为 $\lambda\mu$ 模式形变的广义速度. 比较(5.128)和(5.129),定得解(5.127)中的积分常数

$$A_{\lambda\mu}=R_0^2\dot{\alpha}_{\lambda\mu}/\lambda\ .\tag{5.130}$$

对这样确定了常数的速度势(5.127)算出梯度[①],得核内速度场

① 参阅附录I.

$$\boldsymbol{v}(r,\theta,\varphi)=\sum_{\lambda\mu}A_{\lambda\mu}\nabla\left[\left(\frac{r}{R_0}\right)^{\lambda}\mathrm{Y}_{\lambda\mu}(\theta,\varphi)\right]\tag{5.131}$$
$$=\sum_{\lambda\mu}\sqrt{\lambda(2\lambda+1)}\ \frac{A_{\lambda\mu}}{R_0}\left(\frac{r}{R_0}\right)^{\lambda-1}\mathbf{T}_{\lambda-1\,\lambda\,\mu}(\theta,\varphi)\ ,$$

其中 $\mathbf{T}_{\lambda-1\,\lambda\,\mu}(\theta,\varphi)$ 为(3.85)式定义的向量球谐函数. 核流体流动的总动能为

$$T=\frac{1}{2}\int_{核内}\rho v^2\mathrm{d}\tau=\sum_{\lambda=2}^{\infty}\frac{B_\lambda}{2}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}|\dot{\alpha}_{\lambda\mu}|^2\ ,\tag{5.132}$$

其中

$$B_\lambda=\frac{3Am}{4\pi\lambda}R_0^2\tag{5.133}$$

为 2^λ 极形变的惯性参量,A 为核质量数,m 为核子质量. (5.132)的积分计算中用了向量球谐函数的正交归一性,此外还用了(5.130)和核密度的表达式

$$\rho=Am\Big/\left(\frac{4\pi}{3}R_0^3\right)\ .\tag{5.134}$$

(5.132)和(5.133)精确到 $\dot{\alpha}_{\lambda\mu}$ 和 $\alpha_{\lambda\mu}$ 的二次幂. 四极形变的惯性参数为

$$B=B_2=\frac{3}{8\pi}AmR_0^2\ .\tag{5.135}$$

代入(5.87)得轴对称四极形变核绕垂直于对称轴方向转动的转动惯量

$$\mathscr{I}=\frac{9}{8\pi}AmR_0^2\beta^2\ .\tag{5.136}$$

转动惯量可由转动谱测得。例如按(5.31),

$$\mathscr{I}=(I+1)\hbar^2/(E_{I+1}-E_I)\ .\tag{5.137}$$

这样得到的转动惯量观测值可用来检验(5.136). 为此还需知原子核的形变参数 β. 它可由核电四极矩的观测值得到. 轴对称四极形变核的内禀电四极矩为

$$Q=2\int_{\text{核内}}\rho_c r^2 \mathrm{P}_2(\cos\theta)\mathrm{d}\tau$$

$$=2\rho_c\int_{4\pi}\mathrm{d}\Omega\int_0^{R(\theta,\varphi)}\mathrm{P}_2(\cos\theta)r^4\mathrm{d}r$$

$$=2\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\ \rho_c\int_{4\pi}\mathrm{Y}^*_{2\,0}(\theta,\varphi)\ \frac{R_0^5}{5}\ (1+\beta\mathrm{Y}_{2\,0}(\theta,\varphi))^5\mathrm{d}\Omega$$

$$=\frac{3}{\sqrt{5\pi}}ZR_0^2\beta\ , \tag{5.138}$$

Z 为核电荷数，

$$\rho_c=Z\Big/\left(\frac{4\pi}{3}\ R_0^3\right) \tag{5.139}$$

为电荷数密度.(5.138)精确到 β 的一次幂，推导中已设核电荷数密度在核内为常数．利用(5.138)从电四极矩的测量结果可得形变参数 β. 发现总形变值 β 一般不超过 0.5，多集中在 0.2 至0.45 区间内．由这些 β 值按(5.136)算得的无旋流体核转动惯量则都比实验值低．

作为对比，也可设核为刚体．一个轴对称四极形变刚体核绕垂直于对称轴方向转动的转动惯量为

$$\mathscr{I}=\rho\int_{4\pi}\mathrm{d}\Omega\int_0^{R(\theta,\varphi)}\frac{1+\cos^2\theta}{2}\ r^4\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\rho R_0^5}{15}\int_{4\pi}(1+\beta\mathrm{Y}_{2\,0}(\theta,\varphi))^5\left(\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\ \mathrm{Y}_{2\,0}(\theta,\varphi)+2\right)\mathrm{d}\Omega$$

$$=\frac{2}{5}\ AmR_0^2\left(1+\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\ \beta\right)\ , \tag{5.140}$$

此式精确到 β 的一次幂．将由电四极矩测得的 β 值代入此式，所得转动惯量高于实验值．图 5-5 表示出转动惯量的实验值介于它的无旋流体值和刚体值之间，显示核内物性介于理想流体与刚体之

间．

按液滴模型，形变核与球形核的能量差来自表面能与库仑能的变化．据此不难算出内禀四极形变核的势能函数 $V(\beta,\gamma)$. 不过在与实验比较时并不用这样算得的势函数，而是用参数化的势函数，其中的参数由与实验结果的比较来确定．

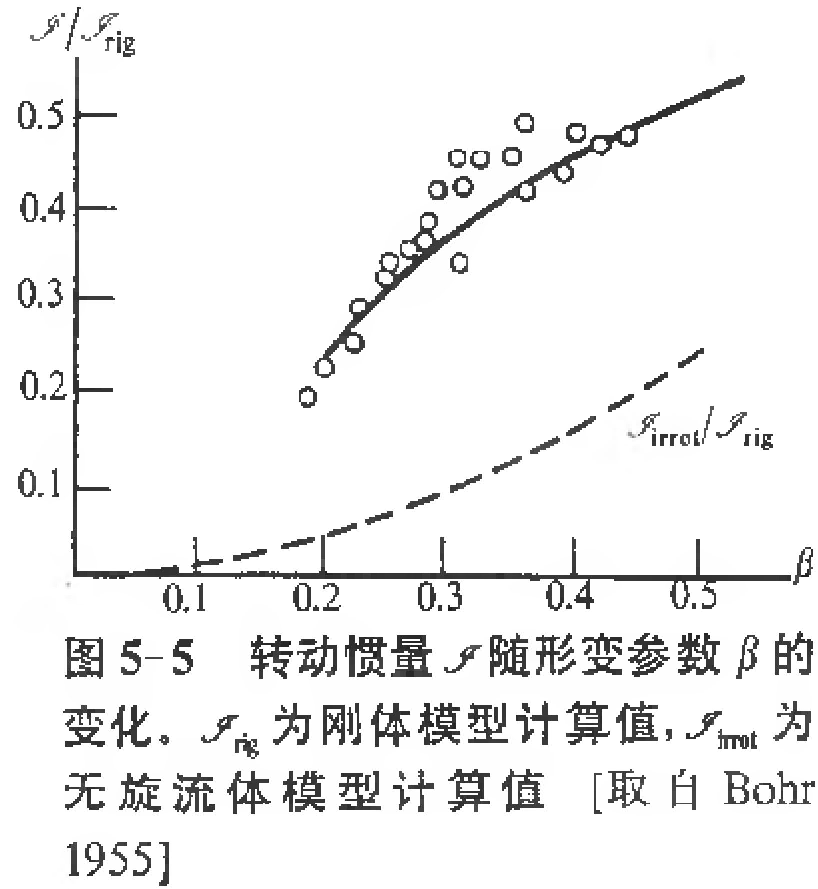


图 5-5　转动惯量 $\mathscr{I}$ 随形变参数 β 的变化．$\mathscr{I}_{rig}$ 为刚体模型计算值，$\mathscr{I}_{irrot}$ 为无旋流体模型计算值　[取自 Bohr 1955]

5.3　核内的成分振动与密度振动，巨共振

上节讨论的形变运动中，核内密度和成分都被假定为不变的．这种运动的激发能较低，一般不超过 1MeV. 实际上核内各点的密度和成分都可随时间变化．例如有些地方质子数增多中子数减少，而另一些地方质子数减少而中子数增多，整个原子核的质量数和电荷数仍维持不变．这就是核内成分的逐点涨落，在这种涨落中不仅可维持原子核的体积不变从而保持平均密度不变，而且还能维持每一点的密度都不变．由于核的压缩模数虽然很大却并非无穷，原子核仍然是可压缩的．核内密度可逐点涨落．这种成分和密度的涨落激发能较高，可达 10^1MeV. 高激发态衰变方式多，寿命短，能级宽，能级密度大．这又使能级彼此重叠，在实验中表现为宽度达若干兆电子伏的共振峰，称为巨共振．巨共振有丰富的实验资料和明确的经验规律，大体上得到理论的说明，并且提供了关于理论正确性的重要判据．下面作略为深入的介绍．

核内成分和密度的涨落都很小，可当作微振动，就称为成分振动和密度振动．将核内物质当作流体，为了讨论成分振动还需分别

考虑中子流体和质子流体．按液滴模型，原子核有一项不对称能

$$E_{as}=b_1\frac{(N-Z)^2}{A}\ , \tag{5.141}$$

在中子数 N 与质子数 Z 相等的情况下它取极小值 0．式中 A 为原子核的质量数，b_1 为经验常数，由符合实验数据确定．采用迈尔斯(Myers 1974)等的核质量公式，

$$b_1=36.5\ \text{MeV}\ . \tag{5.142}$$

设不对称能在核内逐点存在，即设核内有一项不对称能密度

$$\mathscr{E}_{as}=b_1\frac{(\rho_n-\rho_p)^2}{\rho}\ , \tag{5.143}$$

其中 ρ_n 为中子数密度，ρ_p 为质数密度，ρ 为核子数密度．若核内中子和质子都均匀分布，处处有

$$\frac{\rho_n-\rho_p}{\rho}=\frac{N-Z}{A}\ , \tag{5.144}$$

则 $\mathscr{E}_{as}$ 在核内的体积分即给出不对称能(5.141)．不对称能密度(5.143)促使中子与质子在核内均匀混合．在这两种成分偏离平衡分布时，不对称能密度 $\mathscr{E}_{as}$ 提供恢复力，导致核内成分振动．核内两种流体的总动能为

$$T=\int_{核内}\frac{m}{2}(\rho_n v_n^2+\rho_p v_p^2)\mathrm{d}\tau\ , \tag{5.145}$$

m 为核子质量，$\boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{r},t)$ 和 $\boldsymbol{v}_p(\boldsymbol{r},t)$ 分别为中子流体和质子流体的速度场．与成分振动有关的势能为

$$V=\int_{核内}\mathscr{E}_{as}\mathrm{d}\tau=b_1\int_{核内}\frac{(\rho_n-\rho_p)^2}{\rho}\mathrm{d}\tau\ . \tag{5.146}$$

拉格朗日量为

$$L=T-V\ , \tag{5.147}$$

作用量为

$$\mathscr{A}=\int_{t_1}^{t_2}L\mathrm{d}t\ . \tag{5.148}$$

由哈密顿原理

$$\delta\mathscr{A}=0 \tag{5.149}$$

可导得流体的运动方程．先对动能(5.145)变分得

$$\delta T=\int_{核内}m(\rho_n\boldsymbol{v}_n\cdot\delta\boldsymbol{v}_n+\rho_p\boldsymbol{v}_p\cdot\delta\boldsymbol{v}_p)\mathrm{d}\tau\ . \tag{5.150}$$

这里用了

$$\delta(\rho_n\mathrm{d}\tau)=\delta(\rho_p\mathrm{d}\tau)=0\ , \tag{5.151}$$

它表示一种流体的密度变更必伴随所在点体积元的变更以保证流体的量不变．用 $\boldsymbol{s}_n$ 和 $\boldsymbol{s}_p$ 分别表示中子流体和质子流体一个流点的径矢，则

$$\boldsymbol{v}_n=\dot{\boldsymbol{s}}_n,\qquad \boldsymbol{v}_p=\dot{\boldsymbol{s}}_p\ , \tag{5.152}$$

符号上方的圆点代表它对时间的全微商．于是

$$\begin{aligned}\delta\int_{t_1}^{t_2}T\mathrm{d}t&=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\int_{核内}m(\rho_n\boldsymbol{v}_n\cdot\delta\dot{\boldsymbol{s}}_n+\rho_p\boldsymbol{v}_p\cdot\delta\dot{\boldsymbol{s}}_p)\mathrm{d}\tau\\&=-\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\int_{核内}m(\rho_n\dot{\boldsymbol{v}}_n\cdot\delta\boldsymbol{s}_n+\rho_p\dot{\boldsymbol{v}}_p\cdot\delta\boldsymbol{s}_p)\mathrm{d}\tau\ ,\end{aligned} \tag{5.153}$$

在第二等号处作了对时间的部分积分，并用了

$$(\rho_n\dot{\mathrm{d}\tau})=(\rho_p\dot{\mathrm{d}\tau})=0\ . \tag{5.154}$$

与(5.151)类似，此式表明流动中流体的量不变．对体积元 $\mathrm{d}\tau$ 用高斯定理得

$$\delta\mathrm{d}\tau=(\nabla\cdot\delta\boldsymbol{s}_n)\mathrm{d}\tau=(\nabla\cdot\delta\boldsymbol{s}_p)\mathrm{d}\tau\ , \tag{5.155}$$

用于(5.151)得

$$\delta\rho_n=-\rho_n\nabla\cdot\delta\boldsymbol{s}_n,\quad \delta\rho_p=-\rho_p\nabla\cdot\delta\boldsymbol{s}_p\ . \tag{5.156}$$

要求流动中两种流体的总密度 $\rho=\rho_n+\rho_p$ 不变，

$$\delta\rho_n+\delta\rho_p=0\ , \tag{5.157}$$

$$\rho_n\nabla\cdot\delta\boldsymbol{s}_n+\rho_p\nabla\cdot\delta\boldsymbol{s}_p=0\ . \tag{5.158}$$

引入一个体积元中中子流体与质子流体的质心径矢

$$\delta\boldsymbol{S}=\frac{\rho_n\delta\boldsymbol{s}_n+\rho_p\delta\boldsymbol{s}_p}{\rho} \tag{5.159}$$

和它们间的相对径矢

$$\delta s=\delta s_{n}-\delta s_{p} \ . \tag{5.160}$$

设中子流点与质子流点的质心并不运动而只有中子与质子的相对流动．这可表为约束条件

$$\delta S=0 \ . \tag{5.161}$$

在此条件下

$$\delta s_{n}=\frac{\rho_{p}}{\rho}\delta s, \quad \delta s_{p}=-\frac{\rho_{n}}{\rho}\delta s \ . \tag{5.162}$$

代入(5.153)得

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} T\mathrm{d}t=-\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\int_{核内} m\rho_{r}\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\delta s\mathrm{d}\tau \ , \tag{5.163}$$

其中

$$\rho_{r}=\frac{\rho_{n}\rho_{p}}{\rho}=\left(\frac{1}{\rho_{n}}+\frac{1}{\rho_{p}}\right)^{-1} \tag{5.164}$$

为两种流体相对运动的折合密度，

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_{n}-\boldsymbol{v}_{p} \tag{5.165}$$

为中子流体相对质子流体运动的速度．用局域不对称参量

$$\ell=\frac{\rho_{n}-\rho_{p}}{\rho} \tag{5.166}$$

表示核内一点的成分．

$$\rho_{n}=\frac{\rho}{2}(1+\ell), \quad \rho_{p}=\frac{\rho}{2}(1-\ell) \ , \tag{5.167}$$

$$\rho_{r}=\frac{\rho}{4}(1-\ell^{2}) \ . \tag{5.168}$$

(5.163)变为

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} T\mathrm{d}t=-\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\int_{核内} m\frac{\rho}{4}(1-\ell^{2})\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\delta s\mathrm{d}\tau \ . \tag{5.169}$$

再考虑势能(5.146)的变分．由(5.151)，(5.156)和(5.162)得

$$\begin{aligned}\delta V&=\frac{2b_1}{\rho}\int_{核内}(\rho_{n}-\rho_{p})(\delta\rho_{n}-\delta\rho_{p})\mathrm{d}\tau\\&=-\frac{2b_1}{\rho}\int_{核内}(\rho_{n}-\rho_{p})(\rho_{n}\nabla\cdot\delta s_{n}-\rho_{p}\nabla\cdot\delta s_{p})\mathrm{d}\tau\\&=\frac{2b_1}{\rho^{2}}\int_{核内}\{\rho_{p}\nabla[(\rho_{n}-\rho_{p})\rho_{n}]+\rho_{n}\nabla[(\rho_{n}-\rho_{p})\rho_{p}]\}\cdot\delta s\mathrm{d}\tau\\&=\rho b_1\int_{核内}(1-2\ell^{2})(\nabla\ell)\cdot\delta s\mathrm{d}\tau \ .\end{aligned} \tag{5.170}$$

推导中已设核内密度分布均匀，总密度 ρ 与位置无关．在第三等号处还做了部分积分．将(5.147)、(5.148)、(5.169)和(5.170)代入(5.149)得核内成分变化的动力学方程

$$m(1-\ell^{2})\dot{\boldsymbol{v}}+4b_1(1-2\ell^{2})\nabla\ell=0 \ . \tag{5.171}$$

这是一个矢量方程．然而未知函数除矢量 $\boldsymbol{v}$ 外还有标量 ℓ．可见还需一个标量方程．由定义(5.166)和总密度 ρ 不变的性质知

$$\frac{\partial\ell}{\partial t}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho_{n}}{\partial t}-\frac{\partial\rho_{p}}{\partial t}\right)=-\frac{1}{\rho}[\nabla\cdot(\rho_{n}\boldsymbol{v}_{n})-\nabla\cdot(\rho_{p}\boldsymbol{v}_{p})] \ , \tag{5.172}$$

在第二等号处用到中子流体与质子流体的连续性方程

$$\frac{\partial\rho_{n}}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_{n}\boldsymbol{v}_{n})=0, \quad \frac{\partial\rho_{p}}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_{p}\boldsymbol{v}_{p})=0 \ . \tag{5.173}$$

设核内成分变化过程中各体积元内中子流体与质子流体元的质心不动，应有

$$\rho_{n}\boldsymbol{v}_{n}+\rho_{p}\boldsymbol{v}_{p}=0 \ . \tag{5.174}$$

将此式与(5.165)联立得

$$\rho_{n}\boldsymbol{v}_{n}=\rho_{r}\boldsymbol{v}, \quad \rho_{p}\boldsymbol{v}_{p}=-\rho_{r}\boldsymbol{v} \ . \tag{5.175}$$

将此式与(5.168)代入(5.172)得

$$\frac{\partial\ell}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla\cdot[(1-\ell^{2})\boldsymbol{v}]=0 \ . \tag{5.176}$$

此式与动力学方程(5.171)一起组成描写核内成分运动的完备方程集．

由于一体积元中两种流体元的质心并不运动，$\dot{\boldsymbol{v}}=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}$，(5.171)可写为

$$m(1-\ell^2)\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+4b_1(1-2\ell^2)\nabla\ell=0 . \tag{5.177}$$

设平衡时中子与质子均匀混合，此时的局域不对称参数

$$\ell_0=\frac{N-Z}{A}, \tag{5.178}$$

为常数，$\nabla\ell_0=0$. 平衡时两种流体元的相对运动速度自然是零. 偏离平衡时

$$\ell(\boldsymbol{r},t)=\ell_0+\ell_1(\boldsymbol{r},t), \tag{5.179}$$

ℓ_1与 $\boldsymbol{v}$ 同为小量. 将(5.179)代入(5.176)和(5.177)，保留到一级小得

$$\frac{\partial \ell_1}{\partial t}+\frac{1}{2}(1-\ell_0^2)\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0, \tag{5.180}$$

$$m(1-\ell_0^2)\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+4b_1(1-2\ell_0^2)\nabla\ell_1=0 . \tag{5.181}$$

将这两式对 t 求微商并分别用另一式得

$$\frac{\partial^2 \ell_1}{\partial t^2}-u^2\nabla^2\ell_1=0, \tag{5.182}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2}-u^2\nabla^2\boldsymbol{v}=0, \tag{5.183}$$

其中

$$u=\sqrt{\frac{2b_1}{m}(1-2\ell_0^2)}=\sqrt{\frac{2b_1}{mA^2}[4NZ-(N-Z)^2]}\approx\sqrt{\frac{8b_1NZ}{mA^2}} \tag{5.184}$$

为常数. (5.182)和(5.183)都是相速为 u 的波方程. 令

$$\ell_1(\boldsymbol{r},t)=\ell_1(\boldsymbol{r},0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \tag{5.185}$$

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \tag{5.186}$$

代入波方程，得以将它分离变量，其中振幅的空间分布 $\ell_1(\boldsymbol{r},0)$ 和 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},0)$ 满足定态方程

$$\nabla^2\ell_1+k^2\ell_1=0, \tag{5.187}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{v}+k^2\boldsymbol{v}=0, \tag{5.188}$$

$k^2=\frac{\omega^2}{u^2}$ 为常数. 实际上这两个方程中我们只须解其中的第一个，即(5.187). 将(5.185)和(5.186)代入(5.181)得

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},0)=\frac{4b_1(1-2\ell_0^2)}{\mathrm{i}m\omega(1-\ell_0^2)}\nabla\ell_1(\boldsymbol{r},0), \tag{5.189}$$

将(5.187)的解代入此式右边即得(5.188)的解. 对球形核，可进一步按球坐标分离变量. (5.187)的球面波解为

$$\Phi_{l\mu}(r,\theta,\varphi)=N_l\mathrm{j}_l(kr)\mathrm{Y}_{l\mu}(\theta,\varphi), \tag{5.190}$$

归化一常数

$$N_l=\left\{\frac{R^3}{2}[\mathrm{j}_l^2(kR)-\mathrm{j}_{l-1}(kR)\mathrm{j}_{l+1}(kR)]\right\}^{-\frac{1}{2}} \tag{5.191}$$

保证

$$\int_{r\leqslant R}|\Phi_{l\mu}(r)|^2\mathrm{d}\tau=1 . \tag{5.192}$$

R为核半径. 将(5.190)代入(5.189)右边的 ℓ_1，算出梯度[①]，得(5.188)的球面波解

$$\boldsymbol{v}_{l\mu}(r,\theta,\varphi)=-\mathrm{i}\frac{4b_1N_l(1-2\ell_0^2)}{mu(1-\ell_0^2)}\left[\sqrt{\frac{l}{2l+1}}\mathrm{j}_{l-1}(kr)\mathbf{T}_{l-1\,l\mu}(\theta,\varphi)+\sqrt{\frac{l+1}{2l+1}}\mathrm{j}_{l+1}(kr)\mathbf{T}_{l+1\,l\mu}(\theta,\varphi)\right]. \tag{5.193}$$

与(3.98)比较知，这个速度场为纵场，实际上从(5.189)可直接看出，它是一无旋场.

在核表面，速度垂直表面的分量应为零. 由(5.177)和(5.181)

① 见附录Ⅰ.

知

$$\frac{\partial \ell}{\partial r}\bigg|_{r=R}=\frac{\partial \ell_1}{\partial r}\bigg|_{r=R}=0 \ . \tag{5.194}$$

将这个边条件加在解(5.190)上就是

$$j_l'(kR)=0 \ , \tag{5.195}$$

其中 $j_l'(x)=\frac{dj_l(x)}{dx}$. 此式是关于 k 的方程，它的第 n 个根为

$$k_{nl}=\frac{x_{nl}}{R} \ , \tag{5.196}$$

x_{nl} 为 $j_l'(x)=0$ 的第 n 个正根．代入(5.190)，可将(5.187)的球面波解进一步写成

$$\phi_{nl\mu}(r,\theta,\varphi)=N_{nl}j_l(k_{nl}r)Y_{l\mu}(\theta,\varphi) \ , \tag{5.197}$$

N_{nl} 就是归一化常数(5.191)，只是用 k_{nl} 代入了其中的 k. 利用贝塞耳方程，边条件(5.195)和归一化条件(5.192)得正交归一关系

$$\int_{r\leqslant R}\phi^*_{nl\mu}(\boldsymbol{r})\,\phi_{n'l'\mu'}(\boldsymbol{r})d\tau=\delta_{nn'}\delta_{ll'}\delta_{\mu\mu'} \tag{5.198}$$

另一方面将 k_{nl} 代入(5.193)右边的 k，将所得记作 $\boldsymbol{v}_{nl\mu}(\boldsymbol{r})$. 利用(5.184)可将它表为

$$\boldsymbol{v}_{nl\mu}(r,\theta,\varphi)=-i\frac{2uN_{nl}}{1-\ell_0^2}\left[\sqrt{\frac{l}{2l+1}}\,j_{l-1}(k_{nl}r)\mathbf{T}_{l-1l\mu}(\theta,\varphi)\right.$$

$$\left.+\sqrt{\frac{l+1}{2l+1}}\,j_{l+1}(k_{nl}r)\mathbf{T}_{l+1l\mu}(\theta,\varphi)\right]. \tag{5.199}$$

经部分积分并利用边条件(5.194)和波方程(5.187)得

$$\int_{r\leqslant R}\boldsymbol{v}^*_{nl\mu}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{v}_{n'l'\mu'}(\boldsymbol{r})d\tau=\frac{4u^2}{(1-\ell_0^2)^2}\delta_{nn'}\delta_{ll'}\delta_{\mu\mu'}. \tag{5.200}$$

分别将 ℓ_1 和 $\boldsymbol{v}$ 用 $[\phi_{nl\mu}]$ 和 $[\boldsymbol{v}_{nl\mu}]$ 展开．令

$$\ell_1(\boldsymbol{r},t)=\sum_{nl\mu}q_{nl\mu}(t)\,\phi_{nl\mu}(\boldsymbol{r}) \ . \tag{5.201}$$

由(5.180)知，应有

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{nl\mu}\frac{i}{\omega_{nl}}\dot{q}_{nl\mu}(t)\boldsymbol{v}_{nl\mu}(\boldsymbol{r}) \ , \tag{5.202}$$

其中

$$\omega_{nl}=k_{nl}u \ . \tag{5.203}$$

再由(5.181)得

$$\ddot{q}_{nl\mu}+\omega_{nl}^2q_{nl\mu}=0 \ . \tag{5.204}$$

将 $q_{nl\mu}(t)$ 作为表示成分分布的广义坐标，此式即为成分振动的运动方程．

将(5.175)代入(5.145)，再利用(5.168)得

$$T=\frac{m}{2}\int_{核内}\rho_t v^2d\tau=\frac{m\rho}{8}\int_{核内}(1-\ell^2)v^2d\tau \ . \tag{5.205}$$

精确到 ℓ_1 和 v 的二次幂，此式为

$$T=\frac{m\rho}{8}(1-\ell_0^2)\int_{核内}v^2d\tau \ . \tag{5.206}$$

用到球形核，将展开式(5.202)代入，利用正交关系(5.200)得

$$T=\sum_{nl\mu}\frac{b_1\rho}{\omega_{nl}^2}\dot{q}^*_{nl\mu}\dot{q}_{nl\mu} \ , \tag{5.207}$$

这里采用了波速表达式(5.184)中的最后的近似式，即取

$$u=\sqrt{\frac{8b_1}{m}\frac{NZ}{A^2}} \ . \tag{5.208}$$

将(5.166)代入(5.146)得势能

$$V=b_1\rho\int_{核内}\ell^2d\tau \ . \tag{5.209}$$

作分解(5.179)，精确到 ℓ_1 的二次幂得

$$V=E_{us}-2b_1\rho\ell_0\int_{核内}\ell_1d\tau+b_1\rho\int_{核内}\ell_1^2d\tau \ . \tag{5.210}$$

用到球形核，将展开式(5.201)代入，利用球谐函数的正交性知

$$\int_{核内}\ell_1d\tau=\sum_n N_{n0}\int_0^R j_0(k_{n0}r)\sqrt{4\pi}\,r^2dr=0 \ , \tag{5.211}$$

因为其中的积分

$$\int_0^R j_0(k_{n0}r)r^2\mathrm{d}r=(k_{n0})^{-3}\int_0^{k_{n0}R} j_0(x)x^2\mathrm{d}x$$

$$=k_{n0}^{-1}R^2 j_1(k_{n0}R)=-k_{n0}^{-1}R^2 j_0'(k_{n0}R)=0\ . \tag{5.212}$$

最后一个等号处用了边条件(5.195)．再由正交归一关系(5.198)算出(5.210)中的第三项即得

$$V=E_{as}+b_1\rho\sum_{nl\mu}q_{nl\mu}^*q_{nl\mu}\ . \tag{5.213}$$

以 E_{as} 为零点，可将拉格朗日量(5.147)写作

$$L=\sum_{nl\mu}\left[\frac{M_{nl}}{2}\ \dot{q}_{nl\mu}^*\dot{q}_{nl\mu}-\frac{M_{nl}}{2}\ \omega_{nl}^2 q_{nl\mu}^*q_{nl\mu}\right]\ , \tag{5.214}$$

惯性参数

$$M_{nl}=\frac{2b_1\rho}{\omega_{nl}^2}\ . \tag{5.215}$$

由(5.197)知，

$$\phi_{nl\mu}^*(r)=(-1)^\mu\ \phi_{nl-\mu}(\boldsymbol{r})\ . \tag{5.216}$$

按(5.201)，为保证 $\iota_1(\boldsymbol{r})$ 的实性，要求

$$\iota_1^*(\boldsymbol{r})=\sum_{nl\mu}q_{nl\mu}^*\ \phi_{nl\mu}^*(\boldsymbol{r})=\sum_{nl\mu}(-1)^\mu q_{nl\mu}^*\ \phi_{nl-\mu}(\boldsymbol{r})$$

$$=\sum_{nl\mu}(-1)^\mu q_{nl-\mu}^*\ \phi_{nl\mu}(\boldsymbol{r})$$

$$=\iota_1(\boldsymbol{r})=\sum_{nl\mu}q_{nl\mu}\ \phi_{nl\mu}(\boldsymbol{r})\ .$$

因此

$$q_{nl\mu}^*=(-1)^\mu q_{nl-\mu}\ . \tag{5.217}$$

由此可得

$$\dot{q}_{nl\mu}^*=(-1)^\mu\dot{q}_{nl-\mu}\ . \tag{5.218}$$

此式保证(5.202)表示的速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ 为实矢量．可见拉格朗日量(5.214)中的独立变量只有 $q_{nl\mu}$ 和 $\dot{q}_{nl\mu}$，$q_{nl\mu}^*$ 和 $\dot{q}_{nl\mu}^*$ 可由它们表出．也可将(5.214)改写为

$$L=\sum_{nl\mu}(-1)^\mu\frac{M_{nl}}{2}\ [\dot{q}_{nl-\mu}\dot{q}_{nl\mu}-\omega_{nl}^2 q_{nl-\mu}q_{nl\mu}]\ . \tag{5.219}$$

简单计算知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{nl\mu}}-\frac{\partial L}{\partial q_{nl\mu}}=(-1)^\mu M_{nl}(\ddot{q}_{nl-\mu}+\omega_{nl}^2 q_{nl-\mu})\ .$$

由此得到的拉格朗日方程即运动方程(5.204)．可见拉格朗日量(5.219)或(5.214)是合理的．由它们可得与 $q_{nl\mu}$ 正则共轭的广义动量

$$p_{nl\mu}=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{nl\mu}}=(-1)^\mu M_{nl}\dot{q}_{nl-\mu}=M_{nl}\dot{q}_{nl\mu}^*\ . \tag{5.220}$$

两边取复共轭后用(5.218)得

$$p_{nl\mu}^*=(-1)^\mu p_{nl-\mu}\ . \tag{5.221}$$

哈密顿量为

$$H=\sum_{nl\mu}p_{nl\mu}\dot{q}_{nl\mu}-L$$

$$=\sum_{nl\mu}\left[\frac{p_{nl\mu}^*p_{nl\mu}}{2M_{nl}}+\frac{M_{nl}\omega_{nl}^2}{2}\ q_{nl\mu}^*q_{nl\mu}\right]$$

$$=\sum_{nl\mu}\frac{(-1)^\mu}{2}\left[\frac{p_{nl-\mu}p_{nl\mu}}{M_{nl}}+M_{nl}\omega_{nl}^2 q_{nl-\mu}q_{nl\mu}\right]\ . \tag{5.222}$$

实行正则量子化，将 $p_{nl\mu}$ 和 $q_{nl\mu}$ 变成算符 $\hat{p}_{nl\mu}$ 和 $\hat{q}_{nl\mu}$，且要求

$$\left.\begin{aligned}\hat{p}_{nl\mu}^\dagger&=(-1)^\mu\hat{p}_{nl-\mu}\ ,\\ \hat{q}_{nl\mu}^\dagger&=(-1)^\mu\hat{q}_{nl-\mu}\ .\end{aligned}\right\} \tag{5.223}$$

哈密顿量算符

$$\hat{H}=\sum_{nl\mu}\left[\frac{\hat{p}_{nl\mu}^\dagger\hat{p}_{nl\mu}}{2M_{nl}}+\frac{M_{nl}\omega_{nl}^2}{2}\ \hat{q}_{nl\mu}^\dagger\hat{q}_{nl\mu}\right]$$

$$=\sum_{nl\mu}\frac{(-1)^\mu}{2}\left[\frac{\hat{p}_{nl-\mu}\hat{p}_{nl\mu}}{M_{nl}}+M_{nl}\omega_{nl}^2\hat{q}_{nl-\mu}\hat{q}_{nl\mu}\right] \tag{5.224}$$

是明显自伴的．基本对易关系为

$$\left.\begin{aligned}&[\hat{q}_{nl\mu},\hat{q}_{n'l'\mu'}]=[\hat{p}_{nl\mu},\hat{p}_{n'l'\mu'}]=0\ ,\\&[\hat{q}_{nl\mu},\hat{p}_{n'l'\mu'}]=\delta_{nn'}\delta_{ll'}\delta_{\mu\mu'}\ .\end{aligned}\right\}\tag{5.225}$$

定义

$$\left.\begin{aligned}\hat{a}_{nl\mu}&=\frac{1}{\sqrt{2M_{nl}\hbar\omega_{nl}}}\ (M_{nl}\omega_{nl}\hat{q}_{nl\mu}+\mathrm{i}\hat{p}^{\dagger}_{nl\mu})\ ,\\\hat{a}^{\dagger}_{nl\mu}&=\frac{1}{\sqrt{2M_{nl}\hbar\omega_{nl}}}\ (M_{nl}\omega_{nl}\hat{q}^{\dagger}_{nl\mu}-\mathrm{i}\hat{p}_{nl\mu})\ ,\end{aligned}\right\}\tag{5.226}$$

它们互为伴随．由(5.225)可证

$$\left.\begin{aligned}&\hat{a}_{nl\mu}\hat{a}_{n'l'\mu'}-\hat{a}_{n'l'\mu'}\hat{a}_{nl\mu}=0,\\&\hat{a}^{\dagger}_{nl\mu}\hat{a}^{\dagger}_{n'l'\mu'}-\hat{a}^{\dagger}_{n'l'\mu'}\hat{a}^{\dagger}_{nl\mu}=0,\\&\hat{a}_{nl\mu}\hat{a}^{\dagger}_{n'l'\mu'}-\hat{a}^{\dagger}_{n'l'\mu'}\hat{a}_{nl\mu}=\delta_{nn'}\delta_{ll'}\delta_{\mu\mu'},\end{aligned}\right\}\tag{5.227}$$

$$\hat{H}=\sum_{nl\mu}(\hat{a}^{\dagger}_{nl\mu}\hat{a}_{nl\mu}+\frac{1}{2})\hbar\omega_{nl}\ .\tag{5.228}$$

它们表明，由(5.223)～(5.225)定义的理论就是无耦合简谐振子集的动力学，能量是量子化的，能量子为$\hbar\omega_{nl}$，$\hat{a}_{nl\mu}$与$\hat{a}^{\dagger}_{nl\mu}$分别为$nl\mu$态振动量子的消灭算符与产生算符．

n,l和μ可用来标志振动模式，也可用来标志振动量子，可分别称为振动量子的主量子数、角动量量子数和角动量在极轴上的投影量子数．振动量子的能量为

$$\varepsilon_{nl}=\hbar\omega_{nl}=\frac{\hbar x_{nl}}{R}\sqrt{\frac{8b_1}{m}\ \frac{NZ}{A^2}}=G_{nl}A^{-1/3}\ ,\tag{5.229}$$

其中

$$G_{nl}=\frac{\hbar x_{nl}}{r_0}\sqrt{\frac{8b_1}{m}\ \frac{NZ}{A^2}}\tag{5.230}$$

对实际存在的原子核几乎是常数，因为实际核$\frac{NZ}{A^2}\sim\frac{1}{4}$．在(5.229)末一等号处用了核半径的近似表达式

$$R=r_0A^{1/3}\ ,\tag{5.231}$$

按迈尔斯(Myers 1974)核质量公式，$r_0=1.175\,\mathrm{fm}$.(5.229)表现出振动

能量的$A^{-1/3}$律，这正是实验中看到的各种巨共振的共同特征．将r_0和b_1的上列经验值代入(5.230)，注意x_{1l}的值对不大的l为个位数，可估算得G_{1l}的值在100 MeV上下．这也与实测到的巨共振数据大体相符．即可将$1l\mu$模式的成分振动与实验中看到的部分2^l极巨共振等同．另一些巨共振则可解释为核内的密度振动．

上面介绍的成分振动理论是很粗糙的．例如核内密度ρ和不对称参数ζ_0并非常数，它们是逐点变化的．中心部分密度较高，中子数密度与质子数密度较接近，ζ_0低于它的平均值(5.178)；边缘部分密度较低，到达表面密度趋于零，且可能出现一层完全由中子组成的中子皮，$\zeta_0=1$．由(5.184)知，这种情形使核内中心部分成分振动波速较高，按(5.203)这又使振动频率ω_{nl}和量子能量ε_{nl}较高；而边缘部分则波速较低，频率和量子能量也较低．按变分原理，成分振动应比较集中于核边缘部分以使能量达到极小．这就使实际振动能量低于前面的粗略估计值，而更接近实际观察到的巨共振能量．对偶极巨共振，观察到的共振能量在

$$(70\sim80)A^{-1/3}\ \mathrm{MeV}\tag{5.232}$$

范围内；对四极巨共振，观察到的共振能量在

$$(110\sim130)A^{-1/3}\mathrm{MeV}\tag{5.233}$$

范围内．

(5.229)又可表为

$$\varepsilon_{nl}=\frac{\hbar u}{R}\ \ x_{nl}\ \ .\tag{5.234}$$

$\hbar$和x_{nl}为常数，对密度和成分都一定的核物质波速u也是一定的．(5.234)简单地表明ε_{nl}与核半径R成反比．在自然单位制中能量有(长度)$^{-1}$的量纲．在任意单位制中能量常可用长度的倒数衡量．球形核只有一个特征长度，就是它的半径R，振动能量只能与R成反比．对非球形核，则可有多个特征长度．例如对称椭球核有两个特征长度，即两个不相等的半主轴长；而不对称椭球核则有三个特征长度，即三个不相等的半主轴长．每个特征长度可对应一特征能量，

在这里就是一振动能级．在几个不同特征长度的核，振动能级会劈裂．实验中确实看到巨共振中的双峰现象．它被解释为非球形核中不同特征长度引起的能级劈裂．

再看密度振动．仍将核内物质当作流体，却不再分成中子流体和质子流体，而将它看作成分处处相同的核流体．即设不对称参数t不随位置变化，为常数．核流体由密度场 $\rho(\boldsymbol{r},t)$ 和速度场 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$ 描写．核流体流动的动能为

$$T=\frac{m}{2}\int_{核内}\rho v^2\mathrm{d}\tau\ . \tag{5.235}$$

势能为各流点内能之和：

$$V=\int_{核内}\mathscr{E}\mathrm{d}\tau=\int_{核内}\rho\varepsilon\mathrm{d}\tau\ , \tag{5.236}$$

$\mathscr{E}$ 为流体内能密度，

$$\varepsilon=\mathscr{E}/\rho \tag{5.237}$$

为每核子平均能量，它们都被设为在空间和时间中逐点变化的．流体的拉格朗日量为它的一般形式 (5.147)，作用量仍由 (5.148) 表示．用$\boldsymbol{s}$表示一个流点的径矢，由

$$\delta(\rho\mathrm{d}\tau)=0\ , \tag{5.238}$$

$$\delta\mathrm{d}\tau=(\nabla\cdot\delta\boldsymbol{s})\mathrm{d}\tau, \tag{5.239}$$

和由此导出的

$$\delta\rho=-\rho\nabla\cdot\delta\boldsymbol{s}\ , \tag{5.240}$$

得作用量的变分

$$\delta\mathscr{A}=-\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\int_{核内}\left[m\rho\dot{\boldsymbol{v}}+\nabla\left(\rho^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)\right]\cdot\delta\boldsymbol{s}\mathrm{d}\tau\ . \tag{5.241}$$

现在流点移动，

$$\dot{\boldsymbol{v}}\equiv\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\equiv\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} \tag{5.242}$$

为流点的加速度．另一方面，设 $\mathrm{d}n$ 个核子占据体积 $\mathrm{d}\tau$，从而有密度 $\rho=\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\tau}$．固定 $\mathrm{d}n=\rho\mathrm{d}\tau$，有 $\mathrm{d}\tau\partial\rho+\rho\partial(\mathrm{d}\tau)=0$．这个定域系统的压力为

$$\mathscr{P}=-\frac{\partial(\varepsilon\mathrm{d}n)}{\partial(\mathrm{d}\tau)}=\rho\frac{\partial(\varepsilon\mathrm{d}n)}{\partial\rho\mathrm{d}\tau}=\rho^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\ . \tag{5.243}$$

按哈密顿原理，由 (5.241) 得到的流体运动方程为欧勒方程

$$m\rho\left[\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right]+\nabla\mathscr{P}=0\ . \tag{5.244}$$

现在的未知函数包括标量函数 $\rho(\boldsymbol{r},t)$ 和矢量函数 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$．因此除矢量方程 (5.244) 外还需一个标量方程．连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0 \tag{5.245}$$

恰是所需的方程．采取局域密度近似，设在每一时空点上压力为密度的函数．$\mathscr{P}(\rho)$ 称为物态方程，它将方程组 (5.244) 和 (5.245) 封闭，成为描写核内密度变化的完备方程组．

设基态核内无流动，速度场处处为零．在无密度振动的情况下，密度场 $\rho_0(\boldsymbol{r})$ 与时间无关．将振动中的密度场写为

$$\rho(\boldsymbol{r},t)=\rho_0(\boldsymbol{r})+\rho_1(\boldsymbol{r},t)\ , \tag{5.246}$$

$\rho_1(\boldsymbol{r},t)$ 表示绕平衡密度 ρ_0 的涨落．相应地，可将压力场写为

$$\mathscr{P}(\boldsymbol{r},t)=\mathscr{P}_0(\boldsymbol{r})+\mathscr{P}_1(\boldsymbol{r},t)\ , \tag{5.247}$$

其中 $\mathscr{P}_0(\boldsymbol{r})=\mathscr{P}(\rho_0(\boldsymbol{r}))$ 为基态核内的平衡压力，

$$\mathscr{P}_1(\boldsymbol{r},t)=\left.\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_0}\rho_1(\boldsymbol{r},t)\ . \tag{5.248}$$

设基态核密度 ρ_0 为常数，则 $\mathscr{P}_0$ 和 $\left.\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_0}$ 也都是常数．设 $\boldsymbol{v},\rho_1$ 为小量，从而 $\mathscr{P}_1$ 也是小量，将 (5.246) ~ (5.248) 代入 (5.244) 和 (5.245)，取到一级小得

$$\rho_0\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+u^2\nabla\rho_1=0\ , \tag{5.249}$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \boldsymbol{v}) = 0, \tag{5.250}$$

其中

$$u^2 = \frac{1}{m} \left. \frac{\partial \mathscr{P}}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} \tag{5.251}$$

已设为与位置无关．将(5.249)和(5.250)对时间求偏微商，再分别用(5.250)和(5.249)得

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2} - u^2 \nabla^2 \boldsymbol{v} = 0 , \tag{5.252}$$

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - u^2 \nabla^2 \rho_1 = 0 . \tag{5.253}$$

它们都是相速为 u 的波方程．当然，这两个方程不是独立的，$\boldsymbol{v}$ 和 ρ_1 由(5.249)或(5.250)联系．我们只须从(5.253)解出 ρ_1，就可从(5.249)求出 $\boldsymbol{v}$，并使(5.250)成立．类似对(5.182)和(5.183)的处理，分离变量:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, 0) e^{-i\omega t} , \tag{5.254}$$

$$\rho_1(\boldsymbol{r}, t) = \rho_1(\boldsymbol{r}, 0) e^{-i\omega t} , \tag{5.255}$$

代入(5.252)和(5.253)得不含时间的波方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{v} + k^2 \boldsymbol{v} = 0 , \tag{5.256}$$

$$\nabla^2 \rho_1 + k^2 \rho_1 = 0 , \tag{5.257}$$

其中 $k^2 = \dfrac{\omega^2}{u^2}$ 为常数．从(5.257)解出 $\rho_1(\boldsymbol{r}, 0)$ 后即可从(5.249)求得

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, 0) = \frac{u^2}{i\omega\rho_0} \nabla \rho_1(\boldsymbol{r}, 0) , \tag{5.258}$$

它显然满足(5.256)和(5.250)．(5.190)是(5.257)的球面波解，适于讨论球形核的密度振动．将它代入(5.258)右边，得(5.256)的球面波解

$$\boldsymbol{v}_{l\mu}(r, \theta, \varphi) = -i \frac{N_l u}{\rho_0} \left[\sqrt{\frac{l}{2l+1}} \, j_{l-1}(kr) \mathbf{T}_{l-1\, l\, \mu}(\theta, \varphi) + \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} \, j_{l+1}(kr) \mathbf{T}_{l+1\, l\, \mu}(\theta, \varphi) \right]. \tag{5.259}$$

$l=0$ 的振动为单极振动．球面波解在这种情形中只有

$$\left.\begin{aligned} \phi_{00}(\boldsymbol{r}) &= \frac{N_0}{\sqrt{4\pi}} j_0(kr) , \\ \boldsymbol{v}_{00}(\boldsymbol{r}) &= -i \frac{N_0 u}{\rho_0} j_1(kr) \mathbf{T}_{1\,0\,0}(\theta, \varphi) = i \frac{N_0 u}{\rho_0} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} j_1(kr) \frac{\boldsymbol{r}}{r} . \end{aligned}\right\} \tag{5.260}$$

其中用到 $\mathbf{T}_{1\,0\,0}(\theta, \varphi) = -\dfrac{1}{\sqrt{4\pi}} \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$，它可由向量球谐函数的定义(3.85)，表 4 列出的 CG 系数，球谐函数的表示式和大小为 1 的自旋本征矢量(3.80)推得．(5.260)表示的单极密度涨落是各向同性的，流动沿径向，是一纵波．设基态核半径为 R_0．在出现各向同性的密度涨落 $\rho_1(r)$ 时，在 R_0 半径范围内核子数将增加 $4\pi \int_0^{R_0} \rho_1(r) r^2 dr$．与此同时核半径由 R_0 变为 R，核子数因此增加 $4\pi R_0^2 \delta R \rho_0(R_0)$，其中半径增量 $\delta R = R - R_0$ 也是小量．然而核子数是固定的，在核密度和核半径变化时核子总数不能变．为此必须

$$\delta R = -\frac{1}{\rho_0(R_0) R_0^2} \int_0^{R_0} \rho_1(r) r^2 dr . \tag{5.261}$$

另一方面，核内压力要由表面压力来平衡．设表面压力完全来自表面张力导致的附加压力，由附加压力的熟知公式得表面压力平衡条件

$$\mathscr{P}(R) = \frac{2\sigma}{R} , \tag{5.262}$$

σ为表面张力系数，表示作用在表面单位长度上的表面张力，也是单位表面积的表面能．由这个条件可看出，当 $R \to \infty$，即对占据整个空间的核物质，平衡压力为零．用 ρ_∞ 表无穷大核物质的平衡密

度，物态方程应满足条件

$$\mathscr{P}(\rho_\infty)=0 \ . \tag{5.263}$$

按(5.243)，此条件又可表为

$$\left.\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right|_{\rho=\rho_\infty}=0 \ . \tag{5.264}$$

定义核物质的压缩模数

$$K=9\left.\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial \rho}\right|_{\rho=\rho_\infty}=9\rho_\infty^2\left.\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\rho^2}\right|_{\rho=\rho_\infty} . \tag{5.265}$$

将物态方程$\mathscr{P}(\rho)$在$\rho=\rho_\infty$处展成$\rho-\rho_\infty$的幂级数，零次项为零，到一次项有

$$\mathscr{P}=K(\rho-\rho_\infty)/9 \ . \tag{5.266}$$

将此式代入(5.262)左边得

$$\frac{K}{9}\left(\rho(R)-\rho_\infty\right)=\frac{2\sigma}{R} \ . \tag{5.267}$$

要求此式对基态核成立，就是用R_0代入R此式要成立．在单极密度振动时，核半径变化δR，核密度变化ρ_1．对(5.267)两边微分，取到δR和ρ_1的一次幂，注意已设基态核密度为常数，得

$$\rho_1(R_0)=-\frac{18\sigma}{KR_0^2}\,\delta R \ . \tag{5.268}$$

与(5.261)联立，消去δR得

$$\rho_1(R_0)=\frac{72\pi\sigma}{3KR_0A}\int_0^{R_0}\rho_1(r)\,r^2\mathrm{d}r \ . \tag{5.269}$$

将(5.260)中ρ_1的解Φ_{00}代入两边，仿照(5.212)做出积分，得密度单极振动的边条件

$$\mathrm{j}_0(kR_0)=\frac{72\pi\sigma R_0^2}{3KA}\,\frac{\mathrm{j}_1(kR_0)}{kR_0} \ . \tag{5.270}$$

这是一个关于k的方程，将它的第n个正根记为k_{n0}．它可用数值方法解出．已知(Myers 1974)

$$4\pi\sigma R_0^2/A=20.76A^{-1/3}\ \mathrm{MeV}\ ; \tag{5.271}$$

而由于核物质几乎不可压缩，压缩模数K在100 MeV以上；对不太轻的核，(5.270)右边为小量．因而有$k_{10}\approx\dfrac{\pi}{R}$．另一方面，由(5.251)和(5.266)知

$$u=\sqrt{\frac{K}{9m}} \ . \tag{5.272}$$

因此单极密度振动的特征频率为

$$\omega_{10}=\sqrt{\frac{\pi^2K}{9mr_0^2}}\,A^{-1/3} \ , \tag{5.273}$$

振动能量子为

$$\varepsilon_{10}=\hbar\sqrt{\frac{\pi^2K}{9mr_0^2}}\,A^{-1/3} \ . \tag{5.274}$$

这里同样得到了$A^{-1/3}$律．实验观察到核单极巨共振能量(Blaizot 1980)

$$\sim\ 80A^{-1/3}\mathrm{MeV} \tag{5.275}$$

确具$A^{-1/3}$律．由比例常数80 MeV和$r_0=1.175\,\mathrm{fm}$经(5.274)可算得核物质的压缩模数$K\approx190$ MeV.

这里对密度振动的讨论与前面对成分振动的讨论一样，也是比较粗糙的．物态方程(5.266)就过分简化了．设基态核内密度ρ_0和压力$\mathscr{P}_0$为常数也并非实际情况．实际上，核的中心部位密度较高，较难压缩；核的边缘部分密度较低，较易压缩．能量极小的条件使振动向边缘部分集中．可见，要维持理论计算的振动能与实验观察到的巨共振能相符，核物质的压缩模数应比上面估算的值高．经比较周全的考虑后，由核单极巨共振定得的核物质的压缩模数在200至300 MeV间．一个比较普遍接受的数字是

$$K=240\ \mathrm{MeV} \ . \tag{5.276}$$

自然还可讨论$l\neq0$的密度振动．由于$l\neq0$的球谐函数在4π立体角内的积分为零，$l\neq0$的密度变化ρ_1不改变基态核半径范围内的核子数，因而不会改变核半径．核表面速度的径向分量为零．由

(5.249)或(5.258)知，这要求

$$\left.\frac{\partial \rho_1}{\partial r}\right|_{r=R_0}=0 \ . \tag{5.277}$$

将解(5.190)代人，这一边条件具体化为

$$j_l'(kR_0)=0 \ . \tag{5.278}$$

它与(5.195)形式相同，因此解得 k 的第 n 个正根

$$k_{nl}=\frac{x_{nl}}{R_0} \ , \tag{5.279}$$

R 的下标 0 强调它就是基态核的半径．按(5.203)算出 ω_{nl}，即得 nl 模式密度振动的能量子

$$\varepsilon_{nl}=\hbar\omega_{nl}=\frac{\hbar x_{nl}}{R_0}\ u=\frac{\hbar x_{nl}}{r_0}\sqrt{\frac{k}{9m}}\ A^{-1/3} \ . \tag{5.280}$$

这就是 2^l 极密度振动的能量子，它与 2^l 极成分振动能量子(5.229)的差别只在于两种振动波速的不同．成分振动的波速由(5.184)表示，与不对称能常数 b_1 有关．密度振动的波速由(5.251)或近似地由(5.272)表示，与核物质的压缩模数 K 有关．如何从实验上区别这两种 2^l 极巨共振是一重要问题．成分振动是在密度 ρ 固定的情况下核内各点不对称参数 ι 的振动．由(5.166)知

$$\iota\rho=\rho_n-\rho_p=-(\rho_p-\rho_n) \tag{5.281}$$

为同位旋第三分量密度与 −2 的积，ι 振动即是同位旋第三分量的振动，振动量子带有同位旋．在激发这种振动时要改变核的同位旋．(5.232)和(5.233)分别为 $\Delta T=1$ 的偶极巨共振和 $\Delta T=1$ 的四极巨共振的 $A^{-1/3}$ 律，T 为同位旋量子数．实验还观察到 $\Delta T=0$ 的四极巨共振，它的 $A^{-1/3}$ 律为

$$(60\sim 66)A^{-1/3}\text{MeV} \ . \tag{5.282}$$

它可解释为核内四极密度振动的激发．α 粒子同位旋为零，强作用过程同位旋守恒．α 粒子在核上非弹性散射过程中由强作用激发的巨共振必有 $\Delta T=0$．因此，α 粒子非弹性散射是观察核内密度振动的有效方法．图 5-6 显示 α 粒子非弹性散射对 ^{90}Zr 的激发．在截面

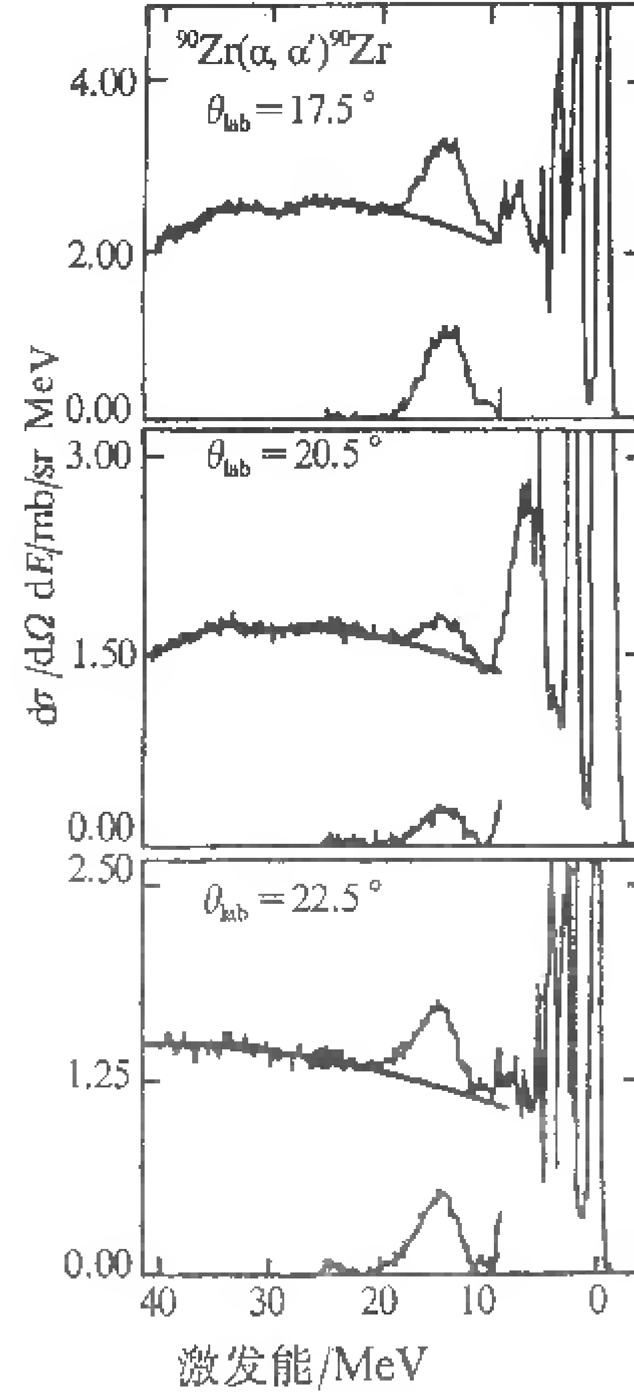


图 5-6 α 粒子在 ^{90}Zr 上的非弹性散射减去连续背景后的峰显示在每张图的下方［取自 Youngblood 1976］

随能量变化的相对平滑的背景上，在 10～20 MeV 激发能处出现一明显的宽峰．它被确定为 $\Delta T=0$ 的四极巨共振．巨共振的极性是由角分布来确定的．这方面的细节属专门问题，在此就不详述．

5.4 单核子态，对关联，壳，以及它们与集体运动参数的关系，例：推转模型与转动惯量

经典核物理认为，原子核由核子组成，核子在核内运动的基本形式是独立粒子运动，填有核子的单粒子态及这些核子间的剩余相互作用决定核的性质．这就是原子核的壳模型，即经典核物理以壳

模型为基础．由此出发的理论称微观理论，而直接以原子核的整体性质为对象的理论称宏观理论．这种认识在 70 年代以前占统治地位，在现今低能核物理研究中仍相当普遍地被接受．这是由于壳模型的成就，包括早期对原子核的基态性质，如自旋、磁矩、结合能随 A 和 Z 变化的涨落规律（壳效应）以及同质异能素分布等的令人信服的说明，也包括后来形变核壳模型关于形状同质异能素的推测和证实．这也由于核内核子的独立粒子运动与核子间强作用的矛盾被泡利原理的效应缓解．泡利原理禁止被核子间强作用激发的核子进入已被核子占据的单粒子态，因而使核子间的有效相互作用减弱．

在以核子的独立粒子运动为基础的壳模型中，壳层是一组能量相近的单核子态，它包含若干能量相近的子壳层，每一子壳层为一组简并的单粒子态．核子按泡利原理，能量由低到高依次填充这些单粒子态．这使得未满壳层中的核子数和核子的有些量子数周而复始地变化，导致原子核性质的近似周期涨落，这就是壳效应．壳模型也可用来研究核的形变、转动、振动 …… 等集体运动．这只需让核子在其中运动的平均场作这类运动即可．平均场随时间作慢运动，核子在其中作快运动并绝热地跟随平均场．它们之间由自洽条件关联起来．

用三维谐振子势作平均场特别方便，因为它有精确解，且易分离变量．在其上加轨道角动量平方有关项和自旋-轨道耦合项后即得尼尔逊 (Nilsson 1955) 势

$$V(x,y,z)=\frac{m}{2}\left(\omega_x^2x^2+\omega_y^2y^2+\omega_z^2z^2\right)-C\hat{l}\cdot\hat{s}-D\hat{l}^2\ , \quad (5.283)$$

$\hat{l}$ 和 $\hat{s}$ 分别为核子的轨道角动量算符和自旋算符，ω_x, ω_y 和 ω_z 分别为 x, y 和 z 方向振动的固有圆频率，它们和 C, D 一起为参数，m 为核子质量．末两项对给出单粒子能级的正确位置和量子数是重要的，但对本节要讨论的问题并不重要，在以下计算中略去．(5.283) 中的各向异性简谐振子势的等势面为一椭球，三个主轴长度比为 $\omega_x^{-1}:\omega_y^{-1}:$

ω_z^{-1}．可用它来表示核的形状．另一方面，粒子在这个势场中运动的本征能量为

$$\varepsilon_{n_xn_yn_z}=\left(n_x+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_x+\left(n_y+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_y+\left(n_z+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_z\ , \quad (5.284)$$

相应归一化本征态记作 $|n_xn_yn_z\rangle$．由于三维谐振子可视为三个独立的一维谐振子，下面复习一下一维谐振子理论．质量为 m，固有圆频率为 ω 的一维谐振子的哈密顿量算符记为

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2\ , \quad (5.285)$$

其中坐标 $\hat{x}$ 与动量 $\hat{p}$ 有对易关系

$$[\hat{x},\hat{p}]=1\ . \quad (5.286)$$

引进算符

$$\left.\begin{aligned}\hat{a}&=\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega\hat{x}+\mathrm{i}\hat{p})\ ,\\ \hat{a}^\dagger&=\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega\hat{x}-\mathrm{i}\hat{p})\ ,\end{aligned}\right\} \quad (5.287)$$

由 (5.286) 可证它们满足对易关系

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}=1\ . \quad (5.288)$$

由 (5.287) 可解得

$$\left.\begin{aligned}\hat{x}&=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}^\dagger+\hat{a})\ ,\\ \hat{p}&=\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,\mathrm{i}(\hat{a}^\dagger-\hat{a})\ .\end{aligned}\right\} \quad (5.289)$$

代入 (5.285) 并利用 (5.288) 得

$$\hat{H}=\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega=\left(\hat{n}+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega\ . \quad (5.290)$$

由 (5.288) 可证，$\hat{n}=\hat{a}^\dagger\hat{a}$ 的本征值 n 为非负整数，相应本征态 $|n\rangle$ 也就是能量 $\hat{H}$ 的本征态，能量本征值

$$\varepsilon_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega\ . \tag{5.291}$$

设 $|n\rangle$是归一化的，可适当选取相角使

$$\left.\begin{aligned}\hat{a}|n\rangle&=\sqrt{n}\ |n-1\rangle\ ,\\ \hat{a}^{\dagger}|n\rangle&=\sqrt{n+1}\ |n+1\rangle\ .\end{aligned}\right\} \tag{5.292}$$

此式和(5.289)一起可得矩阵元

$$\left.\begin{aligned}\langle n'|\hat{x}|n\rangle&=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\left(\sqrt{\frac{n+1}{2}}\ \delta_{n',n+1}+\sqrt{\frac{n}{2}}\ \delta_{n',n-1}\right),\\ \langle n'|\hat{p}|n\rangle&=\sqrt{\hbar m\omega}\ \mathrm{i}\left(\sqrt{\frac{n+1}{2}}\ \delta_{n',n+1}-\sqrt{\frac{n}{2}}\ \delta_{n',n-1}\right),\end{aligned}\right\} \tag{5.293}$$

和平均值

$$\left.\begin{aligned}(\overline{x^2})_n&=\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\hbar}{m\omega}\ ,\\ (\overline{p^2})_n&=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar m\omega\ .\end{aligned}\right\} \tag{5.294}$$

设 A 个核子填充了三维谐振子的 A 个单粒子态，它在等势面三个主轴方向上占的线度分别为

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\overline{x^2}}&=\left[\frac{1}{A}\sum_{n_xn_yn_z}\left(n_x+\frac{1}{2}\right)\frac{\hbar}{m\omega_x}\right]^{1/2}\ ,\\ \sqrt{\overline{y^2}}&=\left[\frac{1}{A}\sum_{n_xn_yn_z}\left(n_y+\frac{1}{2}\right)\frac{\hbar}{m\omega_y}\right]^{1/2}\ ,\\ \sqrt{\overline{z^2}}&=\left[\frac{1}{A}\sum_{n_xn_yn_z}\left(n_z+\frac{1}{2}\right)\frac{\hbar}{m\omega_z}\right]^{1/2}\ .\end{aligned}\right\} \tag{5.295}$$

求和遍及被填充的单粒子态．自洽要求这三个长度正比于等势面三个主轴长，因而有

$$\omega_x\sum_{n_xn_yn_z}\left(n_x+\frac{1}{2}\right)=\omega_y\sum_{n_xn_yn_z}\left(n_y+\frac{1}{2}\right)=\omega_z\sum_{n_xn_yn_z}\left(n_z+\frac{1}{2}\right)\ . \tag{5.296}$$

在这一自洽条件下，可以说原子核是一个三主轴由(5.295)表示的椭球．

现在让这个椭球转起来．设它是一对称椭球，对称轴为 z 轴．即设它的 x 主轴与 y 主轴等长，因而 $\omega_x=\omega_y$．考虑它绕垂直于对称轴方向的转动，计算例如绕 x 轴转动的转动惯量．为此先介绍从微观理论计算集体运动惯量的方法．最常用的方法为推转模型(Cranking Model)，本世纪 50 年代由英格里斯(Inglis 1954,1955)创立．设核态

$$|\,t\,\rangle=|Q(t),\dot{Q}(t)\rangle\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int^{t}\mathscr{E}(Q,\dot{Q})\mathrm{d}t'\right) \tag{5.297}$$

与集体运动广义坐标 $Q(t)$ 和广义速度 $\dot{Q}=\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ 有关，$\mathscr{E}$ 为 Q 和 $\dot{Q}$ 的函数，却与核内核子的坐标无关．设态随时间的变化除(5.297)中的指数因子外完全通过 $Q(t)$ 和 $\dot{Q}(t)$ 实现．将(5.297)代入原子核的薛定谔方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}|t\rangle}{\mathrm{d}t}=\hat{H}|t\rangle\ , \tag{5.298}$$

$\hat{H}$ 只与核内核子的动力学变量有关而与集体运动变量无关．得

$$\left(\mathscr{E}(Q,\dot{Q})+\mathrm{i}\hbar\dot{Q}\frac{\delta}{\delta Q}+\mathrm{i}\hbar\ddot{Q}\frac{\delta}{\delta\dot{Q}}\right)|Q,\dot{Q}\rangle=\hat{H}|Q,\dot{Q}\rangle\ . \tag{5.299}$$

对原子核的转动，Q 就是它的三个欧勒角．而对绕 x 主轴的转动，Q 就是绕 x 轴的方位角．方位的变化通常都是周期的，角坐标又称循环坐标．绕主轴的转动是匀速的，对这种循环坐标 Q 有

$$\ddot{Q}=0\ . \tag{5.300}$$

又由于

$$\hat{\mathscr{P}}=\mathrm{i}\hbar\frac{\delta}{\delta Q} \tag{5.301}$$

为与 Q 正则共轭的广义动量算符[①]，(5.299)成为

$$(\hat{H}-\dot{Q}\hat{\mathscr{P}})|Q,\dot{Q}\rangle=\mathscr{E}(Q,\dot{Q})|Q,\dot{Q}\rangle\ . \tag{5.302}$$

对循环坐标 Q 此式是严格的．按绝热近似精神设 $\dot{Q}$ 为小量，$-\dot{Q}\hat{\mathscr{P}}$

① 参阅张启仁，《量子力学》，§7.4，高等教育出版社，1989．

为微扰，可用微扰法求解(5.302)．设[$|k\rangle$]为$\hat{H}$的完备正交归一本征态矢量集，

$$\hat{H}|k\rangle=E_k|k\rangle \ . \tag{5.303}$$

欲求的态矢量$|Q,\dot{Q}\rangle$可从其中一个态矢量出发经微扰求得．将这个出发的零级近似态的k定为0，

$$|Q,\dot{Q}\rangle=|0\rangle+\sum_k{}'c_k|k\rangle \ , \tag{5.304}$$

和号上的一撇表示其中不含$k=0$的项．到一级近似

$$c_k=-\dot{Q}\,\frac{\langle k|\hat{\mathscr{P}}|0\rangle}{E_0-E_k} \ . \tag{5.305}$$

代入(5.304)可求得态$|Q,\dot{Q}\rangle$中核的能量

$$E(Q,\dot{Q})=\frac{\langle Q,\dot{Q}|\hat{H}|Q,\dot{Q}\rangle}{\langle Q,\dot{Q}|Q,\dot{Q}\rangle}=\frac{E_0+\sum_k{}'|c_k|^2E_k}{1+\sum_k{}'|c_k|^2} \ .$$

因$|c_k|$为小量，将能量展到它的二次幂得

$$\begin{aligned}E(Q,\dot{Q})&=\Big(E_0+\sum_k{}'|c_k|^2E_k\Big)\Big(1-\sum_k{}'|c_k|^2\Big)\\&=E_0+\sum_k{}'|c_k|^2(E_k-E_0)\\&=E_0+\sum_k{}'\frac{|\langle k|\hat{\mathscr{P}}|0\rangle|^2}{E_k-E_0}\,\dot{Q}^2=E_0+\frac{M}{2}\,\dot{Q}^2 \ ,\end{aligned} \tag{5.306}$$

其中

$$M=2\sum_k{}'\frac{|\langle k|\hat{\mathscr{P}}|0\rangle|^2}{E_k-E_0} \tag{5.307}$$

为Q自由度运动的惯性参数．对绕x轴的转动，Q就是方位角，$\hat{\mathscr{P}}$为角动量的x分量$\hat{J}_x$，而

$$\mathscr{I}_x=2\sum_k{}'\frac{|\langle k|\hat{J}_x|0\rangle|^2}{E_k-E_0} \tag{5.308}$$

就是绕x轴的转动惯量．此式称为英格里斯公式．

采用谐振子势中的独立粒子运动模型．$|k\rangle$就是由单粒子态$|n_xn_yn_z\rangle$组成的斯莱特(Slater)行列式．由多体理论知[①]，在这种情况下(5.308)右边各量都可由相应单粒子量代替，变为

$$\mathscr{I}_x=2\sum_{\substack{n_xn_yn_z\\n_x'n_y'n_z'}}\frac{|\langle n_x'n_y'n_z'|\hat{j}_x|n_xn_yn_z\rangle|^2}{(n_x'-n_x)\hbar\omega_x+(n_y'-n_y)\hbar\omega_y+(n_z'-n_z)\hbar\omega_z} \ , \tag{5.309}$$

其中$\hat{j}_x$为单粒子角动量x分量算符．求和中n_x,n_y,n_z取遍被填充态的量子数；n_x',n_y',n_z'则取遍未填充态的量子数．可将n_x',n_y'和n_z'的取值范围扩大到与n_x,n_y和n_z不全同的全体单粒子态，增加的项恰相互抵消而无贡献．现不考虑与自旋有关的作用，单粒子自旋随机取向，任何方向上的自旋投影彼此相消，贡献为零．在单粒子总角动量$\hat{j}_x$中可只保留轨道角动量

$$\hat{l}_x=\hat{y}\hat{p}_z-\hat{z}\hat{p}_y \ . \tag{5.310}$$

由于这个算符的两项和单粒子态矢量$|n_xn_yn_z\rangle$都可分离变量，由(5.293)容易算得

$$\left.\begin{aligned}\langle n_x\,n_y-1\,n_z-1|\hat{l}_x|n_xn_yn_z\rangle&=-\mathrm{i}\,\frac{\hbar}{2}\sqrt{n_yn_z}\left(\sqrt{\frac{\omega_z}{\omega_y}}-\sqrt{\frac{\omega_y}{\omega_z}}\right),\\\langle n_x\,n_y-1\,n_z+1|\hat{l}_x|n_xn_yn_z\rangle&=\mathrm{i}\,\frac{\hbar}{2}\sqrt{n_y(n_z+1)}\left(\sqrt{\frac{\omega_z}{\omega_y}}+\sqrt{\frac{\omega_y}{\omega_z}}\right),\\\langle n_x\,n_y+1\,n_z-1|\hat{l}_x|n_xn_yn_z\rangle&=-\mathrm{i}\,\frac{\hbar}{2}\sqrt{(n_y+1)n_z}\left(\sqrt{\frac{\omega_z}{\omega_y}}+\sqrt{\frac{\omega_y}{\omega_z}}\right),\\\langle n_x\,n_y+1\,n_z+1|\hat{l}_x|n_xn_yn_z\rangle&=\mathrm{i}\,\frac{\hbar}{2}\sqrt{(n_y+1)(n_z+1)}\left(\sqrt{\frac{\omega_z}{\omega_y}}-\sqrt{\frac{\omega_y}{\omega_z}}\right).\end{aligned}\right\} \tag{5.311}$$

将它们代入(5.309)右边$\hat{j}_x$的矩阵元，完成对n_x',n_y'和n_z'的求和，得

$$\mathscr{I}_x=\frac{\hbar}{2}\left[\sum_{n_xn_yn_z}\frac{(n_y+n_z+1)(\omega_z-\omega_y)^2}{(\omega_z+\omega_y)\omega_z\omega_y}+\sum_{n_xn_yn_z}\frac{(n_y-n_z)(\omega_z+\omega_y)^2}{(\omega_z-\omega_y)\omega_z\omega_y}\right]$$

① 参阅张启仁，《量子力学》，§10.4，高等教育出版社，1989．

$$=\hbar\left[\sum_{n_xn_yn_z}\left(n_y+\frac{1}{2}\right)\frac{\omega_z^3+3\omega_z\omega_y^2}{(\omega_z^2-\omega_y^2)\omega_z\omega_y}-\sum_{n_xn_yn_z}\left(n_z+\frac{1}{2}\right)\frac{3\omega_y\omega_z^2+\omega_y^3}{(\omega_z^2-\omega_y^2)\omega_z\omega_y}\right]$$

$$=\hbar\left[\frac{1}{\omega_y}\sum_{n_xn_yn_z}\left(n_y+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{\omega_z}\sum_{n_xn_yn_z}\left(n_z+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=Am(\overline{y^2}+\overline{z^2}) . \tag{5.312}$$

此式第三等号处用到自洽条件(5.296)，末一等号处用到(5.295)．末一等式还表明，在独立粒子运动模型基础上，用英格里斯公式算出的转动惯量与将核当作刚体算出的转动惯量相等．

由 5.2 节已知，实测得到的核转动惯量显著小于刚体模型算出的值，表明核不是刚体．现在的结果则进一步表明，核内核子的运动并非独立粒子运动．其实，已有许多现象表明核子间有成对的效应，称为对关联．最明显的现象是偶偶核的自旋一律为零，奇 A 核的自旋可由那个奇核子的角动量表示．且偶偶核的结合能显著大于相邻奇 A 核结合能的平均值．这表明角动量相反的一对同类核子恒关联在一起，组成总角动量为零的核子对．另一方面，从超导理论知，固体中电子成对后成为复合的玻色子，电子对的玻色凝聚导致超导现象．超导现象即电子对组成的荷电理想无旋流体的流动．可见如核子成对，也可形成核子对组成的理想无旋流体，称为核超导态．一般认为，核基态为超导态．这就会大大降低核的转动惯量．不过由 5.2 节知，实测得到的核转动惯量又大于理想无旋流体模型算出的值，表明核基态并非完全的超导态．这可理解为核内核子并非足够多，远未达到完全超导理论要求的粒子数实际可当作无穷大的程度．下面的数学推导可加深这种理解．

设系统有时间反演对称，单粒子态 μ 和它的时间反演态$\bar{\mu}$ 有相同能量 ε_μ. 将单粒子态分成两组，一组用 μ 或 ν 表示．它们的时间反演态$\bar{\mu}$ 或$\bar{\nu}$ 都在另一组中．用 $\hat{a}_\mu, \hat{a}_{\bar{\mu}}, \hat{a}_\mu^\dagger$ 和 $\hat{a}_{\bar{\mu}}^\dagger$ 分别表示这些态中核子的消灭和产生算符，它们之间有反对易关系

$$\left.\begin{aligned}&\hat{a}_\mu\hat{a}_\nu+\hat{a}_\nu\hat{a}_\mu=\hat{a}_\mu\hat{a}_{\bar{\nu}}+\hat{a}_{\bar{\nu}}\hat{a}_\mu=\hat{a}_{\bar{\mu}}\hat{a}_{\bar{\nu}}+\hat{a}_{\bar{\nu}}\hat{a}_{\bar{\mu}}=0 ,\\&\hat{a}_\mu^\dagger\hat{a}_\nu^\dagger+\hat{a}_\nu^\dagger\hat{a}_\mu^\dagger=\hat{a}_\mu^\dagger\hat{a}_{\bar{\nu}}^\dagger+\hat{a}_{\bar{\nu}}^\dagger\hat{a}_\mu^\dagger=\hat{a}_{\bar{\mu}}^\dagger\hat{a}_{\bar{\nu}}^\dagger+\hat{a}_{\bar{\nu}}^\dagger\hat{a}_{\bar{\mu}}^\dagger=0 ,\\&\hat{a}_\mu\hat{a}_{\bar{\nu}}^\dagger+\hat{a}_{\bar{\nu}}^\dagger\hat{a}_\mu=\hat{a}_\mu^\dagger\hat{a}_{\bar{\nu}}+\hat{a}_{\bar{\nu}}\hat{a}_\mu^\dagger=0 ,\\&\hat{a}_\mu\hat{a}_\nu^\dagger+\hat{a}_\nu^\dagger\hat{a}_\mu=\hat{a}_{\bar{\mu}}\hat{a}_{\bar{\nu}}^\dagger+\hat{a}_{\bar{\nu}}^\dagger\hat{a}_{\bar{\mu}}=\delta_{\mu\nu} .\end{aligned}\right\} \tag{5.313}$$

由此可组成对产生算符

$$\hat{S}_\mu^\dagger=\hat{a}_\mu^\dagger\hat{a}_{\bar{\mu}}^\dagger , \tag{5.314}$$

对消灭算符

$$\hat{S}_\mu=\hat{a}_{\bar{\mu}}\hat{a}_\mu , \tag{5.315}$$

和粒子数算符

$$\hat{n}_\mu=\hat{a}_\mu^\dagger\hat{a}_\mu+\hat{a}_{\bar{\mu}}^\dagger\hat{a}_{\bar{\mu}} . \tag{5.316}$$

由(5.313)容易证明，它们之间有对易关系

$$\left.\begin{aligned}&\hat{S}_\mu\hat{S}_\nu-\hat{S}_\nu\hat{S}_\mu=\hat{S}_\mu^\dagger\hat{S}_\nu^\dagger-\hat{S}_\nu^\dagger\hat{S}_\mu^\dagger=0 ,\\&\hat{S}_\mu\hat{S}_\nu^\dagger-\hat{S}_\nu^\dagger\hat{S}_\mu=(1-\hat{n}_\mu)\delta_{\mu\nu} ,\\&\hat{S}_\mu\hat{n}_\nu-\hat{n}_\nu\hat{S}_\mu=2\delta_{\mu\nu}\hat{S}_\mu ,\\&\hat{S}_\mu^\dagger\hat{n}_\nu-\hat{n}_\nu\hat{S}_\mu^\dagger=-2\delta_{\mu\nu}\hat{S}_\mu^\dagger .\end{aligned}\right\} \tag{5.317}$$

考虑最简单的具对作用的哈密顿量

$$\hat{H}=\sum_\mu n_\mu\varepsilon_\mu-G\sum_{\mu,\nu}\hat{S}_\mu^\dagger S_\nu , \tag{5.318}$$

G 为作用常数．用 $|0\rangle$表示核子场的真空态，即各单粒子态中均无核子的状态．因而

$$\hat{a}_\mu|0\rangle=\hat{a}_{\bar{\mu}}|0\rangle=0 . \tag{5.319}$$

构造粒子对分布算符

$$\hat{A}^\dagger=\sum_\mu c_\mu\hat{S}_\mu^\dagger , \quad \sum_\mu|c_\mu|^2=1 . \tag{5.320}$$

要求 $\hat{A}^\dagger|0\rangle$为 $\hat{H}$ 的本征态:

$$\hat{H}\hat{A}^\dagger|0\rangle=E\hat{A}^\dagger|0\rangle . \tag{5.321}$$

由于真空态 $|0\rangle$也是 $\hat{H}$ 的本征态，本征值为零，这个本征方程又可写为

$$(\hat{H}\hat{A}^\dagger-\hat{A}^\dagger\hat{H})|0\rangle=E\hat{A}^\dagger|0\rangle . \tag{5.322}$$

做出左边括号内的对易关系，结果为

$$\hat{H}\hat{A}^{\dagger}-\hat{A}^{\dagger}\hat{H}=\sum_{\mu}\hat{S}_{\mu}^{\dagger}[2\varepsilon_{\mu}c_{\mu}-G\sum_{\nu}(1-\hat{n}_{\nu})c_{\nu}] \ . \tag{5.323}$$

将它作用在真空态上，由于 $\hat{n}_{\nu}|0\rangle=0$，又有正交归一关系

$$\langle 0|\hat{S}_{\mu}\hat{S}_{\mu'}^{\dagger}|0\rangle=\delta_{\mu\mu'} \ , \tag{5.324}$$

代人 (5.322) 左边后得

$$(E-2\varepsilon_{\mu})c_{\mu}+G\sum_{\nu}c_{\nu}=0 \ . \tag{5.325}$$

这是一个厄米矩阵的本征方程，矩阵的非对角元都是 $-G$，第 μ 个对角元为 $2\varepsilon_{\mu}-G$，本征值为 E，本征矢为 $[c_{\mu}]$. 这种矩阵的本征方程可用特殊方法求解．由 (5.325) 直接得

$$c_{\mu}=\frac{BG}{2\varepsilon_{\mu}-E} \ , \tag{5.326}$$

$B=\sum_{\nu}c_{\nu}$ 为常数．两边都对 μ 求和，左边得 $\sum_{\mu}c_{\mu}=B$，与右边约去后得

$$\sum_{\mu}\frac{1}{E-2\varepsilon_{\mu}}=-\frac{1}{G} \ . \tag{5.327}$$

这就是本征能量 E 的方程．用图解法．图 5-7 中的曲线表方程左边随 E 的变化，横线表右边的 $-\frac{1}{G}$，它不随 E 变．(5.327) 的根即曲线与横线交点的横坐标．将单粒子能级由低到高依次编号，使 $\varepsilon_1<\varepsilon_2<\varepsilon_3<\cdots$. 当 E 在区间 $(-\infty, 2\varepsilon_1)$ 内变化时，$\sum_{\mu}\frac{1}{E-2\varepsilon_{\mu}}$ 为负，在 $-\infty$ 一端趋于零，随 E 的增加单调下降，在 $2\varepsilon_1$ 一端趋于 $-\infty$．可见，若 $G>0$，曲线与横线在区间 $(-\infty, 2\varepsilon_1)$ 内必有且只有一个交点，哈密顿量为 (5.318) 的多体系在二倍单粒子基态能量以下必有且只有一个粒子对束缚态能级．类似地，在每一区间 $(2\varepsilon_{\nu}, 2\varepsilon_{\nu+1})$ 内，$\sum_{\mu}\frac{1}{E-2\varepsilon_{\mu}}$ 都是单调下降的，在 $2\varepsilon_{\nu}$ 一端趋于 ∞，在 $2\varepsilon_{\nu+1}$ 一端趋于 $-\infty$．因此曲线与横线在每一个这种区间内都必有且只有一个交点，多体系则有一个粒子对能级．在所有这些粒子对能级中，最低的那个最具特色．由于在小于 $2\varepsilon_1$ 的区域中曲线不再趋于 ∞，而是在 $E\to-\infty$ 处渐近于横轴，趋于零，因而变化缓慢．这使粒子对的基态能级相对于 $2\varepsilon_1$ 下降许多，形成较深的束缚．另一方面，对这个态有 $2\varepsilon_{\mu}-E\geqslant 2\varepsilon_1-E>0$，由 (5.326) 知其中各粒子对的几率振幅 c_{μ} 同号，这使它们的贡献相干地彼此加强．这叫相干效应．这个粒子对态的深束缚也可视为相干效应的结果．

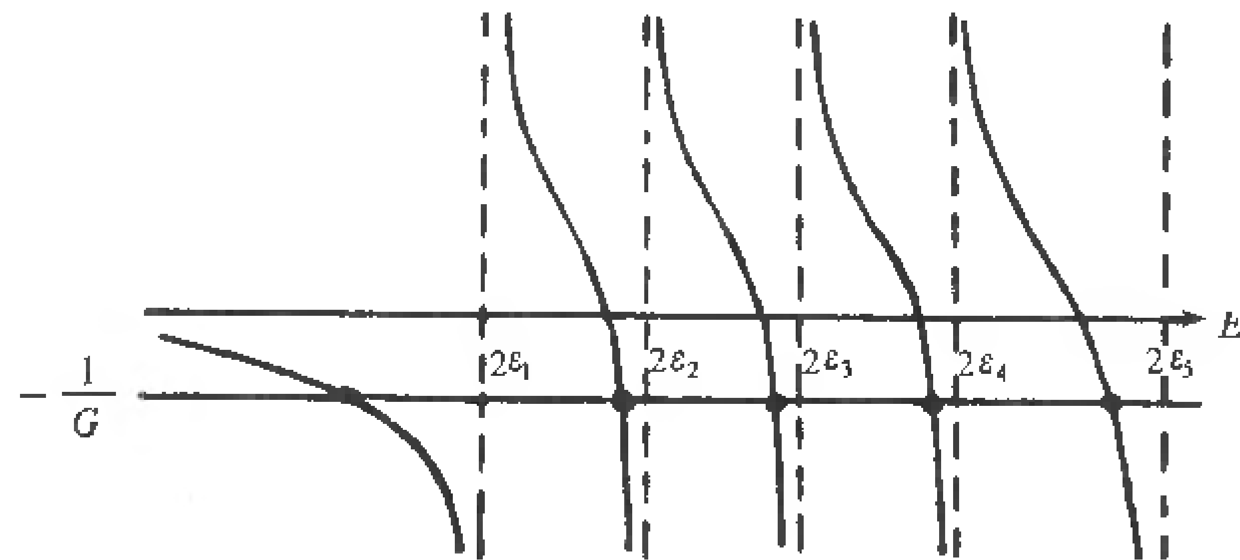


图 5-7 方程 (5.327) 图解示意．圆点的横坐标为方程的根

将粒子对基态记为

$$|1\rangle=\hat{A}^{\dagger}|0\rangle=\sum_{\mu}c_{\mu}\hat{S}_{\mu}^{\dagger}|0\rangle \ , \tag{5.328}$$

相应本征能量记为 E_1:

$$\hat{H}|1\rangle=E_1|1\rangle \ . \tag{5.329}$$

在这个态上再作用一粒子对产生算符

$$\hat{A}'^{\dagger}=\sum_{\mu}c_{\mu}'\hat{S}_{\mu}^{\dagger} , \tag{5.330}$$

并要求

$$\hat{H}\hat{A}'^{\dagger}|1\rangle=E\hat{A}'^{\dagger}|1\rangle \ . \tag{5.331}$$

利用 (5.329) 此式可改写为

$$(\hat{H}\hat{A}'^{\dagger}-\hat{A}'^{\dagger}\hat{H})|1\rangle=\Delta E\hat{A}'^{\dagger}|1\rangle, \quad \Delta E=E-E_1 \ . \tag{5.332}$$

将 (5.323) 中的 $\hat{A}^\dagger$ 和 c_μ 分别换成 $\hat{A}'^\dagger$ 和 c'_μ，代入上式左边．由 (5.317) 的末式可算得

$$\hat{n}_\nu|1\rangle = 2c_\nu\hat{S}^\dagger_\nu|0\rangle \ . \tag{5.333}$$

此式不为零表明第二对粒子的能量本征方程与第一对粒子的不同．这使多体系中的粒子对并非全同的复合玻色子．以全同玻色子凝聚为基础的超导和超流理论不能完全搬用．只当所有振幅 c_ν 都很小，(5.333) 右边可忽略时才能将多体系中的粒子对当作全同的．由于归一化条件 $\sum_\nu|c_\nu|^2=1$，这只当单粒子态数目趋于无穷且振幅在其间接近均匀分布时才能近似实现．均匀分布要求单粒子能级高度简并．由 (5.326) 可以看出，如果粒子对能量 E 与 $2\varepsilon_1$ 相差大，单粒子能级间距变得相对不重要，振幅分布也会趋向于均匀，粒子对也就接近全同，超导理论变得近似可用．这一切对固体中宏观大数电子组成的系统易于实现，而对最多不足三百个核子组成的原子核是难以完全实现的．核转动惯量高于理想无旋流体模型的计算值就不足为怪了．不过，无论如何对关联会在核内形成一种类似超导的状态，使核转动惯量显著低于刚体模型的计算值．如果对关联被破坏，核内形成独立粒子运动态，转动惯量将大幅增加到它的刚体值．

固体中破坏超导性的因素包括温度和磁场．当温度超过临界温度 T_c 或磁场超过临界磁场 $\mathscr{H}_c$，电子对被拆散，超导性因而消失，固体由超导相转变为"正常"相．核物理也采用温度概念表示能量在各自由度的分布．称基态核温度为零，而当激发能分布到每一自由度后即称达到热平衡．这种激发导致核的有限温度．当核子获得足够能量摆脱对关联时，核超导性也会消失．这里温度起着在固体中类似的作用．核子磁矩很小，电磁作用比强作用又弱得多，外磁场对核内结构的影响是微不足道的．代替磁场，起着类似作用的是核转动本身．在角速度为 $\boldsymbol{\Omega}$ 的参考系中看，速度为 $\boldsymbol{v}$ 的粒子受科里奥利力

$$\boldsymbol{F}_c = 2m\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega} \tag{5.334}$$

的作用．从形式上看，它很像带电荷 q 的粒子在磁场 $\mathscr{H}$ 中受的洛伦兹力①

$$\boldsymbol{F}_l = q\boldsymbol{v}\times\mathscr{H} \ . \tag{5.335}$$

$\boldsymbol{\Omega}$ 对应 $\mathscr{H}$，$2m$ 对应 q．由罗伦兹力导出的结果可搬用于科里奥利力作用下的力学问题．例如由此可推断，在转动坐标系中旋转的粒子旋转方向与 $\boldsymbol{\Omega}$ 一致可以降低能量．这种效应称为顺排．互相关联的一对粒子，转动方向是相反的．而顺排则要它们的转动方向同趋 $\boldsymbol{\Omega}$．可见顺排效应要破坏粒子对关联．当原子核转动起来，角速度超过一临界角速度后，核子顺排释放的能量足以支付拆散核子对关联必需的能量时，对关联消失，核内核子运动成为彼此独立的，核转动惯量就会骤然增大到它的刚体值，原子核发生从'超导态'到'正常态'的相变．

图 5-8 表示出实验观察到的核转动惯量与转动角速度的关系．

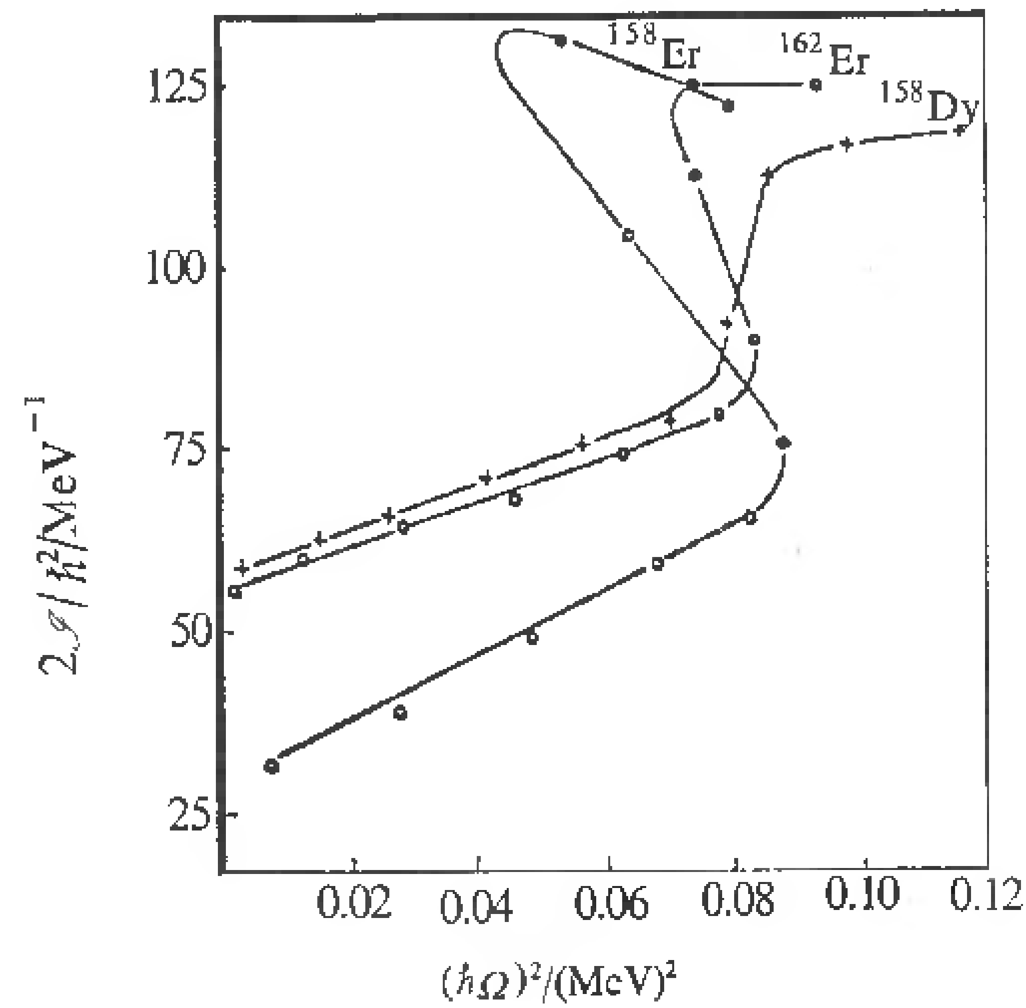


图 5-8　形变核的转动惯量 $\mathscr{I}$ 与角速度 Ω 的关系．注意回弯现象 [取自 Hamilton 1973]

① 这是标准单位制的表达式，在高斯单位制中 $F_l = \frac{q}{c}\ \boldsymbol{v}\times\mathscr{H}$．

在低速区，转动惯量是角速度的单值连续函数．按上面的解释，这是核处于‘超导相’时的转动惯量．随角速度的些许增加可解释为核在转动中因惯性离心力而些许变长的结果．当角速度Ω增至临界值Ω时出现转动惯量的两种不同取值．较低值为‘超导相’核的转动惯量；较高值则为‘正常相’即独立粒子运动相的核转动惯量．图中的回弯现象是相变的典型现象．在范德瓦耳斯(Van der Waals)物态方程的图像中已见过类似回弯现象．在那里它标志气态与液态间的相变．

5.5 核结构的代数理论

在第1章介绍过强子谱的代数理论．代数理论把动力学的对称性表成代数关系，从代数关系直接导出系统的结构和谱．在对系统的动力学尚未彻底知晓，却又已掌握它的部分对称性的情况下，代数方法是强有力的．它还具有简单明了的特点，只要一种代数关系成立，谱就必定这样，结构就必具此特点．在对系统动力学的对称性也不甚了然的情况下，代数理论可帮助弄清对称性．尝试各种代数理论，挑选其中与实验相符的，从中就可认识系统的对称性．原子核至今未有基本理论．对核结构的研究始终在与实验对比中探索．在这种情况下采用代数理论势在必行．核结构的代数理论已发展多年，近年更是蓬勃发展，内容丰富．在此仅用简单例子说明这种方法．各种模型的细节可直接由文献了解．

伊里奥特(Elliott 1958)将SU(3)用于核结构研究是代数理论早年的重要成就．设核子在各向同性简谐振子场中运动，单核子哈密顿量为

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{r}^2=\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\hat{p}_k^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}_k^2\right), \tag{5.336}$$

$k=1,2$和3表示x, y和z三个自由度．引进消灭算符和产生算符

$$\left.\begin{aligned}\hat{a}_k&=\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega\hat{x}_k+\mathrm{i}\hat{p}_k),\\ \hat{a}_k^\dagger&=\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega\hat{x}_k-\mathrm{i}\hat{p}_k);\end{aligned}\right\} \tag{5.337}$$

它们之间有对易关系

$$\left.\begin{aligned}&\hat{a}_k\hat{a}_{k'}-\hat{a}_{k'}\hat{a}_k=\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_{k'}^\dagger-\hat{a}_{k'}^\dagger\hat{a}_k^\dagger=0,\\ &\hat{a}_k\hat{a}_{k'}^\dagger-\hat{a}_{k'}^\dagger\hat{a}_k=\delta_{kk'};\end{aligned}\right\} \tag{5.338}$$

单粒子哈密顿量(5.336)可表为

$$\hat{H}=\sum_{k=1}^{3}\left(\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega. \tag{5.339}$$

这个哈密顿量对$k=1,2$和3显然对称．

定义

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1&\equiv\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2+\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1=\frac{1}{\hbar}\left(m\omega\hat{x}\hat{y}+\frac{1}{m\omega}\hat{p}_x\hat{p}_y\right),\\ \lambda_2&\equiv-\mathrm{i}(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2-\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1)=\frac{1}{\hbar}(\hat{x}\hat{p}_y-\hat{y}\hat{p}_x),\\ \lambda_3&\equiv\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1-\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2=\frac{1}{\hbar}\left[\frac{m\omega}{2}(\hat{x}^2-\hat{y}^2)+\frac{1}{2m\omega}(\hat{p}_x^2-\hat{p}_y^2)\right],\\ \lambda_4&\equiv\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_3+\hat{a}_3^\dagger\hat{a}_1=\frac{1}{\hbar}\left(m\omega\hat{x}\hat{z}+\frac{1}{m\omega}\hat{p}_x\hat{p}_z\right),\\ \lambda_5&\equiv-\mathrm{i}(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_3-\hat{a}_3^\dagger\hat{a}_1)=\frac{1}{\hbar}(\hat{x}\hat{p}_z-\hat{z}\hat{p}_x),\\ \lambda_6&\equiv\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_3+\hat{a}_3^\dagger\hat{a}_2=\frac{1}{\hbar}\left(m\omega\hat{y}\hat{z}+\frac{1}{m\omega}\hat{p}_y\hat{p}_z\right),\\ \lambda_7&\equiv-\mathrm{i}(\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_3-\hat{a}_3^\dagger\hat{a}_2)=\frac{1}{\hbar}(\hat{y}\hat{p}_z-\hat{z}\hat{p}_y),\\ \lambda_8&\equiv\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1+\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2-2\hat{a}_3^\dagger\hat{a}_3)=\frac{1}{\hbar}\left[\frac{m\omega}{2\sqrt{3}}(\hat{x}^2+\hat{y}^2-2\hat{z}^2)\right.\\ &\left.\quad+\frac{1}{2\sqrt{3}\,m\omega}(\hat{p}_x^2+\hat{p}_y^2-2\hat{p}_z^2)\right].\end{aligned}\right\} \tag{5.340}$$

由基本对易关系(5.338)可证,这八个算符满足SU(3)李代数的结构关系(1.30),因而是SU(3)李代数一个表示的生成元．由这些式子的第二等号处可看出,其中三个算符组成轨道角动量

$$\hat{L}_x=\hbar\lambda_7,\qquad \hat{L}_y=-\hbar\lambda_5,\qquad \hat{L}_z=\hbar\lambda_2\ ,\tag{5.341}$$

其余五个算符则组成一个二阶不可约张量

$$\hat{Q}_0=-\hbar\lambda_8,\quad \hat{Q}_{\pm1}=\mp\frac{\hbar}{\sqrt{2}}(\lambda_4\pm i\lambda_6),\quad \hat{Q}_{\pm2}=\frac{\hbar}{\sqrt{2}}(\lambda_3\pm i\lambda_1),\tag{5.342}$$

可表示单粒子态的四极矩．单粒子哈密顿量(5.339)与这八个生成元都对易,因而是SU(3)对称的．设核内N个核子在简谐振子平均场中作独立粒子运动,哈密顿量为

$$\hat{H}^0=\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{3}\left(\hat{a}_k^\dagger(j)\hat{a}_k(j)+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega=\sum_{j=1}^{N}\hat{H}(j)\ ,\tag{5.343}$$

其中

$$\hat{H}(j)=\sum_{k=1}^{3}(\hat{a}_k^\dagger(j)\hat{a}_k(j)+\frac{1}{2})\hbar\omega\tag{5.344}$$

为第j核子的哈密顿量．同样可将各核子的SU(3)生成元加起来,得

$$\Lambda_a=\sum_{j=1}^{N}\lambda_a(j),\qquad a=1,2,\cdots,8,\tag{5.345}$$

它们也满足SU(3)李代数的结构关系,因而也是SU(3)李代数一个表示的生成元．$\hat{H}^0$与这些生成元都对易,因而也是SU(3)对称的．将$\hat{H}^0$的本征态按所隶属的SU(3)不可约表示分类,同一个不可约表示内的各本征态本征值相同．实际上由于忽略了粒子间的相互作用,N粒子态可用单粒子态的直积组成．将单粒子态先按SU(3)不可约表示分类,固定它所隶属的不可约表示就固定了这个单粒子的能量．由这些单粒子态的直积组成的N粒子态的能量就是这些单粒子能量的和．因此N粒子系的能量取决于各单粒子所隶属的SU(3)不可约表示．N个粒子在一组单粒子SU(3)不可约表示中的分布称为它的一个SU(3)组态．在忽略粒子间相互作用的条件下,多粒子系的能量取决于它的组态．各单粒子不可约表示基底的直积是多粒子系SU(3)表示的基底．这个表示是各单粒子不可约表示的直积表示,维数为各单粒子不可约表示维数的积,这也就是在没有粒子间作用的条件下多粒子系的简并度．直积表示一般是可约的．在没有粒子间作用的条件下,约化得的各不可约表示能量彼此相同．

设核子间有剩余四极——四极作用

$$\hat{H}'=-\kappa\frac{\omega}{\hbar}\sum_{j>j'}\sum_{\mu=-2}^{2}\hat{Q}_\mu(j)\hat{Q}_\mu(j')=-\kappa\hbar\omega\sum_{j>j'}\sum_{a=1,3,4,6,8}\lambda_a(j)\lambda_a(j')\ .\tag{5.346}$$

它会导致直积表示能级的劈裂．由于这项附加哈密顿量并不与Λ_a一一对易,SU(3)对称被破坏,不仅各约化得的SU(3)不可约表示能量彼此不同,而且还会在各不可约表示内部引起能级劈裂．引进多体系的总'四极矩'

$$\hat{Q}_\mu=\sum_{j=1}^{N}\hat{Q}_\mu(j)\ ,\tag{5.347}$$

由(5.342)和(5.345)知

$$\hat{Q}_0=-\hbar\Lambda_8,\quad \hat{Q}_{\pm1}=\mp\frac{\hbar}{\sqrt{2}}(\Lambda_4\pm i\Lambda_6),\quad \hat{Q}_{\pm2}=\frac{\hbar}{\sqrt{2}}(\Lambda_3\pm i\Lambda_1)\ .\tag{5.348}$$

$$\begin{aligned}\hat{H}'&=-\frac{\kappa\omega}{2\hbar}\sum_{\mu=-2}^{2}\hat{Q}_\mu\hat{Q}_\mu+\frac{\kappa\omega}{2\hbar}\sum_{j=1}^{N}\sum_{\mu=-2}^{2}\hat{Q}_\mu(j)\hat{Q}_\mu(j)\\&=-\frac{\kappa\hbar\omega}{2}\sum_{a=1,3,4,6,8}\Lambda_a^2+\frac{\kappa\hbar\omega}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{a=1,3,4,6,8}\lambda_a^2(j)\ .\end{aligned}\tag{5.349}$$

此式第二项为单粒子量的和,可以吸收到$\hat{H}^0$中,或者干脆在$\hat{H}^0$中引入与这项反号的项,将它抵消,使$\hat{H}^0$仍维持(5.343)的形式,而将粒子间的作用包含在

$$\hat{H}''=-\frac{\kappa\omega}{2\hbar}\sum_{\mu=-2}^{2}\hat{Q}_\mu\hat{Q}_\mu=-\frac{\kappa\hbar\omega}{2}\sum_{a=1,3,4,6,8}\Lambda_a^2\tag{5.350}$$

中．总哈密顿量为

$$\hat{H}=\hat{H}^0+\hat{H}''\ .\tag{5.351}$$

在讨论原子核的集体形变时,这种做法更显合理．$\hat{H}''$并不与SU(3)李代数的各元素都对易,因而破坏系统的SU(3)对称．好在

$$C=\sum_{a=1}^{8}\Lambda_a^2 \tag{5.352}$$

是卡西米尔算符，是 SU(3) 对称的，在 SU(3) 的一个不可约表示内为常数．由 (5.345) 和 (5.341) 知

$$\hat{H}''=-\frac{\kappa\hbar\omega}{2}\left(C-\frac{\hat{L}^2}{\hbar^2}\right), \tag{5.353}$$

其中 $\hat{L}^2=\hat{\boldsymbol{L}}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}$，

$$\hat{\boldsymbol{L}}=\sum_{j=1}^{N}\hat{\boldsymbol{L}}(j) \tag{5.354}$$

为粒子系的总轨道角动量．由结构关系 (1.30) 还可看出，Λ_7，$-\Lambda_5$ 和 Λ_2 在 SU(3) 李代数内张开一个子代数，即 SO(3) 李代数．(5.353) 表明，$\hat{H}''$ 虽破缺 SU(3) 对称，却不破缺 SO(3) 对称．$\hat{L}^2$ 为 SO(3) 李代数的卡西米尔算符．SU(3) 李代数的不可约表示作为 SO(3) 李代数的表示仍可约．将它约化成 SO(3) 李代数不可约表示的直和，其中各表示同时由 C 和 $\hat{L}^2$ 刻画．在 SO(3) 李代数内再确定一个生成元，例如 $\Lambda_2=\frac{\hat{L}_z}{\hbar}$，$\hat{L}^2$ 和 $\hat{L}_z$ 的本征值分别为 $L(L+1)\hbar^2$ 和 $M\hbar$，作为 SU(3) 和 SO(3) 李代数不可约表示基底的核定态可记为 $|sCLM\rangle$，其中 s 为确定状态必需的其它量子数，包括各单粒子 SU(3) 不可约表示的卡西米尔算符值 $C_1, C_2, \cdots, C_N$ 等．单粒子 SU(3) 对称就是它的振动量子在 x，y 和 z 三个方向上分布的对称，单粒子态为它的振动量子在这三个方向上对称分布的状态，因此单粒子 SU(3) 不可约表示必是 $(n_j,0)$ 表示，n_j 为这个第 j 粒子的振动量子数．可见，可用 $n_1, n_2, \cdots, n_N$ 代替 $C_1, C_2, \cdots, C_N$ 来刻画 N 粒子态．哈密顿量 (5.351) 的两项可分别确定，其中 $\hat{H}^0$ 的本征值为

$$E^0=\left(n+\frac{3N}{2}\right)\hbar\omega, \qquad n=\sum_{j=1}^{N}n_j, \tag{5.355}$$

$\hat{H}''$ 的本征值为

$$E''=-\frac{\kappa\hbar\omega}{2}\,[C-L(L+1)]. \tag{5.356}$$

在一个不可约表示内卡西米尔算符的取值 C 是一定的，对其中的任何一个态矢量都一样，故可选择一个方便的态来计算它．Λ_1, Λ_2 和 Λ_3 在 SU(3) 李代数内张开一个 SU(2) 子李代数，可引进 T 旋，它的三个分量为

$$\hat{T}_i=\frac{1}{2}\Lambda_i, \qquad i=1,2,3. \tag{5.357}$$

在第一章讨论强子的 SU(3) 对称时它就是同位旋．

$$\hat{T}^2=\sum_{i=1}^{3}\hat{T}_i^2 \tag{5.358}$$

为 SU(2) 李代数的卡西米尔算符．$\hat{T}^2$ 的本征值为 $T(T+1)$，T 为整数或半整数．T 旋的三个分量可确定一个，通常取 $\hat{T}_3$，它的本征值就记为 T_3，可取 $T, T-1, \cdots, -T$ 等 $2T+1$ 个不同值．将 SU(3) 李代数的不可约表示约化成 SU(2) 李代数不可约表示的直和后，可用 T 和 T_3 表示 SU(3) 李代数不可约表示的基底隶属的 SU(2) 李代数不可约表示及其在这个表示中的位置．为确定 SU(3) 不可约表示中的基底还须用量子数 Y，它是算符

$$\hat{Y}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Lambda_8 \tag{5.359}$$

的本征值．这个量在强子的 SU(3) 对称的理论中称为超荷．SU(3) 不可约表示的基底可表为 $|T\ T_3\ Y\rangle$．

定义

$$\hat{T}_\pm\equiv\hat{T}_1\pm \mathrm{i}\hat{T}_2, \quad \hat{U}_\pm\equiv\frac{1}{2}(\Lambda_4\pm \mathrm{i}\Lambda_5), \quad \hat{V}_\pm\equiv\frac{1}{2}(\Lambda_6\pm \mathrm{i}\Lambda_7). \tag{5.360}$$

由结构关系 (1.30) 和结构常数 (1.31) 知

$$\hat{T}_3\hat{T}_\pm-\hat{T}_\pm\hat{T}_3=\pm\hat{T}_\pm, \qquad \hat{T}_+\hat{T}_--\hat{T}_-\hat{T}_+=2\hat{T}_3, \tag{5.361}$$

$$\hat{Y}\hat{U}_\pm-\hat{U}_\pm\hat{Y}=\pm\hat{U}_\pm, \qquad \hat{U}_+\hat{U}_--\hat{U}_-\hat{U}_+=\hat{T}_3+\frac{3}{2}\hat{Y}, \tag{5.362}$$

$$\hat{Y}\hat{V}_\pm-\hat{V}_\pm\hat{Y}=\pm\hat{V}_\pm,\qquad \hat{V}_+\hat{V}_--\hat{V}_-\hat{V}_+=-\hat{T}_3+\frac{3}{2}\hat{Y}. \tag{5.363}$$

它们表明，$\hat{T}_+$(或 $\hat{T}_-$) 作用在 $\hat{T}_3$ 的本征态上得到的仍是 $\hat{T}_3$ 的本征态，不过量子数 T_3 要增加(或减少)一个单位；$\hat{U}_+$, $\hat{V}_+$(或 $\hat{U}_-$, $\hat{V}_-$) 作用在 $\hat{Y}$ 的本征态上得到的仍是 $\hat{Y}$ 的本征态，只是量子数 Y 要增加(或减少)一个单位．考虑态 $|T\ T_{3>}Y_>\rangle$，其中 $Y_>$是这个不可约表示中量子数 Y 的最大值，$T_{3>}$ 为 Y 取定 $Y_>$后T_3的最大值．这个态称为最高权态．由于 Y 不能超过 $Y_>$,必有

$$\hat{U}_+|T\ T_{3>}Y_>\rangle=\hat{V}_+|T\ T_{3>}Y_>\rangle=0\ . \tag{5.364}$$

由于

$$\hat{T}_3\hat{Y}-\hat{Y}\hat{T}_3=0,\qquad \hat{T}_\pm\hat{Y}-\hat{Y}\hat{T}_\pm=0\ , \tag{5.365}$$

$\hat{T}_\pm$ 作用在 $\hat{Y}$ 的本征态上得到的仍是 $\hat{Y}$ 的本征态，且量子数 Y 不改变．可见 $\hat{T}_\pm$ 作用在 $|T\ T_3\ Y\rangle$上只改变量子数 T_3. 对最高权态，在 Y 固定的情况下 T_3 已不能再增加，故有

$$T_+|T\ T_{3>}Y_>\rangle=0\ . \tag{5.366}$$

计算卡西米尔算符对最高权态的作用．

$$\begin{aligned}C|T\ T_{3>}Y_>\rangle&=2\Big(\hat{T}_+\hat{T}_-+\hat{T}_-\hat{T}_++\hat{U}_+\hat{U}_-+\hat{U}_-\hat{U}_++\hat{V}_+\hat{V}_-+\hat{V}_-\hat{V}_+\\&\qquad+2\hat{T}_3^2+\frac{3}{2}\hat{Y}^2\Big)|T\ T_{3>}Y_>\rangle\\&=2\Big(2\hat{T}_-\hat{T}_++2\hat{U}_-\hat{U}_++2\hat{V}_-\hat{V}_++2\hat{T}_3+3\hat{Y}\\&\qquad+2\hat{T}_3^2+\frac{3}{2}\hat{Y}^2\Big)|T\ T_{3>}Y_>\rangle\\&=\Big[4T_{3>}(T_{3>}+1)+6Y_>\Big(\frac{1}{2}Y_>+1\Big)\Big]|T\ T_{3>}Y_>\rangle\ ,\end{aligned} \tag{5.367}$$

在第一等号处用了定义 (5.352) 和 (5.360)，第二等号处用了 (5.361) ~ (5.363) 的第二式，第三等号处用了 (5.364) 和 (5.366) 以及 $\hat{T}_3$ 和 $\hat{Y}$ 的本征方程．现在只须计算给定不可约表示的最高权$Y_>$和 $T_{3>}$．由 1.3 节知，SU(3) 的不可约表示 (λ,μ)的每一基底含 λ 个对称化的上标和 μ 个对称化的下标．每个上、下标可有 1, 2 和 3 三个不同取值．上标取 1 和 2 时，Y 为$\frac{1}{3}$，T_3分别为$\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$；上标取 3 时 Y 为 $-\frac{2}{3}$，T_3 为 0. 下标取 1 和 2 时，Y 为 $-\frac{1}{3}$，T_3 分别为 $-\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{2}$；下标取 3 时 Y 为 $\frac{2}{3}$，T_3 为 0. 为使 Y 取最大值，上标应取 1 或 2, 下标应取 3. 这时 Y 取最大值

$$Y_>=\frac{1}{3}(\lambda+2\mu)\ . \tag{5.368}$$

在此前提下，为使 T_3 取最大值上标应取 1, 得

$$T_{3>}=\frac{\lambda}{2}\ . \tag{5.369}$$

代入 (5.367) 右边得

$$C=\frac{4}{3}(\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2+3\lambda+3\mu)\ . \tag{5.370}$$

将此式代入 (5.356) 右边，得此模型能谱的解析表达式．值得注意的是其中出现转动谱

$$E_L=\frac{1}{2\mathscr{I}}L(L+1)\hbar^2,\qquad \mathscr{I}=\frac{\hbar}{\kappa\omega}\ . \tag{5.371}$$

不过它已不像在 5.1节和5.2 节的几何理论中那样直观．

核结构代数理论的蓬勃发展得益于相互作用玻色子模型的提出 (Arima 1976,1978,1978a,1979)，按英文字头简称 IBM．设有 $\mathscr{N}$个单粒子态，其中第 j 态玻色子的消灭算符为 $\hat{a}_j$，产生算符为 $\hat{a}_j^\dagger$．它们之间有对易关系

$$\left.\begin{aligned}&\hat{a}_j\hat{a}_{j'}-\hat{a}_{j'}\hat{a}_j=\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_{j'}^\dagger-\hat{a}_{j'}^\dagger\hat{a}_j^\dagger=0\ ,\\&\hat{a}_j\hat{a}_{j'}^\dagger-\hat{a}_{j'}^\dagger\hat{a}_j=\delta_{jj'}\ .\end{aligned}\right\} \tag{5.372}$$

定义二次型

$$\hat{A}_{jj'}=\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_{j'}\ , \tag{5.373}$$

由基本对易关系 (5.372) 得

$$\hat{A}_{j_1j_1'}\hat{A}_{j_2j_2'}-\hat{A}_{j_2j_2'}\hat{A}_{j_1j_1'}=\delta_{j_1'j_2}\hat{A}_{j_1j_2'}-\delta_{j_2j_1'}\hat{A}_{j_2j_1'} \quad . \tag{5.374}$$

此式表明，$\hat{A}_{jj'}$ 的李代数性质与第 j 行 j' 列有元素 1 而在其他行列元素均为 0 的 $\mathcal{N}\times\mathcal{N}$ 矩阵 $E_{jj'}$ 相同．这种矩阵恰有对易关系

$$E_{j_1j_1'}E_{j_2j_2'}-E_{j_2j_2'}E_{j_1j_1'}=\delta_{j_1'j_2}E_{j_1j_2'}-\delta_{j_2j_1'}E_{j_2j_1'} \quad . \tag{5.375}$$

$E_{jj'}, j, j'=1, 2, \cdots, \mathcal{N}$，共 $\mathcal{N}^2$ 个矩阵组成 $\mathcal{N}\times\mathcal{N}$ 矩阵的一组基，任何 $\mathcal{N}\times\mathcal{N}$ 矩阵可用它展开：

$$M=\sum_{j,j'=1}^{\mathcal{N}}M_{jj'}E_{jj'} \quad , \tag{5.376}$$

$M_{jj'}$ 即为矩阵 M 的第 j 行 j' 列的矩阵元．(5.374) 和 (5.375) 的同构保证玻色子算符

$$\hat{M}=\sum_{j,j'=1}^{\mathcal{N}}M_{jj'}\hat{A}_{jj'} \tag{5.377}$$

与矩阵 M 有相同的对易关系，即相同的李代数结构．这种同构称为李代数的玻色子实现．(5.340) 就是 SU(3) 李代数的一个玻色子实现，在这种实现中玻色子为核子振动的量子．IBM 也借助于李代数的玻色子实现，不过其中的玻色子被设想为原子核的成分，例如由两个核子组成的核子对．这样，核内玻色子的数目是固定的．称满壳层外的核子为价核子，玻色子数目应为价核子数的一半．

$\mathcal{N}\times\mathcal{N}$ 矩阵简称 $\mathcal{N}$ 阶矩阵．全体 $\mathcal{N}$ 阶矩阵组成 $\mathcal{N}$ 阶一般李代数，记为 $G(\mathcal{N})$. 它的生成元就是 $E_{jj'}, j, j'=1, 2, \cdots, \mathcal{N}$，结构关系为 (5.375)．这个李代数太大，很少用及．由于厄米矩阵的厄米交换子 (1.29) 也是厄米矩阵，$\mathcal{N}$ 阶厄米矩阵的全体组成 $G(\mathcal{N})$ 李代数的一个子李代数，称为 $\mathcal{N}$ 阶幺正李代数，记为 $U(\mathcal{N})$. 这里，幺正是指由厄米矩阵 M 组成的矩阵

$$U=e^{iM} \tag{5.378}$$

是幺正矩阵．这很容易验证如下：

$$U^\dagger U=e^{-iM}e^{iM}=I=e^{iM}e^{-iM}=UU^\dagger, \tag{5.379}$$

其中 I 为 $\mathcal{N}$ 阶幺矩阵．幺正矩阵有逆，且其逆也是幺正矩阵；两个幺正矩阵的积仍为幺正矩阵；且 I 也是幺正矩阵．因此 $\mathcal{N}$ 阶幺正矩阵的全体组成一个群，称为 $\mathcal{N}$ 阶幺正群，也记为 $U(\mathcal{N})$. 这里我们看到李代数与群之间的联系．与幺正群相联系的李代数即是由厄米矩阵组成的幺正李代数．阵迹为零的矩阵称为迹零矩阵．由于 (1.28)，迹零矩阵的交换子仍为迹零矩阵．可见，由 $\mathcal{N}$ 阶迹零厄米矩阵的全体可组成 $U(\mathcal{N})$ 李代数的一个子李代数，称为 $\mathcal{N}$ 阶特殊幺正李代数，记为 $SU(\mathcal{N})$. 这里，特殊是指若将迹零厄米矩阵代入 (5.378) 右边的 M，得到的矩阵 U 不仅是幺正的，而且行列式为 1:

$$\mathrm{Det}(U)=e^{i\mathrm{Tr}M}=e^{i0}=1 \quad . \tag{5.380}$$

行列式为 1 的幺正矩阵称为特殊幺正矩阵．I 为特殊幺正矩阵，特殊幺正矩阵的逆也是特殊幺正矩阵，特殊幺正矩阵的积仍为特殊幺正矩阵．$\mathcal{N}$ 阶特殊幺正矩阵的全体组成一个群，称为 $\mathcal{N}$ 阶特殊幺正群，也记为 $SU(\mathcal{N})$，是 $U(\mathcal{N})$ 群的子群．与它相联系的李代数就是 $SU(\mathcal{N})$ 李代数．矩阵元都是虚数的矩阵叫虚矩阵．虚矩阵的厄米交换子显然也是虚矩阵．$SU(\mathcal{N})$ 李代数中的虚矩阵组成它的一个子李代数，称为 $\mathcal{N}$ 阶特殊正交李代数，记为 $SO(\mathcal{N})$. 这里，正交是指若将迹零厄米虚矩阵代入 (5.378) 右边的 M，得到的矩阵 U 不仅是特殊幺正矩阵，而且还是实矩阵，其中矩阵元全为实数．实幺正矩阵称为正交矩阵．行列式为 1 的正交矩阵为特殊正交矩阵．全体 $\mathcal{N}$ 阶特殊正交矩阵组成一个群，称为 $\mathcal{N}$ 阶特殊正交群，记为 $SO(\mathcal{N})$. 它是 $SU(\mathcal{N})$ 群的子群，与它相联系的李代数就是 $SO(\mathcal{N})$ 李代数．此外，在 $\mathcal{N}-1$ 阶厄米矩阵上加上全部由零组成的第 $\mathcal{N}$ 行和第 $\mathcal{N}$ 列，可得一 $\mathcal{N}$ 阶厄米矩阵．这种 $\mathcal{N}$ 阶厄米矩阵的厄米交换子仍具有相同的形式，即仍是一 $\mathcal{N}-1$ 阶厄米矩阵外加全部由零组成的第 $\mathcal{N}$ 行和第 $\mathcal{N}$ 列．可见这种 $\mathcal{N}$ 阶厄米矩阵在 $U(\mathcal{N})$ 李代数内组成一子李代数，它与 $U(\mathcal{N}-1)$ 李代数同构．即 $U(\mathcal{N}-1)$ 李代数是 $U(\mathcal{N})$ 李代数的子李代数．类似地，$SU(\mathcal{N}-1)$ 李代数是 $SU(\mathcal{N})$ 李代数的子李代数，$SO(\mathcal{N}-1)$ 李代数是 $SO(\mathcal{N})$ 李代数的子李代数．同样的关系，也可从群的角度来认识．从 $\mathcal{N}-1$ 阶幺

正矩阵加上第 $\mathscr{N}$ 行和第 $\mathscr{N}$ 列，其中第 $\mathscr{N}$ 行 $\mathscr{N}$ 列对角元为 1，第 $\mathscr{N}$ 行和第 $\mathscr{N}$ 列的非对角元均为零．这样得到的 $\mathscr{N}$ 阶矩阵仍是幺正的．这种矩阵的逆和积仍为这种矩阵，即仍是一 $\mathscr{N}-1$ 阶幺正矩阵加上第 $\mathscr{N}$ 行和第 $\mathscr{N}$ 列，其中第 $\mathscr{N}$ 行 $\mathscr{N}$ 列为 1，非对角元为零．可见这种 $\mathscr{N}$ 阶幺正矩阵在 $U(\mathscr{N})$ 群内组成一子群，与 $U(\mathscr{N}-1)$ 群同构．即 $U(\mathscr{N}-1)$ 群为 $U(\mathscr{N})$ 群的子群．类似地，$SU(\mathscr{N}-1)$ 群为 $SU(\mathscr{N})$ 群的子群，$SO(\mathscr{N}-1)$ 群为 $SO(\mathscr{N})$ 群的子群．

于是，可将一些群排列起来，使后面的群为前面的群的子群．这种排列称为群链．例如

$$U(\mathscr{N})\supset U(\mathscr{N}-1)\supset SU(\mathscr{N}-1)\supset SO(\mathscr{N}-1)\cdots$$

就是一个群链，它表明 $U(\mathscr{N}-1)$ 为 $U(\mathscr{N})$ 的子群，$SU(\mathscr{N}-1)$ 为 $U(\mathscr{N}-1)$ 的子群，$SO(\mathscr{N}-1)$ 为 $SU(\mathscr{N}-1)$ 的子群．李代数也可作同样的排列．群链也就是李代数链，以下不作区别，统称群链．一般地考虑一个群链

$$G_1\supset G_2\supset\cdots\supset G_\ell\supset\cdots\supset G_\nu\ , \tag{5.381}$$

共有 ν 个群．若系统是 G_1 对称的，哈密顿量 $\hat{H}$ 应与 G_1 李代数的所有元素对易，因此应由 G_1 的卡西米尔算符组成．设 G_1 有 f_1 个卡西米尔算符 $C_{1\,1}, C_{2\,1},\cdots,C_{f_1\,1}$，哈密顿量可取为

$$\hat{H}=\sum_{i=1}^{f_1}\alpha_{i\,1}C_{i\,1}\ ,$$

其中 $\alpha_{i\,1}$ 为常数．如果 G_1 对称破缺，但仍有 G_2 对称，则哈密顿量可含 G_2 李代数的卡西米尔算符．设这种算符共有 f_2 个：$C_{12}, C_{22}, \cdots, C_{f_2 2}$，哈密顿量可取为

$$\hat{H}=\sum_{i=1}^{f_1}\alpha_{i1}C_{i1}+\sum_{i=1}^{f_2}\alpha_{i2}C_{i2}\ ,$$

α_{i2} 也是常数．依此类推，如果对称性一直破缺到 G_ν，即最后只剩下 G_ν 对称，系统的哈密顿量可取为

$$\hat{H}=\sum_{\ell=1}^{\nu}\sum_{i=1}^{f_\ell}\alpha_{i\ell}C_{i\ell}\ , \tag{5.382}$$

其中 $C_{i\ell}$ 为 G_ℓ 李代数 f_ℓ 个卡西米尔算符的第 i 个，$\alpha_{i\ell}$ 为常数．按这种方式，每一群链对应一种哈密顿量，因而对应一种能谱．常数 $\alpha_{i\ell}$ 可作为模型参数调节，使理论计算的能谱与实验一致．IBM 的生命力在于，确实有一些简单群链给出与实验相符甚好的核能谱．IBM 通常考虑两种玻色子，一种是角动量为零的 s 玻色子，它的产生算符和消灭算符就记作 $\hat{s}^\dagger$ 和 $\hat{s}$；另一种是角动量为 2 的 d 玻色子，它的产生算符和消灭算符就记作 $\hat{d}_\mu^\dagger$ 和 $\hat{d}_\mu$，$\mu=-2,-1,0,1,2$ 为角动量在极轴上的投影量子数．这里总共有六个单玻色子态，其中一个 s 态，五个 d 态．如果这六个单玻色子态具有完全等同的地位，系统将具有 U(6) 对称．六个单玻色子态的地位自然不会完全等同，这就导致 U(6) 对称的破缺．由于原子核处在各向同性的环境中，必有三维空间中的转动对称．转动群必为它的对称群．三维空间中的转动群就是 SO(3) 群，可见原子核的哈密顿量至少有 SO(3) 对称．它的群链可起自 U(6)，终于 SO(3)．从 U(6) 到 SO(3) 可有许多不同群链．其中三个群链的能谱在实验核谱中有很好的对应．它们是

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Ⅰ U(5) 极限:} & U(6)\supset U(5)\supset SO(5)\supset SO(3)\ , \\ \text{Ⅱ SO(6) 极限:} & U(6)\supset SO(6)\supset SO(5)\supset SO(3)\ , \\ \text{Ⅲ SU(3) 极限:} & U(6)\supset SU(3)\supset SO(3)\ . \end{array}\right\} \tag{5.383}$$

以 SU(3) 极限为例，哈密顿量可表为

$$\hat{H}=\alpha_1 C_{1\,SU(3)}+\alpha_2 C_{SO(3)}\ , \tag{5.384}$$

其中 $C_{1\,SU(3)}$ 为 SU(3) 李代数的一个卡西米尔算符，对 (λ,μ) 不可约表示可按 (5.370) 取值．$C_{SO(3)}$ 为 SO(3) 李代数的卡西米尔算符，对 $2L+1$ 重态不可约表示取值 $L(L+1)$，L 为非负整数．对给定数目的满壳层外核子可算出玻色子数．将这些玻色子组成 U(6) 李代数全对称表示的基底．将这个表示约化到 SU(3) 的每一不可约表示．再将得到的 SU(3) 不可约表示约化到 SO(3) 的每一不可约表示．算出这些不可约表示的卡西米尔算符值，代入 (5.384) 右边．调节常数 α_1 和 α_2，对有些核确实可以得到与实验符合很好的能谱．图 5-9 给出了 ${}^{156}_{64}Gd_{92}$ 的 SU(3) 极限 IBM 能谱及其与实验谱的比较．理论谱的计算中取常数 $\alpha_1=-57\,keV$，$\alpha_2=13.4\,keV$．可以看出，理论与实验相符

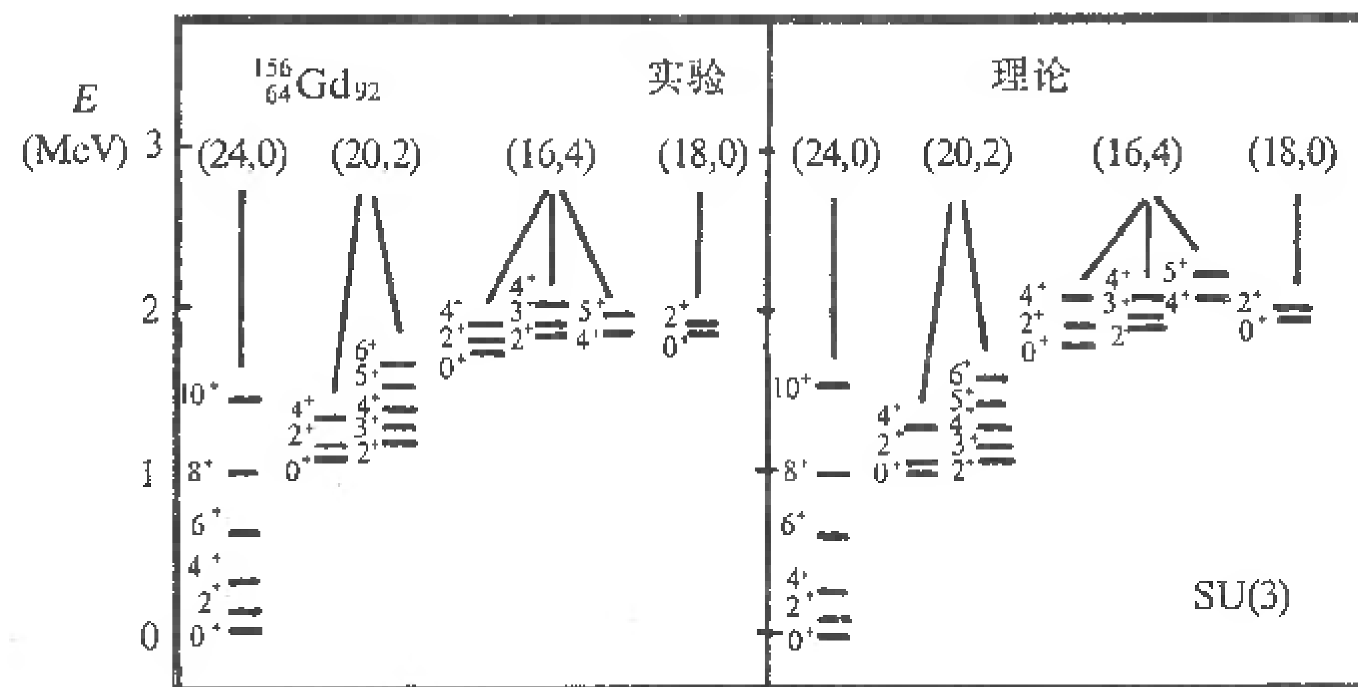


图 5-9 $^{156}_{64}Gd$ 的能谱属 SU(3) 极限

甚好.

近年代数理论又有许多发展,例如将费米子加进来,甚至重新建立在中子-质子壳模型理论的基础上. 影响较大的有费米子动力学对称模型,按英文字头简称 FDSM(Wu 1986, 1987). 核的几何性质也重新受到重视,人们用代数方法讨论核形变. 最近,为了解释超形变,即有些核的形变可达 $\beta=0.6$,为通常形变的 2 倍,又提出了超费米子动力学对称模型,按英文字头简记为SFDSM.这个模型同时考虑几个大壳中的中子与质子的相互作用(Wu 1993). 对于这些正在发展的理论模型,可从当前杂志中直接了解.

第 6 章 作为强子系的原子核与核内介子自由度

6.1 点强子的量子动力学与核物质的定域强子场论

原子核和其它微观系统一样,由好量子数表征. 好量子数即守恒量的量子数. 而守恒性则取决于系统的对称. 时间和空间的平移对称导致能量和动量守恒. 原子核有一定的能量 E 和动量 P,因此有一定的质量 M,它们之间有关系

$$E^2=P^2c^2+M^2c^4\ , \tag{6.1}$$

c为光速. 空间转动对称性,即各向同性,导致角动量守恒. 原子核可具有一定角动量,这当然只是角动量平方和它的一个投影. 原子核在质心系,即 $P=0$ 的坐标系里的角动量$\hat{I}$为它的自旋. $\hat{I}^2$的量子数 I为核自旋值. 原子核是一个强作用系统,弱作用发生影响的几率甚小. 在忽略这种影响的条件下有空间反演对称,因而有一定宇称Π. 除了这些几何对称外还有动力学对称. 例如,拉格朗日量密度总是重子场 $\Psi(r,t)$ 的二次型 $\Psi^{\dagger}\hat{O}\Psi$,$\hat{O}$ 为作用在重子场函数上的算符,在所有重子场上乘以相同的相因子 $e^{i\delta}$ 不改变拉氏量密度. 这称为理论的U(1) 对称,它导致重子数守恒. 重子数守恒至今被严格遵守. 值得注意的是,即使在强作用理论中核子数也不守恒. 核子可与 π 介子作用转化为 Δ 共振,也可与 $\overline{K}$ 介子作用转化为 Λ^0 或 Σ 超子. 介子是玻色子,数目更是不守恒. 不过一般认为核子转化为其他重子以及介子的产生和消灭过程涉及数百 MeV 的能量变化,在核内,特别对低能核现象是不重要的. 下面会看到,这也不尽然. 介子自由度或者还有核子以外的重子自由度在核内,乃至在低

能核现象中，可能也是重要的．更多自由度的出现可能反而降低系统的能量．

从第2章知，两个自由的核子会自动交换介子而相互作用，这就是核力．核子之间介子的出现并未增加二核子系统的能量．相反，在三偶态中两核子会因此降低能量，束缚成氘核．在这里，介子由于与两核子的作用并不携带当它自由时所具有的数百 MeV 能量．它是以虚粒子的形式，穿透两核子间自由空间这一势垒来完成使命的．在核内，核子密集，两核子间交换的介子不会不受其它核子以及其它核子间交换的介子的影响．这一点特别由于它们之间的强作用而不可忽略．它使核内核子间相互作用不可能是二核子核力的简单和．介子在核内的影响应不同于对两个自由核子的影响，更不同于对单个自由核子质量重整化的影响．这就是核内介子自由度．

这里面临的是一个复杂的问题，需要一个理论来处理它．自然的选择是相对论定域强子场论．这是一个已较好发展了的理论，考虑了相对论、量子论和各种对称性．唯一的缺点是没有考虑核子或一般强子内部的夸克结构．这种结构的一个外部效应是强子的有限体积．而在定域场论中场量都是时空点的函数，相互作用也在一个时空点上．即它是点粒子的理论．无论如何，比起二体核力作用下的非相对论多核子量子论来，这个理论更基本，更实际，更适合作核理论的基础．至于强子的有限体积效应，可在理论的发展中加进来．

先考虑由核子、标量介子和矢量介子组成的系统．其中标量介子提供核子间吸引，矢量介子提供核子间排斥．两种作用与核子动能的平衡导致核子间的适当束缚．暂不考虑π介子是因为π介子场只在特殊条件下才不为零．在真空中和常态核物质中π介子只能以虚粒子的形式出现，属量子修正，而π介子场的平均值为零．若π介子场平均值不为零则称发生了π凝聚．π凝聚的可能性和条件将在6.4节中讨论．用$\Psi(r,t)$表核子场；$\Phi(r,t)$表标量介子场；$\Phi_\mu(r,t),\mu=1,2,3,4,$

表ω介子场；$\Phi_\mu^{(K)}(r,t),\mu=1,2,3,4,K=1,2,3,$表ρ介子场．由这些场组成的系统，拉格朗日量密度为

$$\mathscr{L}=-\overline{\Psi}\left[\gamma_\mu(\partial_\mu-\mathrm{i}g_\omega\Phi_\mu-\mathrm{i}g_\rho\sum_{K=1}^{3}\tau_K\Phi_\mu^{(K)})+m-g\Phi\right]\Psi$$
$$-\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\sum_{K=1}^{3}F_{\mu\nu}^{(K)}F_{\mu\nu}^{(K)}\right)-\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\Phi\partial_\mu\Phi+m_\omega^2\Phi_\mu\Phi_\mu\right.$$
$$\left.+m_\rho^2\sum_{K=1}^{3}\Phi_\mu^{(K)}\Phi_\mu^{(K)}\right)-U(\Phi)\ . \qquad (6.2)$$

其中$\partial_\mu\equiv\frac{\partial}{\partial x_\mu}$，$\tau_K$为同位旋泡利矩阵，$m,m_\omega$和$m_\rho$分别为核子，ω介子和ρ介子质量，$g,g_\omega$和$g_\rho$分别为核子与标量介子、ω介子和ρ介子的耦合常数，$U(\Phi)$为标量介子场的势能密度，

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu\Phi_\nu-\partial_\nu\Phi_\mu\quad,\quad F_{\mu\nu}^{(K)}=\partial_\mu\Phi_\nu^{(K)}-\partial_\nu\Phi_\mu^{(K)}\ , \qquad (6.3)$$

且再次采用了$c=\hbar=1$的自然单位制和爱因斯坦求和约定．将作用量

$$\mathscr{A}=\int\mathscr{L}\mathrm{d}^4x \qquad (6.4)$$

对$\Phi_4=\mathrm{i}\Phi_0$和$\Phi_4^{(K)}=\mathrm{i}\Phi_0^{(K)}$的变更取极值得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=-m_\omega^2\Phi_0+g_\omega n\ ,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{E}^{(K)}=-m_\rho^2\Phi_0^{(K)}+g_\rho n^{(K)}, \qquad (6.5)$$

其中

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi_0-\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial t}\quad 和\quad \boldsymbol{E}^{(K)}=-\nabla\Phi_0^{(K)}-\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}^{(K)}}{\partial t} \qquad (6.6)$$

分别为ω和ρ‘电场强度’，而

$$n=\Psi^\dagger\Psi\quad 和\quad n^{(K)}=\Psi^\dagger\tau_K\Psi \qquad (6.7)$$

分别为核子数密度和核子同位旋第K分量密度[①]．拉格朗日量密度

① 此处直接称τ_K为同位旋第K分量，实际是通常同位旋的二倍．

(6.2)中不含 $\frac{\partial \Phi_0}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial \Phi_0^{(K)}}{\partial t}$，因此 Φ_0 和 $\Phi_0^{(K)}$ 都不是正则变量．另一方面，将(6.6)代入(6.5)得

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2\Phi_0 - m_\omega^2\Phi_0 &= -\frac{\partial \nabla\cdot\boldsymbol{\Phi}}{\partial t} - g_\omega n, \\ \nabla^2\Phi_0^{(K)} - m_\rho^2\Phi_0^{(K)} &= -\frac{\partial \nabla\cdot\boldsymbol{\Phi}^{(K)}}{\partial t} - g_\rho n^{(K)}. \end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

解出这两个方程，可将 $\Phi_0(\boldsymbol{r},t)$ 和 $\Phi_0^{(K)}(\boldsymbol{r},t)$ 分别用 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r},t)$,$n(\boldsymbol{r},t)$ 和 $\boldsymbol{\Phi}^{(K)}(\boldsymbol{r},t)$、$n^{(K)}(\boldsymbol{r},t)$ 表出，从而将它们从拉格朗日量中消去．这样整理以后的拉格朗日量就只含正则变量 $\Psi(\boldsymbol{r},t)$,$\Phi(\boldsymbol{r},t)$,$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r},t)$ 和 $\boldsymbol{\Phi}^{(K)}(\boldsymbol{r},t)$．用上方的圆点表示对时间的偏微商，与这四个广义坐标正则共轭的广义动量分别为

$$\Pi_\Psi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\Psi}} = \mathrm{i}\Psi^\dagger, \tag{6.9}$$

$$\Pi_\Phi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\Phi}} = \dot{\Phi}, \tag{6.10}$$

$$\boldsymbol{\Pi}_{\boldsymbol{\Phi}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{\Phi}}} = -\boldsymbol{E}, \tag{6.11}$$

$$\boldsymbol{\Pi}_{\boldsymbol{\Phi}^{(K)}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(K)}} = -\boldsymbol{E}^{(K)}. \tag{6.12}$$

哈密顿量为

$$H = \int \mathscr{H} \mathrm{d}\tau, \tag{6.13}$$

其中的哈密顿量密度为

$$\begin{aligned} \mathscr{H} &= \Pi_\Psi\dot{\Psi} + \Pi_\Phi\dot{\Phi} + \boldsymbol{\Pi}_{\boldsymbol{\Phi}}\cdot\dot{\boldsymbol{\Phi}} + \sum_{K=1}^{3}\boldsymbol{\Pi}_{\boldsymbol{\Phi}^{(K)}}\cdot\dot{\boldsymbol{\Phi}}^{(K)} - \mathscr{L} \\ &= \Psi^\dagger\left[\boldsymbol{\alpha}\cdot(-\mathrm{i}\nabla) + (m - g\Phi)\beta\right]\Psi + \frac{1}{2}\left[\dot{\Phi}^2 + (\nabla\Phi)^2\right] + U(\Phi) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2 + m_\omega^2\boldsymbol{\Phi}^2 + \frac{1}{m_\omega^2}(\nabla\cdot\boldsymbol{E} - g_\omega n)^2\right] - g_\omega\boldsymbol{\Phi}\cdot\boldsymbol{j} \\ &\quad + \sum_{K=1}^{3}\left\{\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}^{(K)2} + \boldsymbol{B}^{(K)2} + m_\rho^2\boldsymbol{\Phi}^{(K)2} + \frac{1}{m_\rho^2}(\nabla\cdot\boldsymbol{E}^{(K)} - g_\rho n^{(K)})^2\right] - g_\rho\boldsymbol{\Phi}^{(K)}\cdot\boldsymbol{j}^{(K)}\right\} \end{aligned} \tag{6.14}$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{\Phi} \quad 和 \quad \boldsymbol{B}^{(K)} = \nabla\times\boldsymbol{\Phi}^{(K)} \tag{6.15}$$

为 ω 和 ρ ‘磁感应强度’，

$$\boldsymbol{j} = \Psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\Psi \quad 和 \quad \boldsymbol{j}^{(K)} = \Psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\tau_K\Psi \tag{6.16}$$

为核子流密度和核子同位旋第 K 分量流密度．按 4.1 节的方式将核子场量子化．这使 Ψ, $\Psi^\dagger$ 都成为算符，且使核子总数 $N = \int n\mathrm{d}\tau$ 成为整数．至于介子场 Φ, $\boldsymbol{\Phi}$ 和 $\boldsymbol{\Phi}^{(K)}$ 仍用经典方式描述．这种理论称为相对论平均场理论，按英文字头简称 RMF 理论．

称中子和质子按固定比例在无限大空间中均匀分布，在强作用下达到平衡的系统为核物质．既然空间分布均匀，必是各向同性，所有三维矢量必为零，各量对空间坐标的微商也必为零．既已达平衡，各量不再变化，对时间的微商也必为零．设哈密顿量密度(6.14)包括了全部强作用，从其中去掉这些为零的项，在核子数密度 n 固定，又由于有一定中子－质子数比从而同位旋第三分量密度 $n^{(3)}$ 也固定的情况下取能量密度的极小值得

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 + U(\Phi) + \frac{1}{2}\left(\frac{g_\omega^2 m^2}{m_\omega^2}n^2 + \frac{g_\rho^2 m^2}{m_\rho^2}n^{(3)2}\right), \tag{6.17}$$

其中 $\mathscr{E}_1$ 为单位体积内核子能量的和，

$$n = n_\mathrm{p} + n_\mathrm{n}, \quad n^{(3)} = n_\mathrm{p} - n_\mathrm{n} = -In, \tag{6.18}$$

n_p 和 n_n 分别为质子数密度和中子数密度，

$$I = \frac{n_\mathrm{n} - n_\mathrm{p}}{n} \tag{6.19}$$

为不对称参数．这里，进一步将长度单位取为核子的康普顿波长 $\frac{\hbar}{mc}$，能量单位相应地取为自由核子的静止能量 mc^2．从(6.2)和(6.14)可

以看出，标量场直接与核子质量相加减，这是因为它们在洛伦兹变换下有相同的变换性质，即同是不变量．在标量场 Φ 中核子质量从 m 变为

$$m'=m-g\Phi=m\chi \ , \tag{6.20}$$

其中

$$\chi=\frac{m'}{m}=1-\frac{g\Phi}{m} \tag{6.21}$$

为标量场中核子以自由核子质量 m 为单位的有效质量．一个动量为 $\boldsymbol{p}$ 的核子能量为

$$\text{经} \quad \varepsilon(p)=\sqrt{p^2+\chi^2} \ . \tag{6.22}$$

标量场值 Φ 可由令核物质能量密度 $\mathscr{E}$ 在 n 和 $n^{(3)}$ 固定的情况下取极小来确定．为了计算核子系的能量密度 $\mathscr{E}_1$，还需知道核子的动量分布，或者一般地说，需知核子在各单核子能级间的分布．用 $l(\bar{l})$ 表示核子(反核子)的能级，$\omega_l(\omega_{\bar{l}})$ 表这个能级中的单粒子态数，$\varepsilon_l(\varepsilon_{\bar{l}})$ 表这个能级的能量，$a_{bl}(a_{b\bar{l}})$ 表实际分布在这个能级中的 b 种核子(反核子)数．b=p 表质子，b=n 表中子．核子在这些能级间分布的方式数为

$$W=\prod_{b=n,p}\left[\prod_l \frac{\omega_l!}{a_{bl}!(\omega_l-a_{bl})!}\prod_{\bar{l}}\frac{\omega_{\bar{l}}!}{a_{b\bar{l}}!\,(\omega_{\bar{l}}-a_{b\bar{l}})!}\right] \ . \tag{6.23}$$

用关于大数的斯特令(Stirling)公式[①]得

$$\ln W=\sum_{b=n,p}\left\{\sum_l\left[\omega_l\ln\omega_l-a_{bl}\ln a_{bl}-(\omega_l-a_{bl})\ln(\omega_l-a_{bl})\right]\right.$$
$$\left.+\sum_{\bar{l}}\left[\omega_{\bar{l}}\ln\omega_{\bar{l}}-a_{b\bar{l}}\ln a_{b\bar{l}}-(\omega_{\bar{l}}-a_{b\bar{l}})\ln(\omega_{\bar{l}}-a_{b\bar{l}})\right]\right\} \ . \tag{6.24}$$

设这个强子系统占体积 V，总能量为

① 参阅郭敦仁，《数学物理方法》，§9.6，高等教育出版社，1991．

$$E=\sum_{b=n,p}\left(\sum_l a_{bl}\varepsilon_l+\sum_{\bar{l}}a_{b\bar{l}}\varepsilon_{\bar{l}}\right)+V\left(U(\Phi)+\frac{1}{2}\frac{g_\omega^2m^2}{m_\omega^2}n^2\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\frac{g_\rho^2m^2}{m_\rho^2}n^{(3)^2}\right) \ . \tag{6.25}$$

由于每个反粒子的粒子数为 -1，总中子数为

$$N_n=n_nV=\sum_l a_{nl}-\sum_{\bar{l}}a_{n\bar{l}} \ , \tag{6.26}$$

总质子数为

$$N_p=n_pV=\sum_l a_{pl}-\sum_{\bar{l}}a_{p\bar{l}} \ , \tag{6.27}$$

总核子数为

$$N=N_n+N_p=\sum_{b=n,p}\left(\sum_l a_{bl}-\sum_{\bar{l}}a_{b\bar{l}}\right) \ . \tag{6.28}$$

核子总同位旋第三分量为

$$N^{(3)}=n^{(3)}V=N_p-N_n \ . \tag{6.29}$$

由拉格朗日量(6.2)定义的强子系统，能量、核子数和同位旋都守恒．在消去矢量场的情况下，强子系的同位旋就是核子系的同位旋．因此，由(6.25)－(6.29)定义的 E,N 和 $N^{(3)}$ 均守恒．换句话说，E, N_n 和 N_p 为守恒量．固定这些守恒量的值，调整 a_{bl} 和 $a_{b\bar{l}}$ 使 $\ln W$ 取极大值．这样得到的分布称最可几分布．统计物理的最大几率法假设，热平衡条件下粒子的分布为最可几分布，它满足变分原理

$$\delta\ln W+\beta\sum_{b=n,p}\mu_b\delta N_b-\beta\delta E=0 \ , \tag{6.30}$$

β 与 μ_b 为拉格朗日乘子．如果 ω_l 和 $\omega_{\bar{l}}$ 与粒子的分布无关，由(6.24)～(6.27)和(6.30)可解得

$$\left.\begin{aligned} a_{bl}&=\frac{\omega_l}{1+\exp\left[-\beta(\mu_b-\nu_b-\varepsilon_l)\right]} \ , \\ a_{b\bar{l}}&=\frac{\omega_{\bar{l}}}{1+\exp\left[\beta(\mu_b-\nu_b+\varepsilon_{\bar{l}})\right]} \ , \end{aligned}\right\} \tag{6.31}$$

其中

$$v_n = \frac{g_\omega^2 m^2}{m_\omega^2} n - \frac{g_\rho^2 m^2}{m_\rho^2} n^{(3)}, \quad v_p = \frac{g_\omega^2 m^2}{m_\omega^2} n + \frac{g_\rho^2 m^2}{m_\rho^2} n^{(3)} \quad . \tag{6.32}$$

(6.31)为准费米分布，只是用有效化学势 $\mu_b - v_b$ 代替了化学势 μ_b。这是由于能量(6.25)末两项中的密度关联，它们是矢量场时间分量引起的．无限大均匀核物质有平移对称，其中的单核子态可有一定动量 $\boldsymbol{p}$ 和相应能量(6.22)．如果核子是点粒子，在体积 V 和动量元 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}$ 中每种核子的态数为 $\frac{2}{(2\pi)^3} V\mathrm{d}\boldsymbol{p}$，相当于(6.23)和(6.24)中的 ω_l 和 $\omega_{\bar{l}}$．它们与核子分布无关，因此(6.31)适用于点核子.

定义熵

$$S = k_B \ln W \ , \tag{6.33}$$

k_B 为玻尔兹曼常数．(6.30)使由核子分布变更引起的 E, N_b 和 S 的变化满足关系

$$\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S + \sum_{b=n,p} \mu_b \mathrm{d}N_b \ , \tag{6.34}$$

其中 $T = \frac{1}{k_B \beta}$ 为绝对温度．再由压力的定义

$$\mathscr{P} = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{S,N_n,N_p} \tag{6.35}$$

得熟知的热力学关系

$$\mathrm{d}E = -\mathscr{P}\mathrm{d}V + T\mathrm{d}S + \sum_{b=n,p} \mu_b \mathrm{d}N_b \ . \tag{6.36}$$

可见这一理论是与热力学一致的，这种一致性植根于它的出发点，即变分原理(6.30)．定义熵密度

$$s = \frac{S}{V} \ , \tag{6.37}$$

由(6.36)知

$$\left.\begin{aligned} T &= \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N_n,N_p} = \left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial s}\right)_{n_n,n_p} \ , \\ \mu_b &= \left(\frac{\partial E}{\partial N_b}\right)_{V,S,N_{b'}} = \left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial n_b}\right)_{s,n_{b'}} \ , \end{aligned}\right\} \tag{6.38}$$

若 b=n 则 b′=p，若 b=p 则 b′=n.注意 $E = V\mathscr{E}$，而 $\mathscr{E}$ 为 s, n_n 和 n_p 的函数，由(6.35)和(6.38)得

$$\mathscr{P} = -V\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial V}\right)_{S,N_n,N_p} - \mathscr{E} = Ts + \sum_{b=n,p} \mu_b n_b - \mathscr{E} \ , \tag{6.39}$$

或

$$\mathscr{P}V = TS + \sum_{b=n,p} \mu_b N_b - E \ . \tag{6.40}$$

将(6.17)代入(6.39)，可将压力分解为

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}_1 + \mathscr{P}_f \ , \tag{6.41}$$

其中

$$\mathscr{P}_1 = \sum_{b=n,p} (\mu_b - v_b) n_b + Ts - \mathscr{E}_1 \tag{6.42}$$

为核子压力，而

$$\mathscr{P}_f = -U(\Phi) + \frac{1}{2}\left(\frac{g_\omega^2 m^2}{m_\omega^2} n^2 + \frac{g_\rho^2 m^2}{m_\rho^2} n^{(3)^2}\right) \tag{6.43}$$

为标量和矢量介子场的压力．还可进一步将各量分解．用下标b+表示 b 类核子的量，b−表示 b 类反核子的量，于是有

$$n_b = n_{b+} - n_{b-}, \quad s = \sum_{b=n,p} (s_{b+} + s_{b-}), \quad \mathscr{E}_1 = \sum_{b=n,p} (\mathscr{E}_{1b+} + \mathscr{E}_{1b-}), \tag{6.44}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{P}_{1b+} &= (\mu_b - v_b) n_{b+} + Ts_{b+} - \mathscr{E}_{1b+} \ , \\ \mathscr{P}_{1b-} &= -(\mu_b - v_b) n_{b-} + Ts_{b-} - \mathscr{E}_{1b-} \ . \end{aligned}\right\} \tag{6.45}$$

引进函数

$$\begin{aligned} \zeta(\beta,\mu) &\equiv \sum_l \omega_l \ln\left\{1 + \exp\left[\beta(\mu - \varepsilon_l)\right]\right\} \\ &= \sum_{\bar{l}} \omega_{\bar{l}} \ln\left\{1 + \exp\left[\beta(\mu - \varepsilon_{\bar{l}})\right]\right\} \ , \end{aligned} \tag{6.46}$$

由(6.45)和(6.31)得

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{P}_{1b+}&=\zeta(\beta,\mu_b-\nu_b)/(\beta V)\ ,\\ \mathscr{P}_{1b-}&=\zeta(\beta,\nu_b-\mu_b)/(\beta V)\ .\end{aligned}\right\}\tag{6.47}$$

按相对论热力学(Pauli 1958)，物体的能量 E 和动量 $\boldsymbol{P}$ 组成四矢量，熵 S 和压力 $\mathscr{P}$ 为标量，各类核子数 N_b 也是标量．运动物体中的热力学关系可由(6.36)经洛伦兹变换得到：

$$\mathrm{d}E=-\mathscr{P}\mathrm{d}V+T\mathrm{d}S+\sum_{b=n,p}\mu_b\mathrm{d}N_b+\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{P}\ ,\tag{6.48}$$

$\boldsymbol{v}$ 为运动物体的速度，

$$T=T_0\sqrt{1-v^2}\ ,\quad \mu_b=\mu_{b0}\sqrt{1-v^2}\ ,\tag{6.49}$$

T_0 和 μ_{b0} 为静止坐标系中的 T 和 μ_b.如果(6.23)或(6.24)定义的 W 在洛伦兹变换下是标量，(6.48)就可由变分原理(6.30)经洛伦兹变换后导出．在 W 的表达式(6.23)中 a_{bl} 和 $a_{b\bar{l}}$ 是粒子数，因此在洛伦兹变换下自然不变．只要 ω_l 和 $\omega_{\bar{l}}$ 也不变，W 在洛伦兹变换下就不会变．在体积 V 和动量区域 $\mathrm{D}\boldsymbol{P}$ 中一定种类的点核子态数为 $\frac{2}{(2\pi)^3}V\mathrm{D}p$. 洛伦兹收缩使 V 变为 $V\sqrt{1-v^2}$，同时动量元 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}$ 变为 $(1+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p}_0/\varepsilon_0)\times\mathrm{d}\boldsymbol{p}\sqrt{1-v^2}$，其中 $\boldsymbol{p}_0$ 和 ε_0 为核物质的静止坐标系中核子的动量和能量．固定 ε_0，将不同方向 $\boldsymbol{p}_0$ 的贡献加起来，所得相空间体积 $V\mathrm{D}\boldsymbol{p}$ 在洛伦兹变换下是不变的，相应的核子态数也就是不变的．因此点粒子的 W 和由(6.33)定义的熵在洛伦兹变换下不变．可见对于点粒子，由变分原理(6.30)出发的统计理论不仅与热力学一致，而且与相对论相容．只要动力学是相对论的，由它建立的统计理论及其导出的热力学也是相对论的．

基态核物质 $T=0,\beta=\infty$，由(6.31)知，b类核子能填充单核子态的条件是 $\varepsilon_{fb}\equiv\mu_b-\nu_b>\chi$，$\varepsilon_{fb}$ 称为b类核子的费米能量．在此条件下，b类核子按泡利原理从最低能量 χ 依次向上填充能量不高于 ε_{fb} 的能级．与此同时，所有b类反核子能级必定空着．由

$$\varepsilon_{fb}=\sqrt{\eta_b^2+\chi^2}\tag{6.50}$$

可定义b类核子的费米动量 η_b. b类核子数密度为

$$n_b=\frac{2}{(2\pi)^3}\int_b^{\eta_b}p^2\mathrm{d}p\int_{4\pi}\mathrm{d}\Omega=\frac{\eta_b^3}{3\pi^2}\ ,\tag{6.51}$$

b类核子的能量密度为

$$\mathscr{E}_{1b}=\frac{2}{(2\pi)^3}\int_b^{\eta_b}p^2\sqrt{p^2+\chi^2}\,\mathrm{d}p4\pi=\frac{1}{4\pi^2}\left\{\eta_b\left(\eta_b^2+\frac{1}{2}\chi^2\right)\sqrt{\eta_b^2+\chi^2}-\frac{\chi^4}{2}\ln\left(\frac{\eta_b}{\chi}+\sqrt{1+\frac{\eta_b^2}{\chi^2}}\right)\right\}\ ,\tag{6.52}$$

每b核子平均能量为

$$\varepsilon_{1b}=\frac{\mathscr{E}_{1b}}{n_b}=\frac{3}{4}\chi\left\{\left(1+\frac{1}{2}\frac{\chi^2}{\eta_b^2}\right)\sqrt{1+\frac{\eta_b^2}{\chi^2}}-\frac{\chi^3}{2\eta_b^3}\ln\left(\frac{\eta_b}{\chi}+\sqrt{1+\frac{\eta_b^2}{\chi^2}}\right)\right\}\tag{6.53}$$

由核子数密度

$$n=n_n+n_p\equiv\frac{2\eta^3}{3\pi^2}\tag{6.54}$$

可定义核子的费米动量 η.将此式与(6.51)联立得

$$\eta=\left[\frac{1}{2}\left(\eta_n^3+\eta_p^3\right)\right]^{1/3}\ ,\tag{6.55}$$

$$\eta_n=(1+I)^{1/3}\eta\ ,\qquad \eta_p=(1-I)^{1/3}\eta\ .\tag{6.56}$$

核子能量密度为

$$\mathscr{E}_1=\mathscr{E}_{1n}+\mathscr{E}_{1p}\ ,\tag{6.57}$$

每核子平均能量为

$$\varepsilon_1=\frac{\mathscr{E}_1}{n}=\frac{1+I}{2}F(\eta_n,\chi)+\frac{1-I}{2}F(\eta_p,\chi)\ ,\tag{6.58}$$

其中

$$F(\eta,\chi)\equiv\frac{3}{4}\left[\left(1+\frac{\chi^2}{2\eta^2}\right)\sqrt{\eta^2+\chi^2}-\frac{\chi^4}{2\eta^3}\ln\left(\frac{\eta}{\chi}+\sqrt{1+\frac{\eta^2}{\chi^2}}\right)\right]\ .\tag{6.59}$$

核物质能量密度仍由(6.17)表示，其中每核子平均能量为

$$\varepsilon = \frac{\mathscr{E}}{n} = \varepsilon_1 + \frac{U(\Phi)}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{g_\omega^2 m^2}{m_\omega^2} + \frac{g_\rho^2 m^2}{m_\rho^2} I^2\right) n \ . \quad (6.60)$$

ε 与 I 和 n 的函数关系称为基态核物质的物态方程．(6.60)表明，它与标量场的势能密度 U 有关．通常将 U 取成 Φ 的四次多项式．由(6.21)又可将它表成 $1-\chi$ 的四次多项式

$$U(\chi) = \frac{1}{3\pi^2\alpha}(1-\chi)^2[1+\alpha_1(1-\chi)+\alpha_2(1-\chi)^2] \ , \quad (6.61)$$

其中

$$\alpha = \frac{2g^2 m^2}{3\pi^2 m_s^2} \ , \quad (6.62)$$

m_s 为标量介子质量．(6.61)中不含 $1-\chi$ 的零次项是因将 Φ 的真空值取成零，亦即将 χ 的真空值取成 1，因为已知真空中核子质量为 m．(6.61)中不含 $1-\chi$ 的一次项则是因真空中 U 应取极小值．为保证真空中 U 取绝对极小，还应要求

$$\alpha_1^2 \leqslant 4\alpha_2 \ . \quad (6.63)$$

(6.60)中，m, m_ω 和 m_ρ 都是已从实验很好确定了的参数，没有调节余地．可调参数包括 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, g_\omega$ 和 g_ρ，且 α_1 和 α_2 间受条件(6.63)限制．对确定的一组这样的参数，(6.60)是 χ, I 和 n 的一个确定函数，其中的 χ 值可由 ε 取极小的条件

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\chi} = 0 \quad (6.64)$$

确定．将如此确定的 χ 代入，即得 ε 与 I 和 n 的确定的函数关系，这就是核物质的物态方程．要求这个物态方程导出的结果与实验观察到的结果一致，可反过来定可调参数 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, g_\omega$ 和 g_ρ．按液滴模型，原子核的结合能可表为

$$B = b_0 A - b_1 I^2 A - b_2 A^{2/3} - b_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \ , \quad (6.65)$$

右边四项分别解释为体结合能、不对称能、表面能和静电库仑能，A 为质量数，Z 为电荷数，$I=(A-2Z)/A$ 为同位旋不对称参数．由于此式表达的 B 是核结合能中减去了壳效应和对效应后剩下的随 A、Z 光滑变化的部分，各家减法和所用数据彼此略有不同，因此，定得的系数也略有差异．本书采用迈尔斯(Myers 1974)定得的一套系数

$$\left.\begin{aligned} &b_0 = 15.986\ \text{MeV}, \quad b_1 = 36.5\ \text{MeV}, \\ &b_2 = 20.76\ \text{MeV}, \quad b_3 = 0.736\ \text{MeV}, \end{aligned}\right\} \quad (6.66)$$

其中 b_3 的值相当于设核内中子质子均匀分布在半径为 $R=r_0A^{1/3}$ 的球内，$r_0=1.175$ fm．本节关于核物质的定域强子场论能轻易地符合这个 r_0 值和 b_0, b_1 的值．亦即能轻易地符合 b_0, b_1 和 b_3．表面能系数 b_2 是关于有限大小的原子核的，只能用有限核的理论去符合．情形似乎很好．不过核物质还有其它数据需要理论说明．其中一个重要数据就是(5.276)表示的核物质压缩模数(5.265)的经验值．定域强子场论符合这个数据有困难．此外，已观察到质量为太阳质量 $1.85^{+0.35}_{-0.30}$ 倍的中子星．因此中子星的质量上限不得低于此值．这也是关于核物态方程正确性的一个判据．已经发现(Glendenning 1988)无法用定域强子场论同时符合核物质压缩模数的经验值(5.276)和关于中子星质量上限的这一要求．量子色动力学(QCD)被认为是强作用理论的基础．通常要求强作用的模型理论与 QCD 的结论一致．QCD 预言，正常真空在高温下会相变为夸克-胶子等离子体，临界温度约 $200\text{MeV}/k_B$．定域强子场论得不出这一预言(Rischke 1991)．可见用定域强子场论作核物质的模型理论有明显问题．从概念上讲，不应完全忽视强子内部的夸克结构，至少不应忽视这种结构的外部表现，即强子不是点粒子，而是有一定体积的扩张结构．可能正是这种忽视使定域强子场论与核物质的实际性质不能吻合．具体的分析(Zhang 1992a, Ma 1993)表明，考虑了核子的有限体积效应后上述那些矛盾都消失．下一节将介绍如何考虑核子的有限体积效应．在这之后再由符合经验数据来确定模型参数．

6.2 有限大小核子的量子动力学与相对论核物质模型

核子体积的概念可以追朔至50年代在质子-质子散射中发现的排斥心．它可理解为核子的不可穿透的体积．在发现强子的夸克结构后，强子有体积成为自然而然的事．夸克-胶子运动向外的压力与正常真空向内的压力相平衡，决定强子的大小．当然，强子体积并不一定是排它的，即不排除强子体积重叠的可能性．但一般认为其中的费米子，即重子的体积间是彼此排斥的．这就回到了排斥心的概念．这里讲的有限体积并不是指强子体积的全部，而只指重子体积中互相排斥的部分．确切地说就是其中互相不能穿透的排斥心．排斥心对粒子运动的影响可用波函数的边条件表示：当两个粒子的距离小于或等于它们的排斥心半径之和时波函数为零．在无穷多粒子的统计理论中，这一效应可表为粒子系可以活动的空间体积减小．设体积 V 中有 N 个粒子，每个粒子有体积 τ，从 V 中扣除粒子占据的体积 $N\tau$ 即得粒子系运动实际可用的空间体积

$$V'=V-N\tau=(1-n\tau)V \ , \tag{6.67}$$

$n=N/V$为粒子的数密度．反粒子是真空的粒子空穴，与粒子是亲和的．粒子与反粒子间没有不可穿透的排斥心．排斥心只存在于粒子间或反粒子间．应分别计算粒子和反粒子运动空间的体积．用 N_+ 和 N_- 分别表粒子和反粒子的数目，n_+ 和 n_- 分别表它们的数密度，粒子和反粒子运动空间的体积分别为

$$V_\pm'=V-N_\pm\tau=(1-n_\pm\tau)V \ . \tag{6.68}$$

每类核子和反核子在体积 V 和动量元 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}$ 中的态数分别是

$$\frac{2}{(2\pi)^3}\ V_\pm'\mathrm{d}\boldsymbol{p}=(1-n_\pm\tau)\frac{2}{(2\pi)^3}\ V\mathrm{d}\boldsymbol{p} \ , \tag{6.69}$$

与点粒子态数相比多一修正因子

$$f(n_\pm)=1-n_\pm\tau \ . \tag{6.70}$$

也可从另一角度看这个问题．设一个粒子在 x 方向占线度 δx，动量间隔 δp_x．在自然单位制中有

$$\delta x\delta p_x\approx 2\pi \ . \tag{6.71}$$

线度 L 和动量间隔 $\mathrm{d}\,p_x$ 中的一维运动态数为 $\frac{L\mathrm{d}p_x}{2\pi}$．而在边长为 L 的立方体内 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}$ 动量元中 $\frac{1}{2}$ 自旋粒子三维运动态数为 $\frac{2}{(2\pi)^3}\ L^3\mathrm{d}\boldsymbol{p}$．如果粒子有线度 a'，则应从 L 中扣除 $N_\pm^{1/3}a'$，剩下的 $L-N_\pm^{1/3}a'$ 才是粒子运动可用的线度．粒子和反粒子三维运动态数分别应修改为

$$\frac{2}{(2\pi)^3}\ (L-N_\pm^{1/3}a')^3\mathrm{d}\boldsymbol{p}=(1-n_\pm^{1/3}a')^3\frac{2}{(2\pi)^3}\ L^3\mathrm{d}\boldsymbol{p} \ . \tag{6.72}$$

可见粒子和反粒子有限体积的效应表现为对各能级单粒子态数的修正．一般地将 ω_l 和 $\omega_{\bar{l}}$ 分别修正为

$$\omega_l'=f(n_+)\omega_l \quad 和 \quad \omega_{\bar{l}}'=f(n_-)\omega_{\bar{l}} \ . \tag{6.73}$$

$f(n_\pm)$ 为粒子或反粒子数密度 $n_\pm$ 的函数，与模型有关．按(6.69)由(6.70)表示，而按(6.72)则为

$$f(n_\pm)=(1-n_\pm^{1/3}a')^3 \ . \tag{6.74}$$

对核子

$$n_\pm=n_{n\pm}+n_{p\pm} \ . \tag{6.75}$$

此处已设各类正反核子大小相同．现在单粒子态数 ω_l' 和单反粒子态数 $\omega_{\bar{l}}'$ 已分别与粒子和反粒子的分布有关．(6.30)的解已不再是(6.31)，而是

$$\left.\begin{aligned} a_{bl}&=\frac{\omega_l'}{1+\exp[-\beta(\mu_b'-\nu_b-\varepsilon_l)]} \ , \\ a_{b\bar{l}}&=\frac{\omega_{\bar{l}}'}{1+\exp[\beta(\overline{\mu}_b'-\nu_b-\varepsilon_{\bar{l}})]} \ , \end{aligned}\right\} \tag{6.76}$$

其中

$$\mu_b'=\mu_b+\frac{1}{\beta}\sum_{bl}\ln\left(\frac{\omega_l'}{\omega_l'-a_{bl}}\right)\frac{\partial\omega_l'}{\partial N_+} \ , \tag{6.77}$$

$$\overline{\mu}_b'=\mu_b-\frac{1}{\beta}\sum_{b\bar{i}}\ln\left(\frac{\omega_{\bar{i}}'}{\omega_{\bar{i}}'-a_{b\bar{i}}}\right)\frac{\partial\omega_{\bar{i}}'}{\partial N_-} \quad . \tag{6.78}$$

(6.76)仍具费米分布的形式．除单粒子态数作了修正(6.73)外就是化学势作了修正(6.77)和(6.78)．由于它仍是变分原理(6.30)的解，由此导出的结果，也必是热力学一致的．上节(6.33)至(6.45)的各式依然成立．比较(6.76)和(6.31)并利用(6.73)得有限大小核子系与点核子系相应量之间的关系

$$\left.\begin{aligned} n_{b+}(T,\mu_b)&=f(n_+)n_{b+}^{(0)}(T,\mu_b')\ ,\\ n_{b-}(T,\mu_b)&=f(n_-)n_{b-}^{(0)}(T,\overline{\mu}_b')\ , \end{aligned}\right\} \tag{6.79}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{E}_{1b+}(T,\mu_b)&=f(n_+)\mathscr{E}_{1b+}^{(0)}(T,\mu_b')\ ,\\ \mathscr{E}_{1b-}(T,\mu_b)&=f(n_-)\mathscr{E}_{1b-}^{(0)}(T,\overline{\mu}_b')\ , \end{aligned}\right\} \tag{6.80}$$

$$\left.\begin{aligned} s_{b+}(T,\mu_b)&=f(n_+)s_{b+}^{(0)}(T,\mu_b')\ ,\\ s_{b-}(T,\mu_b)&=f(n_-)s_{b-}^{(0)}(T,\overline{\mu}_b')\ , \end{aligned}\right\} \tag{6.81}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{P}_{1b+}(T,\mu_b)&=f(n_+)\mathscr{P}_{1b+}^{(0)}(T,\mu_b')+(\mu_b-\mu_b')n_{b+}\ ,\\ \mathscr{P}_{1b-}(T,\mu_b)&=f(n_-)\mathscr{P}_{1b-}^{(0)}(T,\overline{\mu}_b')-(\mu_b-\overline{\mu}_b')n_{b-}\ . \end{aligned}\right\} \tag{6.82}$$

各式左边是有限大小核子组成的系统的量，右边带上标'(0)'的量则属于对应的点核子系统，不过在计算中如出现 v_b 则仍用有限大小核子系的密度经(6.32)算出．将中子与质子的贡献加起来即得核子的压力

$$\mathscr{P}_{1+}(T,\mu_n,\mu_p)=f(n_+)\mathscr{P}_{1+}^{(0)}(T,\mu_n',\mu_p')-\Delta\mu\, n_+(T,\mu_n,\mu_p) \tag{6.83}$$

和反核子压力

$$\mathscr{P}_{1-}(T,\mu_n,\mu_p)=f(n_-)\mathscr{P}_{1-}^{(0)}(T,\overline{\mu}_n',\overline{\mu}_p')+\Delta\overline{\mu}\, n_-(T,\mu_n,\mu_p)\ , \tag{6.84}$$

其中，由于(6.76)—(6.78)和(6.47)，

$$\left.\begin{aligned} \Delta\mu&\equiv\mu_b'-\mu_b=f'(n_+)\mathscr{P}_{1+}^{(0)}(T,\mu_n',\mu_p')\ ,\\ \Delta\overline{\mu}&\equiv\overline{\mu}_b'-\mu_b=-f'(n_-)\mathscr{P}_{1-}^{(0)}(T,\overline{\mu}_n',\overline{\mu}_p')\ , \end{aligned}\right\} \tag{6.85}$$

均与核子种类无关，$f'(n_\pm)=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}n_\pm}$．可见

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{P}_{1+}(T,\mu_n,\mu_p)&=(f(n_+)-n_+f'(n_+))\mathscr{P}_{1+}^{(0)}(T,\mu_n',\mu_p')\ ,\\ \mathscr{P}_{1-}(T,\mu_n,\mu_p)&=(f(n_-)-n_-f'(n_-))\mathscr{P}_{1-}^{(0)}(T,\overline{\mu}_n',\overline{\mu}_p')\ . \end{aligned}\right\} \tag{6.86}$$

如取(6.70)，即得

$$\mathscr{P}_{1+}(T,\mu_n,\mu_p)=\mathscr{P}_{1+}^{(0)}(T,\mu_n',\mu_p'),\quad \mathscr{P}_{1-}(T,\mu_n,\mu_p)=\mathscr{P}_{1-}^{(0)}(T,\overline{\mu}_n',\overline{\mu}_p')\ . \tag{6.87}$$

这与用系综平均法得到的结果(Rischke 1991)一致．不过此处的方法还可用来考虑其他形式的 $f(n)$．例如取(6.74)则有

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{P}_{1+}(T,\mu_n,\mu_p)&=(1-n_+^{1/3}a')^2\mathscr{P}_{1+}^{(0)}(T,\mu_n',\mu_p')\ ,\\ \mathscr{P}_{1-}(T,\mu_n,\mu_p)&=(1-n_-^{1/3}a')^2\mathscr{P}_{1-}^{(0)}(T,\overline{\mu}_n',\overline{\mu}_p')\ . \end{aligned}\right\} \tag{6.88}$$

为确定模型参数须考虑基态核物质，即 $T=0$ 或 $\beta=\infty$ 的情形．由于(6.76)仍具费米分布的形式，$\beta=\infty$时 b 类核子按泡利原理从最低能量 χ 依次向上填充到费米能量 $\varepsilon_{fb}=\mu_b'-v_b$ 处，而所有反核子能级都空着．仍按(6.50)定义 b 类核子的费米动量．b 类核子数密度应由(6.51)修改为

$$n_b=f(n)\frac{\eta_b^2}{3\pi^2}\ , \tag{6.89}$$

而能量密度则应由(6.52)修改为

$$\mathscr{E}_{1b}=\frac{f(n)}{4\pi^2}\left\{\eta_b\left(\eta_b^2+\frac{1}{2}\chi^2\right)\sqrt{\eta_b^2+\chi^2}-\frac{\chi^4}{2}\ln\left(\frac{\eta_b}{\chi}+\sqrt{1+\frac{\eta_b^2}{\chi^2}}\right)\right\}\ . \tag{6.90}$$

它们的比，即每 b 核子平均能量则仍由(6.53)表示．由于反核子数为零，核子数即为核子的数目：$n=n_+, n_b=n_{b+}$．现在按

$$n=n_n+n_p=f(n)\frac{2\eta^3}{3\pi^2} \tag{6.91}$$

定义核子的费米动量 η，它与中子费米动量 η_n 和质子费米动量η_p的关系(6.55)和(6.56)依然成立．由(6.91)可解出 n，从而解出 $f(n)$，将它们用 η 表出．通常将密度表为

$$n=\left(\frac{4\pi}{3}r^3\right)^{-1}\ . \tag{6.92}$$

由此式和(6.91)又可解出核子的费米动量 η 和它占有的平均线度 r 的关系．不过这些关系都和 $f(n)$ 的具体形式有关．如取(6.70)则有

$$n=\frac{2\eta^3}{3\pi^2+2\eta^3\tau}\quad, \tag{6.93}$$

$$f(n)=\frac{3\pi^2}{3\pi^2+2\eta^3\tau}\quad. \tag{6.94}$$

设核子为球形，半径为 a，$\tau=\frac{4\pi}{3}a^3$，由(6.92)与(6.93)联立得

$$\eta=\left(\frac{9\pi}{8}\ \frac{1}{r^3-a^3}\right)^{1/3}. \tag{6.95}$$

如取(6.74)则有

$$n=\frac{2\eta^3}{[(3\pi^2)^{1/3}+2^{1/3}a'\eta]^3}\quad, \tag{6.96}$$

$$f(n)=\frac{3\pi^2}{[(3\pi^2)^{1/3}+2^{1/3}a'\eta]^3}\quad. \tag{6.97}$$

仍设核子是一半径为 a 的球，$a'^3=\frac{4\pi}{3}a^3$. 由(6.92)与(6.96)联立得

$$\eta=\left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3}\frac{1}{r-a}\quad. \tag{6.98}$$

此式曾在李政道等关于反常核态的理论(Lee 1974)中用过. 那时是作为非相对论量子多体计算结果(Huang 1957,Dominicis 1957)的数值模拟(Bohr 1969)被引用的，且有关系 $a=0.8r_c$，r_c为排斥心半径. 现在(6.98)是范德瓦耳斯(Van der Waals)近似的直接结果. 这一近似将粒子的有限体积效应归结为粒子运动空间体积或线度的减小.

采用(6.70). 核物质的模型参数除上节(6.62)定义的 α,(6.61)定义的 α_1 和 α_2，以及(6.2)中定义的 g_ω 和 g_ρ外还有核子的体积 τ 或半径 a. 在(6.63)中取等号限定α_1 和 α_2 的关系后还剩五个参数. 由于无穷大核物质的性质中不含表面能，只能用(6.66)中的每核子体结合能 b_0，不对称能 b_1，与 b_3 对应的平衡条件下每核子占有线度 $r_0=1.175$ fm，压缩模数 $K=240$ MeV，以及核物质中核子的有效质量 $\chi=0.7\sim0.9$ 来定这五个模型参数. 由于 χ 的取值还有一范围，五个

模型参数尚未能唯一地确定. 表6－1中列出了六套参数，它们都能符合上列经验数据. 其中 $\alpha_\omega=\frac{g_\omega^2}{4\pi}$ ，$\alpha_\rho=\frac{g_\rho^2}{4\pi}$.

表6－1　考虑核子有限体积效应的模型参数

编号	α	α_1	α_2	α_ω	α_ρ	a/fm	χ
Ⅰ	12.4	2.0	1.0	3.94	1.83	0.62	0.84
Ⅱ	11.8	2.4	1.44	3.28	1.82	0.66	0.85
Ⅲ	11.3	2.8	1.96	2.78	1.81	0.69	0.87
Ⅳ	10.9	3.2	2.56	2.39	1.80	0.71	0.87
Ⅴ	10.7	3.6	3.24	2.07	1.80	0.72	0.88
Ⅵ	10.4	4.0	4.0	1.80	1.80	0.74	0.89

采用(6.74)，从而有(6.98). 在此情形下跟随李政道的反常核态理论设 $g_\omega=g_\rho=0$，核物质中核子间排斥完全来自排斥心和泡利原理. 模型参数只剩下 α,α_1,α_2 和 a 四个. 让它们是独立的，不在(6.63)中硬取等号. 同样要求符合前面列出的经验数据，定得参数(Zhang 1992)

$$\left.\begin{array}{ll}\alpha=9.76, & \alpha_1=-1.06,\\ \alpha_2=0.285, & a=0.6\text{ fm},\end{array}\right\} \tag{6.99}$$

相应的有效质量算得为 $\chi=0.71$.

采用(6.70)和表6－1中第Ⅰ组参数的模型被用来计算中子星的质量上限(Zhang 1992a)和强子物质与夸克－胶子等离子体间的相变条件(Ma 1993). 算得的中子星质量上限为太阳质量的2.5倍，明显在最重的中子星4U0900－40的观测质量(太阳质量的 $1.85^{+0.35}_{-0.30}$ 倍)之上，因而与天文观察结果无矛盾. 算得的正常真空到夸克－胶子等离子体相变的临界温度在200 MeV/k_B左右，与量子色动力学的结果一致. 这些结果表明，核子的有限体积是核理论应当考虑的一个因素. 不过前面对核子有限体积效应的处理是非相对论的. 由于密度是流密度四矢量的时间分量，$n_\pm$ 从而 $f(n_\pm)$在洛伦兹变换下都不是不变的. 它们经(6.73)修正得到的单粒子态数ω_i'和单反粒子态数

$\omega_{\bar{l}}'$ 不再是洛伦兹变换下的标量. 实际上,前面所设各核子和反核子有相同体积 τ 只在它们的静止坐标系中才是对的. 在一个共同的坐标系中各核子动量不同,因而有不同的洛伦兹收缩,体积也就会不同. 用 τ 表核子的静止体积,当它有动量 $\boldsymbol{p}$ 时体积收缩成 $\frac{\chi}{\sqrt{p^2+\chi^2}}\tau$. 如能级 l 上有 a_l 个粒子,它们占的体积不应是 $a_l\tau$, 而应是 $\frac{\chi}{\varepsilon_l}a_l\tau$. 从体积 V 中减去各核子体积的总和就是核子运动能用的空间体积

$$V_+' = V-\sum_l \frac{\chi}{\varepsilon_l} a_l\tau=(1-\widetilde{n}_+\tau)V \ , \tag{6.100}$$

其中

$$\widetilde{n}_+=\sum_l \frac{\chi}{\varepsilon_l} a_l/V \tag{6.101}$$

为核子系的标量密度. 同理,反核子运动能用的空间体积为

$$V_-' = V-\sum_{\bar{l}} \frac{\chi}{\varepsilon_{\bar{l}}} a_{\bar{l}}\tau=(1-\widetilde{n}_-\tau)V \ , \tag{6.102}$$

而

$$\widetilde{n}_-=\sum_{\bar{l}} \frac{\chi}{\varepsilon_{\bar{l}}} a_{\bar{l}}/V \tag{6.103}$$

为反核子系的标量密度. (6.100) 和 (6.102) 表明单核子态数 ω_l 和单反核子态数 $\omega_{\bar{l}}$ 应分别修正为

$$\omega_l' = f(\widetilde{n}_+)\omega_l \text{ 和 } \omega_{\bar{l}}' = f(\widetilde{n}_-)\omega_{\bar{l}} \ , \tag{6.104}$$

其中

$$f(\widetilde{n}_\pm)=1-\widetilde{n}_\pm\tau \ . \tag{6.105}$$

当然,也可像非相对论理论那样,一般地采用修正 (6.104),而让 $f(\widetilde{n}_\pm)$ 为标量密度 $\widetilde{n}_\pm$ 的适当函数. 可采用 (6.105),也可采用其他函数,例如

$$f(\widetilde{n}_\pm)=(1-\widetilde{n}_\pm^{1/3}a')^3 \ . \tag{6.106}$$

下面将看到,标量密度 $\widetilde{n}_\pm$ 在洛伦兹变换下不变,即是洛伦兹标量. 这也是标量密度这一名称的来历. 它的函数 $f(\widetilde{n}_\pm)$ 自然也在洛伦兹

变换下不变. 注意 (6.105) 中的静止体积 τ 以及 (6.106) 中的静止线度 $a'=\tau^{1/3}$ 都是常数,是不经洛伦兹变换的. 上节已证明,点粒子单粒子态数 ω_l 和 $\omega_{\bar{l}}$ 是洛伦兹标量,因此经 (6.104) 修正得到的有大小的粒子单粒子态数 ω_l' 和 $\omega_{\bar{l}}'$ 也都是洛伦兹标量. 这就能保证由 (6.23) 定义的 W 和由 (6.33) 定义的熵为标量,从而保证相对论热力学的基本关系成立. 可见这样建立的考虑了核子的有限体积的核物质理论是相对论的,且是与热力学一致的.

现在以 $\widetilde{n}_+$ 为例证明标量密度在洛伦兹变换下不变. 在静止坐标系中核物质是均匀各向同性的. 单粒子能量由 (6.22) 表示,能量标号 l 可具体化为粒子的动量大小 p. 设体积 V 中动量在 $\boldsymbol{p}$ 附近 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}$ 范围内的粒子数为 $a(\boldsymbol{p})V\mathrm{d}\boldsymbol{p}$. 由于各向同性 $a(\boldsymbol{p})=a(p)$, 而

$$a_l = Va(p)p^2\mathrm{d}p\int_{4\pi}\mathrm{d}\Omega=4\pi Va(p)p^2\mathrm{d}p \ . \tag{6.107}$$

标量密度 (6.101) 可表为

$$\widetilde{n}_+=\int\frac{\chi}{\sqrt{p^2+\chi^2}}\ a(\boldsymbol{p})\mathrm{d}\boldsymbol{p} \ . \tag{6.108}$$

一般惯性系中的理论形式可由静止坐标系中的形式经洛伦兹变换得到. 用 $(\boldsymbol{p},p_4=\mathrm{i}\varepsilon)$ 表粒子在一般惯性系中的四动量矢量,$\varepsilon=\sqrt{p^2+\chi^2}$;用下标'0'表示静止坐标系中的相应量. 按洛伦兹变换

$$\varepsilon_0=\frac{\varepsilon-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p}}{\sqrt{1-v^2}}=-p_\mu U_\mu \ , \tag{6.109}$$

这里用了爱因斯坦求和约定,$U_\mu, \mu=1,2,3,4$为核物质的速度四矢量:

$$\boldsymbol{U}=\frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2}} \ , \quad U_4=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{1-v^2}} \ . \tag{6.110}$$

前面已证明对一定 ε_0, 相空间体积 $V\mathrm{d}\boldsymbol{p}$ 在洛伦兹变换中是不变的. 粒子数 a_l 在这个变换中自然是不变的,因此 $a(\boldsymbol{p})$ 作为 ε_0 的函数也应在这种变换中不变,即它应是不变量 $p_\mu U_\mu$ 的确定函数。(6.108) 可表为

$$\tilde{n}_+=\int \frac{\chi}{\sqrt{p^2+\chi^2}}\ a(p_\mu)\mathrm{d}\boldsymbol{p}$$

$$=\frac{\chi}{2}\int a(p_\mu)\delta(p_\mu p_\mu+\chi^2)\theta(p_0)\mathrm{d}^4p\ , \tag{6.111}$$

其中 $p_0=-\mathrm{i}p_4$,$d^4p=\mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathrm{d}p_0$,

$$\theta(p_0)\equiv\begin{cases}1\ , & 若\ p_0>0\ ;\\ 0\ , & 否则\end{cases} \tag{6.112}$$

为阶跃函数,积分对四动量的无穷区间进行．由于(6.111)中各因子都是洛伦兹变换下的不变量,它所表示的标量密度 $\tilde{n}_+$ 也就是洛伦兹标量．同样可证明 $\tilde{n}_-$ 也是洛伦兹标量．

将(6.104)中的 ω_l' 和 $\omega_{\bar{l}}'$ 分别代替(6.24)中的 ω_l 和 $\omega_{\bar{l}}$,由变分原理(6.30)得粒子分布

$$\left.\begin{aligned}a_{bl}&=\frac{\omega_l'}{1+\exp[-\beta(\mu_b-\nu_b+\kappa\chi/\varepsilon_l-\varepsilon_l)]}\ ,\\ a_{b\bar{l}}&=\frac{\omega_{\bar{l}}'}{1+\exp[\beta(\mu_b-\nu_b-\bar{\kappa}\chi/\varepsilon_{\bar{l}}+\varepsilon_{\bar{l}})]}\ ,\end{aligned}\right\} \tag{6.113}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\kappa&=\frac{1}{\beta V}\sum_{bl}\ln\left(\frac{\omega_l'}{\omega_l'-a_{bl}}\right)\frac{\partial\omega_l'}{\partial\tilde{n}_+}\ ,\\ \bar{\kappa}&=\frac{1}{\beta V}\sum_{b\bar{l}}\ln\left(\frac{\omega_{\bar{l}}'}{\omega_{\bar{l}}'-a_{b\bar{l}}}\right)\frac{\partial\omega_{\bar{l}}'}{\partial\tilde{n}_-}\ .\end{aligned}\right\} \tag{6.114}$$

将这个分布在一般惯性系中用相空间密度表示出来就是

$$\left.\begin{aligned}a_b(\boldsymbol{p})&=\frac{f(\tilde{n}_+)}{4\pi^3(1-v^2)}\\ &\times\frac{1-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p}/\varepsilon(p)}{1+\exp\{-\beta[\mu_b-\nu_b+\kappa\chi/(\varepsilon(p)-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p})-\varepsilon(p)+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p}]\}}\ ,\\ a_{\bar{b}}(\boldsymbol{p})&=\frac{f(\tilde{n}_-)}{4\pi^3(1-v^2)}\\ &\times\frac{1-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p}/\varepsilon(p)}{1+\exp\{\beta[\mu_b-\nu_b-\bar{\kappa}\chi/(\varepsilon(p)-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p})+\varepsilon(p)-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p}]\}}\ ,\end{aligned}\right\} \tag{6.115}$$

其中 $\bar{b}$ 表 b 类反核子．除(6.49)外还有

$$\nu_b=\nu_{b0}\sqrt{1-v^2}\ , \tag{6.116}$$

$$\kappa=\kappa_0(1-v^2),\quad \bar{\kappa}=\bar{\kappa}_0(1-v^2)\ . \tag{6.117}$$

下标‘0’表示这是静止坐标系中的相应量．

再回到零温情况,从基态核物质性质定模型参数．此时 $\beta=\infty$,由(6.113)知所有满足条件

$$\mu_b-\nu_b+\kappa\chi/\varepsilon_l-\varepsilon_l\geqslant 0 \tag{6.118}$$

的能级填满b类核子,其它能级均空着．反核子的能级也都空着．设 $\varepsilon_{fb}>\varepsilon_{gb}$ 为 ε 的二次方程

$$\varepsilon^2-(\mu_b-\nu_b)\varepsilon-\kappa\chi=0 \tag{6.119}$$

的两个根．当 $\varepsilon_{fb}>\chi$ 时有 b 类核子填充能级,从最低能量按泡利原理依次填满一个个能级,直至最高能量 ε_{fb}. 如 $\varepsilon_{gb}\leqslant\chi$, 这最低能量就是 χ,b 类核子分布为零温费米分布,ε_{fb} 为费米能量．不过(6.113)已非费米分布．若 $\varepsilon_{gb}>\chi$ 则零温下的分布也会不同于费米分布．它的最低填有核子的能级已不是 χ, 而是 $\varepsilon_{gb}>\chi$. 这是一种新的相对论效应．由于较高能量的粒子有较强的洛伦兹收缩,使粒子分布向高能方向移动．不过在正常核密度下这种现象尚未发生,仍可用零温费米分布来定模型参量．

按(6.50)定义费密动量 η_b,采用(6.105),核子系的标量密度为

$$\tilde{n}=\frac{1-\tilde{n}\tau}{\pi^2}\sum_{b=n,p}\int_0^{\eta_b}\frac{\chi}{\sqrt{p^2+\chi^2}}\ p^2\mathrm{d}p$$

$$=(1-\tilde{n}\tau)\frac{\chi^3}{2\pi^2}\sum_{b=n,p}\left[\frac{\eta_b}{\chi}\sqrt{1+\frac{\eta_b^2}{\chi^2}}-\ln\left(\frac{\eta_b}{\chi}+\sqrt{1+\frac{\eta_b^2}{\chi^2}}\right)\right]. \tag{6.120}$$

由此解得

$$Q\equiv 1-\tilde{n}\tau=\left\{1+\frac{\chi^3\tau}{2\pi^2}\sum_{b=n,p}\left[\frac{\eta_b}{\chi}\sqrt{1+\frac{\eta_b^2}{\chi^2}}-\ln\left(\frac{\eta_b}{\chi}+\sqrt{1+\frac{\eta_b^2}{\chi^2}}\right)\right]\right\}^{-1}\ . \tag{6.121}$$

由于此处只涉及核子，而与反核子无关，故略去了区分核子与反核子的下标‘±’. b类核子数密度为

$$n_b = \frac{1-\tilde{n}\tau}{\pi^2}\int_0^{\eta_b} p^2 dp = \frac{\eta_b^3}{3\pi^2}Q . \qquad (6.122)$$

由于核子系能量密度也要乘同一修正因子 Q，每核子平均能量仍由(6.60)，(6.58)和(6.59)表示. 核子的有限体积效应仍只表现为对核子数密度与费米动量关系的修正. 同样由 ε 取极小的条件(6.64)确定 χ，并将如此确定的 χ 代入，即得核物质中每核子平均能量 ε 与不对称参数 I 和核子数密度 n 的关系. 是为基态核物质的物态方程. 要求它导出的结果符合核物质的经验数据，即 $b_0=15.986$ MeV，$b_1=36.5$ MeV，$r_0=1.175$ fm，和 $K=240$ MeV，并要求其中核子的有效质量 χ 在 0.7 到 0.9 间，定得若干套模型参数. 表 6－2中列出了四套(Zhang 1995)，各符号的定义与表 6－1同. 可以看出，表6－2中各参数的值与表 6－1非相对论理论的相应值很接近，表明在正常核物质中核子有限体积效应的相对论修正尚不重要. 表 6－2中核子半径 a 系统地大于表 6－1中的相应值. 这是合理的，因洛伦兹收缩会减小核子体积. 在高密或高温的情况下，能量高的核子数量将增多，洛伦兹收缩的效应将增强，核子体积变小，核子的有限体积效应将减弱. 即相对论会减小高温高密条件下核子的有限体积效应. 用表 6－2中第Ⅰ组参数算得的中子星质量上限为太阳质量的 1.78 倍，确实比非相对论理论算得的 2.5 倍(Zhang 1992a)小，但却已与天文观察值相符. 核子的有限体积效应在全面符合核物质数据和中子星数据方面仍是重要的.

表 6－2　相对论模型参数

编号	α	α_I	α_2	α_ω	α_ρ	a/fm	χ
Ⅰ	12.3	2.0	1.0	3.63	1.83	0.64	0.84
Ⅱ	11.7	2.4	1.44	3.01	1.81	0.69	0.86
Ⅲ	11.2	2.8	1.96	2.54	1.81	0.71	0.87
Ⅳ	10.8	3.2	2.56	2.17	1.80	0.73	0.87

前面的讨论中还有一点值得注意，即核物质内 $\chi<1$，从而 $\Phi=\frac{m}{g}(1-\chi)\neq 0$. 这表明标量场值在核内确与在真空中不同，核内存在标量介子凝聚. 且这种凝聚的程度，即 Φ 值的大小与核密度有关. 介子场值与核环境有关表示存在核内介子自由度. 核内标量场值相对它的真空值的偏离不仅不增加核内能量，反而降低了它的能量. 这就是从介子自由度来看的核结合机制. χ 是核子以自由核子质量为单位的有效质量. 它相对 1 的偏离表明核子质量与环境有关. 这是一个例子，表明粒子性质并非一成不变的，而是与环境有关的.

6.3　正常核与反常核

实际的原子核都是有限的，因而有表面. 为了细致了解原子核就要直接讨论有限核. 例如，只有讨论有限核才能了解表面能和库仑能. 为了将核物质理论的成果用于有限核，可采用局域密度近似，即托马斯(Thomas)－费米方法. 这种近似法设无限大核物质中各量在有限核中仍有定义，只是不再是常数，而与位置有关. 且设它们在核物质中的关系，例如物态方程，在有限核内仍逐点成立. 对定态核，各量与时间无关. 为确定起见，在考虑核子的有限大小时采用非相对论关系(6.74)，因而费米动量 η 与每核子平均占有线度 r 之间有关系(6.98). 为简单计，下面先讨论中子数与质子数相等的核，$I=0$. 为计算简便还将长度单位改取为标量介子的康普顿波长 $\lambda_s=\frac{\hbar}{m_s c}$，因而在前面各密度表达式上要乘以 $\left(\frac{\lambda_s}{\lambda}\right)^3$，$\lambda$ 为核子的康普顿波长. 例如(6.96)应改为

$$n=\frac{\alpha\beta\eta^3}{4\pi(1+b\eta)^3} , \qquad (6.123)$$

其中

$$\beta \equiv \frac{4\pi m}{g^2 m_s} \quad , \tag{6.124}$$

$$b = \left(\frac{8}{9\pi} \right)^{1/3} \frac{a}{\lambda} \quad , \tag{6.125}$$

设核为球形，费米动量 η 和密度 n 都与方向无关而只与离球心的距离 ξ 有关．当到达球形核表面时，密度 n 和费米动量 η 都应为零．用 ξ_0 表示球的半径，则有 $n(\xi_0)=\eta(\xi_0)=0$．于是有核子数的表示式

$$A = 4\pi \int_0^{\xi_0} n(\xi)\xi^2 d\xi = \alpha\beta J_1 \quad , \tag{6.126}$$

$$J_1 = \int_0^{\xi_0} \frac{\eta^3}{(1+b\eta)^3} \xi^2 d\xi \ . \tag{6.127}$$

由于 $I=0$，由 (6.56) 和 (6.58) 知每核子平均能量

$$\varepsilon_1 = F(\eta,\chi) \quad , \tag{6.128}$$

核子系贡献的能量密度 $\mathscr{E}_1 = n\varepsilon_1$，贡献的能量为

$$E_1 = 4\pi \int_0^{\xi_0} \mathscr{E}_1 \xi^2 d\xi = \alpha\beta J_2 \quad , \tag{6.129}$$

$$J_2 = \int_0^{\xi_0} \frac{\eta^3}{(1+b\eta)^3} F(\eta,\chi)\xi^2 d\xi \ . \tag{6.130}$$

参数 (6.99) 是在 设 $g_\rho = g_\omega = 0$ 的条件下获得的．采用这套参数，原子核的能量应为 E_1 与标量场能量之和．定态核中 $\dot{\Phi}=0$，由 (6.15) 中可见标量场能密度为

$$\mathscr{E}_2 = \frac{1}{2} (\nabla\Phi)^2 + U(\Phi) \ . \tag{6.131}$$

对球形核，梯度即径向微商．利用 (6.21) 和 (6.61) 得

$$\mathscr{E}_2 = \frac{\beta}{8\pi} \left[\left(\frac{d\chi}{d\xi} \right)^2 + (1-\chi)^2 + \alpha_1(1-\chi)^3 + \alpha_2(1-\chi)^4 \right] . \tag{6.132}$$

标量场对原子核能量的贡献为

$$E_2 = 4\pi \int_0^{\infty} \mathscr{E}_2 \xi^2 d\xi = \frac{\beta}{2} J_3 \quad , \tag{6.133}$$

$$J_3 = \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{d\chi}{d\xi} \right)^2 + (1-\chi)^2 + \alpha_1(1-\chi)^3 + \alpha_2(1-\chi)^4 \right] \xi^2 d\xi \ . \tag{6.134}$$

原子核外，$\xi > \xi_0$ 处，标量场 Φ 并不立即为零．只在 $\xi \to \infty$ 处 $\Phi \to 0$，而 $\chi \to 1$．因此，(6.133) 和 (6.134) 中的积分上限为 ∞．原子核的总能量为

$$E = E_1 + E_2 = \alpha\beta J_2 + \frac{\beta}{2} J_3 \ . \tag{6.135}$$

注意，此处的能量单位仍为 mc^2．现在对 χ 与 η 变分，要求原子核的能量 E 在质量数 A 固定的条件下取极小．引进拉格朗日乘子 χ_0 和自由能

$$G = E - \chi_0 A \ . \tag{6.136}$$

由 $\dfrac{\delta G}{\delta \chi} = 0$ 得微分方程

$$\frac{d^2\chi}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi}\frac{d\chi}{d\xi} - \chi = \frac{3\alpha\ \eta\chi}{2(1+b\eta)^3} \left[\sqrt{\eta^2+\chi^2} - \frac{\chi^2}{\eta} \ln\left(\frac{\eta}{\chi} + \sqrt{1+\frac{\eta^2}{\chi^2}} \right) \right] - [1 + 1.5\alpha_1(1-\chi)^2 + 2\alpha_2(1-\chi)^3] \ , \tag{6.137}$$

由 $\dfrac{\delta G}{\delta \eta} = 0$ 得超越方程

$$\left(1 + \frac{b\eta}{4} - \frac{3b\chi^2}{8\eta}\right)\sqrt{\eta^2+\chi^2} + \frac{3b\chi^4}{8\eta^2} \ln\left(\frac{\eta}{\chi} + \sqrt{1+\frac{\eta^2}{\chi^2}} \right) - \chi_0 = 0 \ . \tag{6.138}$$

这两个方程就是有限核问题的托马斯－费米方程．由它们联立可解出两个未知函数 $\chi(\xi)$ 和 $\eta(\xi)$．具体做法可以是由 (6.138) 解出 $\eta(\xi)$ 与 $\chi(\xi)$ 的关系，代入 (6.137) 消去 $\eta(\xi)$，使它成为仅含一个未知函数 $\chi(\xi)$

的微分方程．解出 $\chi(\xi)$ 后再代回 (6.138) 求出 $\eta(\xi)$. 将 (6.138) 左边展成 η 的幂级数可以看出，若 $\eta=0$ 则 (6.138) 变成 $\chi-\chi_0=0$. 由于 $\eta(\xi_0)=0$，故 $\chi(\xi_0)=\chi_0$. 给定 ξ_0 可找出恰当的 χ_0，使 (6.137) 和 (6.138) 有符合这种边条件的解．已找到 (6.137) 和 (6.138) 的一系列满足这种边条件的解 (Zhang 1992). 其中在核中心处 $\chi(0)\approx 0.71$ 的解与上节无限大核物质的解属同一类，称正常解，代表实验中看到的正常核．有了函数 $\chi(\xi)$、$\eta(\xi)$ 和核半径 ξ_0 就可以算积分 J_1, J_2 和 J_3. 但由于还没有确定常数 β，无法计算核子数 A 和能量 E. 好在还能算它们的比，即每核子能量

$$\frac{E}{A}=mc^2\left(J_2+\frac{J_3}{2\alpha}\right)\Big/J_1\ . \tag{6.139}$$

这里，以及此后，我们明确标出本节用的能量单位 mc^2. 每核子结合能为

$$\frac{B}{A}=(mc^2A-E)/A=mc^2\left[1-\left(J_2+\frac{J_3}{2\alpha}\right)\Big/J_1\right]. \tag{6.140}$$

可见，与给定核半径对应的有解 $\chi(\xi)$ 和 $\eta(\xi)$，由它们算出的积分 J_1, J_2 和 J_3，以及 B/A. 这使每核子结合能 B/A 成为 J_1 的隐函数．关系 (6.126) 和液滴模型公式 (6.65) 启发我们将 B/A 表成 $J_1^{-1/3}$ 的多项式．这很容易用数值方法做出．结果令人惊喜地发现 B/A 与 $J_1^{-1/3}$ 有很好的线性关系，即 $J^{-1/3}$ 的多项式中，$J_1^{-1/3}$ 的零次幂和一次幂是主要的．用 MeV 为能量单位，B/A 作为 $J_1^{-1/3}$ 的多项式，零次幂项恰为 15.986. 这正是确定参数 (6.99) 时的输入．经确定参数，解微分方程，做积分和数值拟合等一系列运算，输出与输入这样好的一致说明数值计算是可靠的．B/A 作为 $J_1^{-1/3}$ 的多项式，一次幂的系数是负的．将它记为 $-\sigma$，$\sigma=16.03$ MeV. 将 $B/A=15.986-\sigma J_1^{-1/3}$ 与液滴模型公式 (6.65) 比较，由 (6.126)、(6.62) 和 (6.124) 得

$$b_2 m_s=\left(\frac{8}{3\pi}\right)^{1/3}\sigma m\ . \tag{6.141}$$

将 (6.66) 中 b_2 的经验值 20.76 MeV、σ 的计算值 16.03 MeV 和核子质量 $m=939$ MeV/c^2 代入此式可算得标量介子质量 (Zhang 1992)

$$m_s=687\ \text{MeV}/c^2. \tag{6.142}$$

将此值和 (6.99) 中的 α 值代入 (6.62) 算得标量介子与核子间的作用常数

$$\frac{g^2}{4\pi}=6.15\ , \tag{6.143}$$

并由定义 (6.124) 算得

$$\beta=0.222\ . \tag{6.144}$$

值得注意的是，标量介子质量 687 MeV/c^2 正好落在核力的介子理论要求的区间 400～700 MeV/c^2 内，提示核力理论与核结构理论在核子－介子场论基础上统一的可能性．作用常数的值 (6.143) 也颇为合理．

以上计算的能量没有包含静电能．不过解出了 $\eta(\xi)$ 就能按 (6.123) 算得核子数密度 $n(\xi)$. 对中子数与质子数相等的核，质子数密度为 $\frac{1}{2}\ n(\xi)$. 这也就是以基本电荷为单位的电荷密度．用它计算静电能，结果可用一个 $A^{-1/3}$ 的多项式与 Z^2 的乘积拟合．把它与前面计算的能量加起来，得原子核结合能公式

$$\begin{aligned}B(\text{MeV})=\ &A(15.986-20.76A^{-1/3}-4.410A^{-2/3}+25.71A^{-1}\\&-15.30A^{-4/3})-0.736\frac{Z^2}{A^{1/3}}\ (1-0.059A^{-1/3}\\&-1.423A^{-2/3}+2.548A^{-1}-1.498A^{-4/3})\ .\end{aligned} \tag{6.145}$$

将计算推广到中子数与质子数不等的核是直接的．为此要引进局域不对称参数

$$i(\xi)=\frac{n_n(\xi)-n_p(\xi)}{n(\xi)}\ . \tag{6.146}$$

核子数密度 $n(\xi)$ 仍由 (6.123) 表成费米动量 $\eta(\xi)$ 的函数，因此核子数的表达式 (6.126) 和 (6.127) 不变．将 (6.56) ~ (6.59) 变成局域关系，得

$$\eta_n(\xi)=(1+i(\xi))^{1/3}\eta(\xi),\quad \eta_p(\xi)=(1-i(\xi))^{1/3}\eta(\xi)\ , \tag{6.147}$$

$$\mathscr{E}_1(\xi)=n(\xi)\varepsilon_1(\xi)\ , \tag{6.148}$$

$$\varepsilon_1(\xi)=\frac{1+i}{2}F(\eta_n,\chi)+\frac{1-i}{2}F(\eta_p,\chi)\ . \tag{6.149}$$

(6.129) 仍可用，只是其中 J_2 的表达式 (6.130) 要改为

$$J_2=\int_0^{\xi_0}\frac{\eta^3}{(1+b\eta)^3}\left[\frac{1+i}{2}F(\eta_n,\chi)+\frac{1-i}{2}F(\eta_p,\chi)\right]\xi^2\mathrm{d}\xi\ . \tag{6.150}$$

(6.131) ~ (6.135) 不变．现在要在质量数 A 和电荷数

$$Z=\alpha\beta\int_0^{\xi_0}\frac{1-i}{2}\,\frac{\eta^3}{(1+b\eta)^3}\,\xi^2\mathrm{d}\xi \tag{6.151}$$

都固定的条件下令 (6.135) 表示的总能 E 取极小．这就是要求自由能

$$G=E-\chi_0 A+\Lambda Z \tag{6.152}$$

取极小，其中 χ_0 和 Λ 为拉格朗日乘子．由 $\dfrac{\delta G}{\delta\chi}=0$ 得微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}\xi^2}+\frac{2}{\xi}\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\xi}+(1-\chi)\left[1+\frac{3}{2}\alpha_1(1-\chi)+2\alpha_2(1-\chi)^2\right]$$
$$=\frac{3\alpha\chi}{4(1+b\eta)^3}\left[\eta_n\sqrt{\eta_n^2+\chi^2}+\eta_p\sqrt{\eta_p^2+\chi^2}\right.$$
$$\left.-\chi^2\ln\left(\frac{\eta_n}{\chi}+\sqrt{1+\frac{\eta_n^2}{\chi^2}}\right)-\chi^2\ln\left(\frac{\eta_p}{\chi}+\sqrt{1+\frac{\eta_p^2}{\chi^2}}\right)\right]. \tag{6.153}$$

由 $\dfrac{\delta G}{\delta\eta}=0$ 得

$$\frac{1}{2}\left\{\left[(1+i)\left(1+\frac{b\eta}{4}\right)-\frac{3}{8}\frac{b\chi^2}{\eta}(1+i)^{1/3}\right]\sqrt{\eta_n^2+\chi^2}\right.$$
$$+\frac{3}{8}\frac{b\chi^4}{\eta^2}\ln\left(\frac{\eta_n}{\chi}+\sqrt{1+\frac{\eta_n^2}{\chi^2}}\right)+\left[(1-i)\left(1+\frac{b\eta}{4}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{3}{8}\frac{b\chi^2}{\eta}(1-i)^{1/3}\right]\sqrt{\eta_p^2+\chi^2}+\frac{3}{8}\frac{b\chi^4}{\eta^2}\ln\left(\frac{\eta_p}{\chi}+\sqrt{1+\frac{\eta_p^2}{\chi^2}}\right)\right\}$$
$$-\chi_0+\Lambda\frac{1-i}{2}=0\ , \tag{6.154}$$

由 $\dfrac{\delta G}{\delta i}=0$ 得

$$\sqrt{\eta_n^2+\chi^2}-\sqrt{\eta_p^2+\chi^2}-\Lambda=0\ . \tag{6.155}$$

将 (6.147) 代入 (6.153) ~ (6.155)，可消去 η_n 和 η_p，将它们化为三个未知函数 $\chi(\xi),\eta(\xi)$ 和 $i(\xi)$ 的一组三个方程．由它们可解出这三个函数．为了降低对称能，局域不对称参数 $i(\xi)$ 在原子核中心部分密度较高处应尽可能接近零，在核的边缘部分密度较低处则可能显著偏离零．在通常中子数多于质子数的核中，中心部分还是相当接近对称核物质的．到边缘部分中子数密度便显著高于质子数密度．核表面还可能有一层完全由中子组成的中子皮．质子分布半径 ξ_1 可小于中子分布半径 ξ_0. ξ_0 也就是核子分布半径．实际计算结果证实了这种定性分析．给定一组分布半径 (ξ_0,ξ_1) 可求得 (6.153) ~ (6.155) 的一组解．由解得的函数 $\chi(\xi),\eta(\xi)$ 和 $i(\xi)$，经 (6.126) 和 (6.127) 可算得核质量数 A；经 (6.151) 可算得核电荷数 Z；经 (6.129)，(6.150) 和 (6.131) ~ (6.135) 可算得原子核除库仑能以外的总能 E．而由电荷数密度

$$n_e(\xi)=\frac{\alpha\beta(1-i)}{8\pi}\,\frac{\eta^3}{(1+b\eta)^3} \tag{6.156}$$

还可算得库仑能 E_c．核结合能便是

$$B=Amc^2-(E+E_c)\ , \tag{6.157}$$

它是核子数 A 和电荷数 Z 的函数，也就是 A 和不对称参数 $I=(A-2Z)/A$ 的函数．经数值计算得到的这个数值函数可以很好地用 $A^{-1/3}$ 和 $|I|^{0.4}$ 的二重多项式拟合．结果是

$$
\begin{aligned}
B(\mathrm{MeV})=A[&15.986-20.76A^{-1/3}-4.410A^{-2/3}+25.71A^{-1}-15.30A^{-4/3}\\
&-(2.614-3.556A^{-1/3}+4.058A^{-2/3}-4.396A^{-1})|I|^{0.4}\\
&+(18.23-14.31A^{-1/3}-6.380A^{-2/3})|I|^{0.8}\\
&-(40.30-38.52A^{-1/3})|I|^{1.2}+7.416|I|^{1.6}]\\
&-0.736\frac{Z^2}{A^{1/3}}[1-0.059A^{-1/3}-1.423A^{-2/3}+2.548A^{-1}-1.498A^{-4/3}\\
&-(0.401-0.437A^{-1/3}+0.684A^{-2/3}-0.474A^{-1})|I|^{0.4}\\
&+(2.908-0.970A^{-1/3}+0.153A^{-2/3})|I|^{0.8}\\
&-(7.147-1.446A^{-1/3})|I|^{1.2}+5.897|I|^{1.6}] .
\end{aligned}
\tag{6.158}
$$

图 6-1 是此式与核结合能实验值的比较．曲线表示理论值，叉表

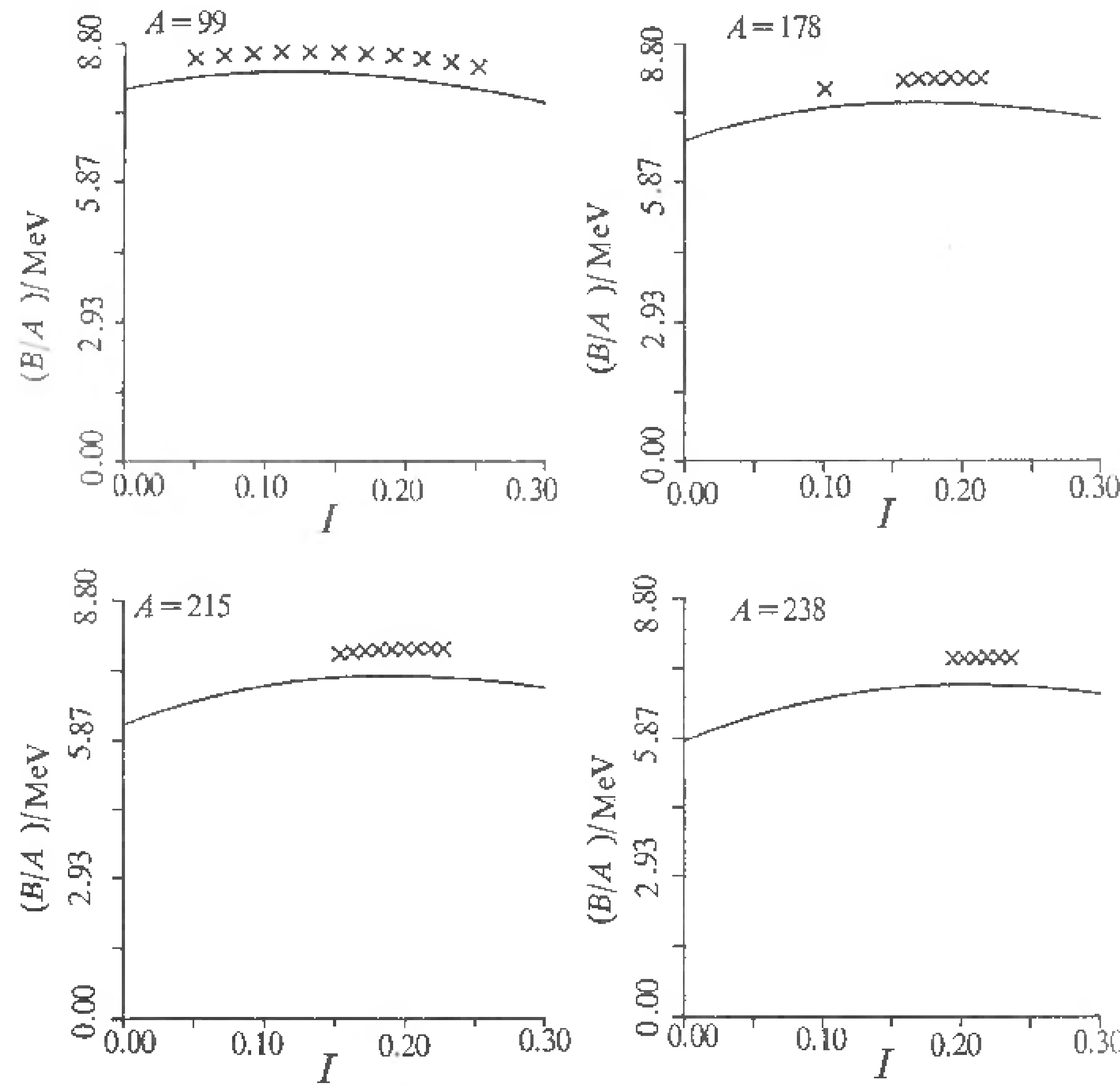


图 6-1　结合能的计算值(实线)与实验值(叉号)的比较

示实验值．可见它们大体一致．每核子结合能的最大误差为 0.7 MeV．相对误差不过 10%．鉴于理论是由基本拉格朗日量出发的，只有几个可调参数，能与上千的实验点符合到这种程度已是难得．说明这种理论包含了实质性正确的内容．值得注意的是，结合能的计算值普遍小于实验值．这是合理的，因为计算中没有对库仑能变分求极小．方程组 (6.153) ~ (6.155) 是由 (6.152) 定义的自由能 G 取极小求得的．如将自由能取为

$$
G=E+E_c-\chi_0 A+\Lambda Z \ , \tag{6.159}
$$

即将库仑能包括在内，再对它求极小，重新推导 $\chi(\xi)$,$\eta(\xi)$ 和 $i(\xi)$ 的方程，最后求得的原子核能量在 A 和 Z 固定的条件下将更小，结合能则将增大而接近实验值．因此有希望从一个基本理论出发导出可在实际中应用的核结合能公式．

将关系 (6.98) 和参数 (6.99) 连同所设 $g_\rho=g_\omega=0$ 代入 (6.58) ~ (6.61) 得到核物质中每核子平均能量 ε 随 χ 的变化是高度非线性的．确定其中核子有效质量 χ 的方程 $\frac{\partial\varepsilon}{\partial\chi}=0$ 自然也就是高度非线性的．在正常平衡核密度处有效质量 $\chi=0.71$ 的解即前面得到的正常核态解，其中每核子平均结合能为 15.986 MeV. 除此之外，这个高度非线性方程还有一个 $\chi=-0.14$ 的解，相应平衡密度高于正常核密度，每核子平均结合能为 68.74 MeV. 这就是李政道最先预言的反常核态 (Lee 1974)．只是这里为与正常核数据定量一致采用的参数与李政道最初所用参数有所不同，反常核态性质的定量方面与最初的预言也就有出入．不过，关于存在反常核态，反常核态中核子有效质量 χ 几乎为零，反常核态中每核子结合能比正常核态中的要高得多，反常核态平衡密度高于正常核态平衡密度，等定性方面这里的结果与李政道最初的结果是一致的．这也就表明了存在反常核态的预言与现有关于正常核的实验数据相容．

人们从两方面对反常核态感兴趣．一是反常核态如真的存在就是核内运动的一种新形态，其中标量场值与正常核态相比大得多．

从正常核态到反常核态的转变是伴随核内介子自由度大幅度变化的相变，它剧烈改变核环境，进而改变核子的性质和行为．反常核态中核子有效质量变得近于零，这就与正常核态和真空中的核子都大不相同．反常核态是实现环境对粒子性质影响的理想场所．另一方面，核子质量变得近于零它原有的静止能量就要几乎全部释放出来．除一部分支付标量场值增加所需能量外，余下部分就要向核外释放，成为一种新的核能源．反常核态中每核子平均结合能比正常核态高 50 MeV 以上．可见在从正常核态到反常核态的转变中每核子平均释放50 MeV 以上的能量．反常核态若真的存在，将为人们提供比裂变和聚变都强大得多的核能源．

细心的读者可能已注意到反常核态中核子的有效质量是负的．相对论给正负能量以同等的考虑，也就给正负质量以同等的考虑．在关于 ψ 的狄拉克方程 (2.23) 两边用 (2.46) 定义的 γ_5 作用就可得关于 $\gamma_5\psi$ 的狄拉克方程，只是其中的质量从 m 变为 $-m$. 与此同时，能量动量张量中的质量符号也改变，而与质量符号无关的部分则不变；各种规范作用项都不变．这就使负质量粒子与正质量粒子在诸如引力作用、弱电作用和色作用等基本过程中的表现一模一样．当然，有些作用会在这种 γ_5 变换中改变．例如核子与 π 介子间的赝标作用 (2.50) 就在这种变换中改号．这表明质量符号相同的核子间交换 π 介子的作用与质量符号相反的核子间交换 π 介子的作用反号．在前者为排斥的场合后者为吸引，若前者为吸引后者将是排斥．可见质量符号仍有可观察的效应．进一步探讨这种效应是一个有趣的基本研究课题．

结合能公式 (6.158) 是方程组 (6.153) ～ (6.155) 数值解结果的数值拟合．为求解这组方程要对 $\chi(\xi)$ 加边条件．除要求它单值光滑有界外还要求 $\chi(\infty)=1$. 这后一要求是因无穷远处标量场值应趋于零，核子有效质量应趋于自由核子质量．为符合边条件，对给定的 ξ_2 和 ξ_1, χ_0 和 A 都必须取特定值，$\chi(0)$ 也必须取特定值．在导致 (6.158) 的那些解中 $\chi(0)$ 都在正常核态的 χ 值 0.71 附近，表明这些

有限核的中心部分接近核物质的正常态，因而这些核对应现存的正常核．(6.158) 也就是正常核的结合能公式．方程 (6.153) ～ (6.155) 也是高度非线性的，除这些正常核解外还有另一类满足同样边条件的解，只是 $\chi(0)$ 在反常核态的 χ 值 -0.14 附近．这类解描写的核中心部分接近核物质的反常态，因而是反常核．用导得 (6.158) 相同的方法可导得反常核的结合能公式，结果是

$$
\begin{aligned}
B(\text{MeV}) = A[&68.74-372.76A^{-1/3}+300.27A^{-2/3}+370.43A^{-1}\\
&-(41.45-83.51A^{-1/3}-349.53A^{-2/3})|I|^{0.4}\\
&+(195.38-238.40A^{-1/3})|I|^{0.8}-248.18|I|^{1.2}]\\
&-0.813\frac{Z^2}{A^{1/3}}[1-0.112A^{-1/3}+2.68A^{-2/3}-12.81A^{-1}\\
&-(0.182-2.712A^{-1/3}+7.86A^{-2/3})|I|^{0.4}\\
&-(0.133+0.294A^{-1/3})|I|^{0.8}+0.403|I|^{1.2}]. \qquad 6(160)
\end{aligned}
$$

此式表明，反常核虽有很大的体结合能 68.74 MeV, 却也有很大的表面能 372.76 MeV．这是由于 χ 值从中心部位的 -0.14 上升到真空值 1 须通过较厚的表面层．即使这样，在表面层中 χ 的变化还是很陡的，$\left(\frac{d\chi}{d\xi}\right)^2$ 很大，由 (6.132) 知这意味着一项很大的标量场能密度．反常核的表面能自然比正常核大得多．大表面能大大降低反常核的结合能，甚至使它成为负的，即反常核可能是不结合的．只当核子数足够多，表面能的影响减小，反常核才是结合的．这就导致第一个临界质量数 A_1, 只有 $A \geqslant A_1$ 的反常核才是结合的．A_1 是不对称参数 I 的函数．对中子数与质子数相等的同位旋对称核，$I=0$, $A_1=85$. 若核子数更多，表面能的影响更小，体结合能的影响相对增加，反常核的结合能就会超过正常核，成为原子核的最低能态．这就导致第二个临界质量数 $A_2 > A_1$, 对 $A \geqslant A_2$ 的核反常态的结合能超过正常态．对 $I=0$ 的情形 $A_2=165$. 令 (6.160) 右边为零可解得 $A_1(I)$, 令 (6.160) 与 (6.158) 右边的差为零可解得 $A_2(I)$, 图 6－2 中画的是 $A_2(I)$.

另一方面，由(6.160)中的库仑能系数 0.813 MeV 还可推得，若将反常核当作一均匀带电球体，球的半径为 $r_0A^{1/3}$，r_0=1.06 fm．这与前面求反常态对称核物质平衡密度的结果一致：将密度表为 $\left(\frac{4\pi}{3}r_0^3\right)^{-1}$，则 r_0 = 1.06 fm．此值可解释为反常核态中每核子平均占有的线度．这与正常核物质中每核子平均占有的线度 1.175 fm 相比略小，表明反常核物质密度略高于正常核物质．

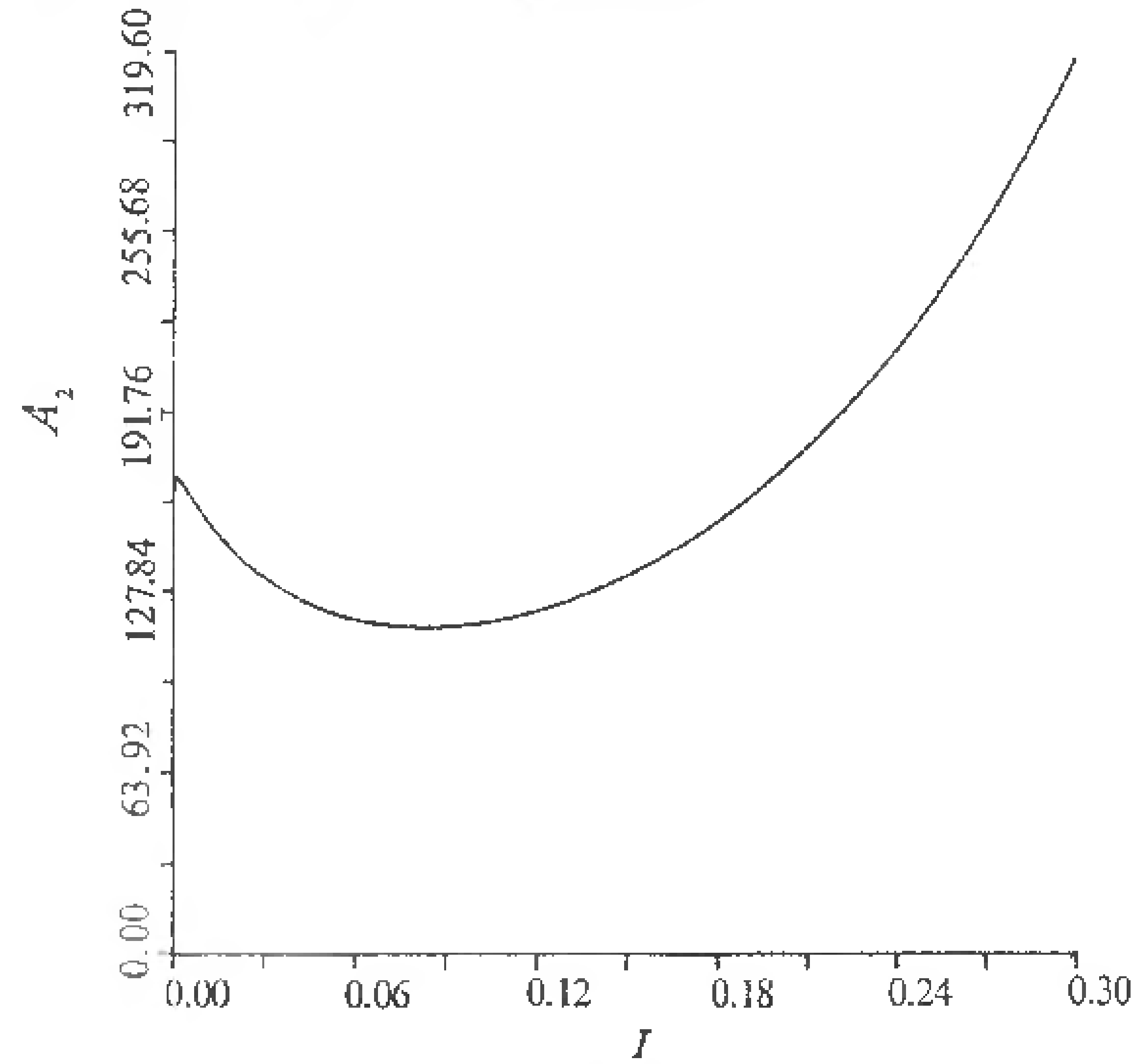


图 6-2　第二临界质量数 A_2 与不对称参数 I 的关系

6.4　π 场中核子狄拉克方程的精确解，核物质中的 π 凝聚与手征对称

标量场与质量在洛伦兹变换下同为不变量，因此可直接相加减而不损害理论在洛伦兹变换下的不变性．这从(6.20)可看出．在其中，标量场直接抵消核子的部分质量，从而降低核子能量．在标量场的真空态附近，核子能量的这种变化与标量场值 Φ 的一次幂成比

例．这只要将(6.22)右边展成 Φ 的幂级数即可看出，其中一次幂的系数不为零．与此同时，标量场的势能密度 U 会因一不为零的 Φ 值而取正值，但这种变化却与场值 Φ 的二次幂成比例．可见核物质的总能密度在 $\Phi=0$ 处并非极小．换句话说，在它的平衡态中标量场值非零．场值非零的态称为这种场量子的凝聚态．即平衡条件下的核物质中恒有标量介子凝聚．前面几节的具体讨论证实了这种定性分析．π 介子与标量介子不同，是赝标介子，π 介子场虽在固有罗伦兹变换下不变却在空间反演下变号．这使它的平方才能影响核子质量．它引起的核子能量变化也就与它的二次幂成比例，与 π 场的势能密度类似．因此，非零 π 场值究竟是增加还是减少核物质的总能密度就要由若干因素的相互竞争而定．可见，核物质中的 π 介子凝聚即使可能也是有条件的．这就引出了 π 凝聚的临界条件的问题．

为简单计，先考虑只含核子和π 介子的系统．它的具赝标耦合的拉格朗日量密度(2.47)现记为

$$\mathscr{L}_{ps}=-\overline{\Psi}(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\Psi-\frac{1}{2}(\partial_\mu\boldsymbol{\Phi}\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\Phi}+m_\pi^2\boldsymbol{\Phi}^2)+\mathrm{i}g\overline{\Psi}\gamma_5\boldsymbol{\tau}\Psi\cdot\boldsymbol{\Phi}.\quad(6.161)$$

$\mathscr{L}$的下标 ps 表示这是赝标耦合拉格朗日量密度，由于只有一种耦合故略去了耦合常数 g 的下标．$\boldsymbol{\Phi}$ 为π 介子的同位旋矢量场，点乘在同位旋空间中进行．其余符号含义自明．核子与 π 介子还可有赝矢耦合．具赝矢耦合的拉格朗日量密度为

$$\mathscr{L}_{pv}=-\overline{\Psi}(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\Psi-\frac{1}{2}(\partial_\mu\boldsymbol{\Phi}\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\Phi}+m_\pi^2\boldsymbol{\Phi}^2)+\frac{\mathrm{i}f}{m_\pi}\overline{\Psi}\gamma_5\gamma_\mu\boldsymbol{\tau}\Psi\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\Phi},\quad(6.162)$$

f 为核子与 π 介子的赝矢耦合常数．赝矢耦合曾因不能重整化而被批评，但在核力等具体问题的研究中却颇有效．现已知核子并非点粒子，定域场论对它只能有限地应用，能否重整化已不重要．况且有些可重整化的模型，如 σ 模型，其中的作用可化为有效赝矢耦合．可见在可重整化的局域场论中讨论赝矢耦合也是有意义的．

由(6.161)和(6.162)导出的核子狄拉克方程分别为

$$(\gamma_\mu\partial_\mu+m-\mathrm{i}g\gamma_5\boldsymbol{\Phi}\cdot\boldsymbol{\tau})\Psi=0 \tag{6.163}$$

和

$$\left[\gamma_\mu\partial_\mu+m-\frac{\mathrm{i}f}{m_\pi}\gamma_5\gamma_\mu(\partial_\mu\boldsymbol{\Phi})\cdot\boldsymbol{\tau}\right]\Psi=0 \ . \tag{6.164}$$

无限大核物质具有空间与时间的平移对称，其中的 π 介子场可设为

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=\Phi_\pi\begin{pmatrix}\cos k_\mu x_\mu\\ \sin k_\mu x_\mu\\ 0\end{pmatrix} \tag{6.165}$$

Φ_π为常数，$x\equiv(x_\mu)$为空时坐标，$(k_\mu)\equiv(k_1,k_2,k_3,\mathrm{i}\omega)$为 π 场的波四矢，前三分量组成三维波矢量，第四分量的虚部为圆频率．在此 π 场中方程(6.163)和(6.164)都可精确求解(Zhang 1981)．将(6.165)代入(6.163)，经变换

$$\Psi(x)=\exp(-\mathrm{i}\tau_3k_\mu x_\mu/2)\psi(x)\ , \tag{6.166}$$

得方程

$$[\gamma_\mu(\partial_\mu-\mathrm{i}\tau_3k_\mu/2)+m-\mathrm{i}g\gamma_5\tau_1\Phi_\pi]\psi(x)=0\ . \tag{6.167}$$

这个方程的系数已与空时坐标 x 无关，具有了空间与时间的平移对称，因而解可写为

$$\psi(x)=\exp(\mathrm{i}p_\mu x_\mu)SU\ , \tag{6.168}$$

其中 U 为与空时坐标 x 无关的狄拉克双旋量和同位旋空间的旋量，

$$S=\sqrt{\frac{A+p_\mu k_\mu}{2A}}-\frac{g\Phi_\pi\tau_1\gamma_5\gamma_\mu k_\mu}{\sqrt{2A(A+p_\mu k_\mu)}}\ , \tag{6.169}$$

$$A\equiv\sqrt{(p_\mu k_\mu)^2+g^2\Phi_\pi^2k_\mu k_\mu} \tag{6.170}$$

也都与坐标 x 无关．将(6.168)～(6.170)代入(6.167)得旋量 U 满足的方程

$$(\mathrm{i}\gamma_\mu Q_\mu+m)U=0\ , \tag{6.171}$$

$$Q_\mu=p_\mu+\left(\frac{g^2\Phi_\pi^2}{A+p_\nu k_\nu}-\frac{\tau_3}{2}\right)k_\mu\ . \tag{6.172}$$

(6.171)具有自由粒子狄拉克方程的形式，其解为

$$Q_\mu Q_\mu=-m^2,\ \text{或}\ (Q_\mu)=(\boldsymbol{Q},\mathrm{i}\sqrt{Q^2+m^2}\ )\ , \tag{6.173}$$

$$U=(\mathrm{i}\gamma_\mu Q_\mu-m)U_0\ , \tag{6.174}$$

U_0为一与空时坐标 x 无关的任意狄拉克双旋量和同位旋空间的任意旋量．将 U_0 取成 τ_3 的本征旋量，(6.172)中的 τ_3 取本征值，成为一个普通的数．对一定的 k_μ，Φ_π 和 τ_3，(6.173)成为 p_μ 的一个关系，即 π 介子场(6.165)中核子的能量-动量关系．特别当 $k_4=\mathrm{i}\omega=0$ 时 $Q_4=p_4=\dfrac{\mathrm{i}E}{c}$，$E$ 为核子能量．值得注意的是赝标耦合情况下 π 介子场不降低核子质量．(6.171)表明它仍为 m．这一点与标量介子场对核子的作用迥然不同．

将(6.165)代入(6.164)，作变换

$$\Psi(x)=\exp(-\mathrm{i}\tau_3k_\mu x_\mu/2)S_1\psi(x)\ , \tag{6.175}$$

$$S_1=\sqrt{\frac{1+B}{2B}}-\frac{\mathrm{i}f}{m_\pi}\sqrt{\frac{2}{B(1+B)}}\,\Phi_\pi\tau_1\gamma_5\ , \tag{6.176}$$

$$B=\sqrt{1+\frac{4f^2\Phi_\pi^2}{m_\pi^2}}\ , \tag{6.177}$$

得方程

$$[\gamma_\mu(\partial_\mu-\mathrm{i}\tau_3k'_\mu/2)+m'-\mathrm{i}g'\gamma_5\tau_1\Phi_\pi]\psi=0\ , \tag{6.178}$$

其中

$$m'=\frac{m}{B}\ ,\quad g'=\frac{2m'f}{m_\pi}\ ,\quad k'_\mu=Bk_\mu\ . \tag{6.179}$$

(6.178)与(6.167)几乎一样，只是用 m'，g' 和 k'_μ 分别替代了 m，g 和 k_μ．重复从(6.168)到(6.174)的推导就可解出(6.178)．不过这回核子的有效质量变成了m'．由(6.177)知当$\Phi_\pi\neq0$时 $B>1$，$m'<m$．可见赝矢耦合情形下 π 介子场可降低核子的有效质量从而降低核子系统的能量．这使 π 凝聚可能成为放能过程，得以自发发生．

不过事情并非如此简单．π 场中核子不再具有一定动量．代替它的是两种赝动量．一是(6.168)定义的四矢量(p_μ)的空间分量 $\boldsymbol{p}$．另

一是(6.172)定义的四矢量(Q_μ)的空间分量$\boldsymbol{Q}$. 由于(6.166)和(6.175)都是幺正变换,应按$\boldsymbol{p}$数核子的空间运动状态数. 而(6.173)却表明,应按$\boldsymbol{Q}$计算核子的能量. 设$\omega=0$, $Q_4=\mathrm{i}E/c$, 核子按$\boldsymbol{Q}$的绝对值Q由小到大填入费米海,直到$Q=Q_F$. Q_F为赝费米动量, $\varepsilon_F=\sqrt{Q_F^2+m'^2}$为填入核子的最大能量,亦即赝费米能量. 赝动量$\boldsymbol{Q}$与$\boldsymbol{p}$的不一致导致一个变了形的不均匀费米海. 由$\pi$场导致的核子费米海的变形和非均匀化会导致核子系统能量的增高,不利于π凝聚的发生. 由于与赝矢耦合等价的核子-π介子作用才导致核子有效质量的减小,从而导致π凝聚,以下只考虑与赝矢耦合等价的作用. 在引用(6.169)~(6.174)时不论是否标明都暗含作了替代(6.179).

由(6.172)知

$$p_{/\!/}=\pm\sqrt{\left(Q_{/\!/}+\frac{\tau_3}{2}k'\right)^2-g'^2\Phi_\pi^2}\ ,\quad \boldsymbol{p}_\perp=\boldsymbol{Q}_\perp\ ,\qquad(6.180)$$

其中$p_{/\!/}$与$Q_{/\!/}$分别为$\boldsymbol{p}$与$\boldsymbol{Q}$平行于$\boldsymbol{k}$的分量, $\boldsymbol{p}_\perp$与$\boldsymbol{Q}_\perp$分别为$\boldsymbol{p}$与$\boldsymbol{Q}$垂直于$\boldsymbol{k}$的分量. 由此得

$$\mathrm{d}^3p=\frac{Q_{/\!/}+\frac{\tau_3}{2}k'}{\sqrt{\left(Q_{/\!/}+\frac{\tau_3}{2}k'\right)^2-g'^2\Phi_\pi^2}}\,\mathrm{d}^3Q\ ,\qquad(6.181)$$

从而对一定的$\boldsymbol{k}$, Φ_π和τ_3核子数密度为

$$n_{\tau_3}(k',\Phi_\pi,Q_F)=\frac{2}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^3p$$

$$=\frac{4}{(2\pi)^3}\int^{Q_F}\frac{Q_{/\!/}+\frac{\tau_3}{2}k'}{\sqrt{\left(Q_{/\!/}+\frac{\tau_3}{2}k'\right)^2-g'^2\Phi_\pi^2}}\,\mathrm{d}^3Q\ .\qquad(6.182)$$

此式第二等号处顾虑到了(6.180)第一式右边的$\pm$号,它表明一个$Q_{/\!/}$的值与$p_{/\!/}$的两个值对应. 积分区域由条件$Q\leqslant Q_F$和被积函数取实值决定. 当$Q_F<g'\Phi_\pi-\frac{\tau_3}{2}k'$时为空集; $-Q_F>g'\Phi_\pi-\frac{\tau_3}{2}k'$时为以原点为心$Q_F$为半径的球;其余情形为这个球的$Q_{/\!/}\geqslant g'\Phi_\pi-\frac{\tau_3}{2}k'$的部分. 取$\boldsymbol{k}$

为极轴, θ表$\boldsymbol{Q}$与$\boldsymbol{k}$的交角,由于被积函数与绕$\boldsymbol{k}$的方位角无关

$$n_{\tau_3}(k',\Phi_\pi,Q_F)=\frac{1}{\pi^2}\int^{Q_F}\frac{Q_{/\!/}+\frac{\tau_3}{2}k'}{\sqrt{\left(Q_{/\!/}+\frac{\tau_3}{2}k'\right)^2-g'^2\Phi_\pi^2}}\,Q^2\mathrm{d}Q\mathrm{d}\cos\theta$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int^{Q_F}\frac{Q_{/\!/}+\frac{\tau_3}{2}k'}{\sqrt{\left(Q_{/\!/}+\frac{\tau_3}{2}k'\right)^2-g'^2\Phi_\pi^2}}\,Q\mathrm{d}Q\mathrm{d}Q_{/\!/}\ .$$

先对$Q_{/\!/}$积分,仔细考虑积分限后得

$$n_{\tau_3}(k',\Phi_\pi,Q_F)=\frac{1}{\pi^2}\int_{Q_0}^{Q_F}\sqrt{\left(Q+\frac{\tau_3}{2}k'\right)^2-g'^2\Phi_\pi^2}\,Q\mathrm{d}Q\ ,$$

$$Q_0=\begin{cases}Q_F\ , & \text{如 } Q_F\leqslant g'\Phi_\pi-\frac{\tau_3}{2}k'\ ;\\ -Q_F\ , & \text{如 } -Q_F\geqslant g'\Phi_\pi-\frac{\tau_3}{2}k'\ ;\\ g'\Phi_\pi-\frac{\tau_3}{2}k'\ , & \text{其他}\ .\end{cases}\qquad(6.183)$$

由此得核子数密度

$$n(k',\Phi_\pi,Q_F)=n_1(k',\Phi_\pi,Q_F)+n_{-1}(k',\Phi_\pi,Q_F)$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\times\begin{cases}0\ , & \text{如 } Q_F\leqslant g'\Phi_\pi-\frac{k'}{2}\ ;\\ R\left(\frac{k'}{2},g'\Phi_\pi,Q_F\right)-R\left(\frac{k'}{2},g'\Phi_\pi,-Q_F\right)\ , & \text{如 } g'\Phi_\pi-\frac{k'}{2}<Q_F\leqslant\frac{k'}{2}-g'\Phi_\pi\ ;\\ R\left(\frac{k'}{2},g'\Phi_\pi,Q_F\right)-\frac{k'}{4}g'^2\Phi_\pi^2\ln(g'\Phi_\pi)\ , & \text{如 } g'\Phi_\pi-\frac{k'}{2}<Q_F\leqslant g'\Phi_\pi+\frac{k'}{2}\wedge Q_F>\frac{k'}{2}-g'\Phi_\pi\ ;\\ R\left(\frac{k'}{2},g'\Phi_\pi,Q_F\right)+R\left(-\frac{k'}{2},g'\Phi_\pi,Q_F\right)\ , & \text{如 } Q_F>g'\Phi_\pi+\frac{k'}{2}\ ,\end{cases}\qquad(6.184)$$

其中

$$R(a,b,x)=\frac{1}{3}\left[(a+x)^2-b^2\right]^{3/2}-\frac{a}{2}(a+x)\sqrt{(a+x)^2-b^2}$$
$$+\frac{ab^2}{2}\ln\left[a+x+\sqrt{(a+x)^2-b^2}\right]. \tag{6.185}$$

当$\Phi_\pi=0$时此式蜕化为通常核子数密度的表达式$n(k',0,Q_F)=\frac{2}{3\pi^2}Q_F^3$.

给定$\boldsymbol{k}$和Φ_π,核物质中具给定τ_3的核子能量密度为

$$\mathscr{E}_{\tau_3}(k',\Phi_\pi,Q_F)=\frac{4}{(2\pi)^3}\int^{Q_F}\sqrt{Q^2+m'^2}\,\frac{Q_{/\!/}+\frac{\tau_3}{2}k'}{\sqrt{\left(Q_{/\!/}+\frac{\tau_3}{2}k'\right)^2-g'^2\Phi_\pi^2}}\mathrm{d}^3Q$$
$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{Q_0}^{Q_F}\sqrt{Q^2+m'^2}\sqrt{\left(Q+\frac{\tau_3}{2}k'\right)^2-g'^2\Phi_\pi^2}\;Q\mathrm{d}Q\quad, \tag{6.186}$$

积分下限Q_0与(6.183)同. 定义

$$F(a,b,x)=\int_{b-a}^{x}\sqrt{1+\xi^2}\,\sqrt{(\xi+a)^2-b^2}\;\xi\mathrm{d}\xi\quad, \tag{6.187}$$

它可用椭圆函数和初等函数表达. 将$\tau_3=\pm1$两部分的贡献加起来得核物质中核子系的能量密度

$$\mathscr{E}(k',\Phi_\pi,Q_F)=\mathscr{E}_1(k',\Phi_\pi,Q_F)+\mathscr{E}_{-1}(k',\Phi_\pi,Q_F)$$
$$=\frac{m'^4}{\pi^2}\times\begin{cases}0\,, & \text{如 } Q_F\leqslant g'\Phi_\pi-\frac{k'}{2}\;;\\ F\left(\frac{k'}{2m'},\frac{g'\Phi_\pi}{m'},\frac{Q_F}{m'}\right)-F\left(\frac{k'}{2m'},\frac{g'\Phi_\pi}{m'},-\frac{Q_F}{m'}\right), & \text{如 } g'\Phi_\pi-\frac{k'}{2}<Q_F\leqslant\frac{k'}{2}-g'\Phi_\pi\;;\\ F\left(\frac{k'}{2m'},\frac{g'\Phi_\pi}{m'},\frac{Q_F}{m'}\right), & \text{如 } Q_F>\frac{k'}{2}-g'\Phi_\pi\;,\ \wedge g'\Phi_\pi-\frac{k'}{2}<Q_F\leqslant g'\Phi_\pi+\frac{k'}{2}\;;\\ F\left(\frac{k'}{2m'},\frac{g'\Phi_\pi}{m'},\frac{Q_F}{m'}\right)+F\left(\frac{-k'}{2m'},\frac{g'\Phi_\pi}{m'},\frac{Q_F}{m'}\right), & \text{如 } Q_F>g'\Phi_\pi+\frac{k'}{2}\,.\end{cases} \tag{6.188}$$

核物质的能量密度还应含π介子场的势能密度,即为

$$\mathscr{F}(k',\Phi_\pi,Q_F)=\mathscr{E}(k',\Phi_\pi,Q_F)+\frac{1}{2}(k^2+m_\pi^2)\Phi_\pi^2\,. \tag{6.189}$$

以上是定域场论的结果,即假设了核子是点粒子,本身无尺度. 实际上核子有非零尺度. 采用(6.74)或与它等价的(6.98)来考虑核子的有限尺度. 核子数密度应修正为

$$n'(k',\Phi_\pi,Q_F)=\frac{n(k',\Phi_\pi,Q_F)}{[1+(4\pi n/3)^{1/3}a]^3}\;, \tag{6.190}$$

其中的n仍由(6.184)表达. 核子系的能量密度应修正为

$$\mathscr{E}'(k',\Phi_\pi,Q_F)=\frac{\mathscr{E}(k',\Phi_\pi,Q_F)}{[1+(4\pi n/3)^{1/3}a]^3}\;, \tag{6.191}$$

其中的$\mathscr{E}$也仍由(6.188)表达. 每核子平均能量的表达式

$$\varepsilon(k',\Phi_\pi,Q_F)=\frac{\mathscr{E}'(k',\Phi_\pi,Q_F)}{n'(k',\Phi_\pi,Q_F)}=\frac{\mathscr{E}(k',\Phi_\pi,Q_F)}{n(k',\Phi_\pi,Q_F)} \tag{6.192}$$

则与核子尺度a无关. 核物质的能量密度也由(6.189)修正为

$$\mathscr{F}'(k',\Phi_\pi,Q_F)=\mathscr{E}'(k',\Phi_\pi,Q_F)+\frac{1}{2}(k^2+m_\pi^2)\Phi_\pi^2\quad. \tag{6.193}$$

π场值Φ_π由核子数密度n'不变的条件下能量密度$\mathscr{F}'$取极小来确定. (6.190)表明n'不变即n不变. 在k固定的条件下n为Φ_π与Q_F的函数. n不变的条件表现为微分关系

$$\frac{\partial n}{\partial Q_F}\mathrm{d}Q_F+\frac{\partial n}{\partial\Phi_\pi}\mathrm{d}\Phi_\pi=0\;, \tag{6.194}$$

亦即

$$\frac{\mathrm{d}Q_F}{\mathrm{d}\Phi_\pi}=-\frac{\partial n}{\partial\Phi_\pi}\Big/\frac{\partial n}{\partial Q_F}\quad. \tag{6.195}$$

能量密度取极值的条件为

$$\frac{\partial\mathscr{F}'}{\partial\Phi_\pi}-\frac{\partial\mathscr{F}'}{\partial Q_F}\,\frac{\partial n}{\partial\Phi_\pi}\Big/\frac{\partial n}{\partial Q_F}=0\,. \tag{6.196}$$

由(6.183)～(6.193)知此式可化为

$$[k^2+m_\pi^2-\Pi(k,\Phi_\pi,Q_F)]\Phi_\pi=0 , \tag{6.197}$$

其中极化系数

$$\Pi(k,\Phi_\pi,Q_F)=\frac{g'^2m'k}{2\pi^2B[1+(4\pi n/3)^{1/3}a]^3}$$

$$\times\begin{cases} 0 , & \text{如 } Q_F\leqslant g'\Phi_\pi-\dfrac{k'}{2} ; \\ W\left(\dfrac{k'}{2m'},\dfrac{g'\Phi_\pi}{m'},\dfrac{Q_F}{m'}\right)-W\left(\dfrac{k'}{2m'},\dfrac{g'\Phi_\pi}{m'},\dfrac{-Q_F}{m'}\right) , & \text{如 } g'\Phi_\pi-\dfrac{k'}{2}<Q_F\leqslant\dfrac{k'}{2}-g'\Phi_\pi ; \\ W\left(\dfrac{k'}{2m'},\dfrac{g'\Phi_\pi}{m'},\dfrac{Q_F}{m'}\right)-\sqrt{1+\left(\dfrac{Q_F}{m'}\right)^2}\times\left[1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{g'\Phi_\pi}{m'}\right)^2\right]\ln\left(\dfrac{g'\Phi_\pi}{m'}\right) , & \text{如 } Q_F>\dfrac{k'}{2}-g'\Phi_\pi\wedge g'\Phi_\pi-\dfrac{k'}{2}<Q_F\leqslant g'\Phi_\pi+\dfrac{k'}{2} ; \\ W\left(\dfrac{k'}{2m'},\dfrac{g'\Phi_\pi}{m'},\dfrac{Q_F}{m'}\right)-W\left(\dfrac{-k'}{2m'},\dfrac{g'\Phi_\pi}{m'},\dfrac{Q_F}{m'}\right) , & \text{如 } Q_F>g'\Phi_\pi+\dfrac{k'}{2} , \end{cases} \tag{6.198}$$

$$W(a,b,x)=\sqrt{1+x^2}\left[\left(1+\frac{b^2}{2}\right)\ln\left(a+x+\sqrt{(a+x)^2-b^2}\right)+\frac{x-a}{2}\sqrt{(a+x)^2-b^2}\right]-G(a,b,x) , \tag{6.199}$$

$$G(a,b,x)=\int_{b-a}^{x}(1+a\xi+\xi^2)\sqrt{\frac{1+\xi^2}{(\xi+a)^2-b^2}}\,d\xi . \tag{6.200}$$

函数 G 也可用椭圆函数和初等函数表达．$b=0$ 是 $G(a,b,x)$ 的奇点．还好奇异性在 (6.198) 右端两项间恰好抵消，$\Phi_\pi=0$ 时得

$$\Pi(k,0,Q_F)=\frac{g^2mk}{2\pi^2[1+2aQ_F/(9\pi)^{1/3}]^3}\times\begin{cases} W_0\left(\dfrac{k}{2m},\dfrac{Q_F}{m}\right)-W_0\left(\dfrac{k}{2m},\dfrac{-Q_F}{m}\right) , & \text{如 } Q_F\leqslant\dfrac{k}{2} , \\ W_0\left(\dfrac{k}{2m},\dfrac{Q_F}{m}\right)-W_0\left(\dfrac{-k}{2m},\dfrac{Q_F}{m}\right) , & \text{如 } Q_F>\dfrac{k}{2} , \end{cases} \tag{6.201}$$

$$W_0(a,x)=\ln\left\{(x+\sqrt{1+x^2})^a(x+a)^{\sqrt{1+x^2}}\times\left[\frac{x+\sqrt{1+x^2}+a+\sqrt{1+a^2}}{(x+\sqrt{1+x^2})(a+\sqrt{1+a^2})-1}\right]^{\sqrt{1+a^2}}\right\} , \tag{6.202}$$

$$g=\frac{2mf}{m_\pi} . \tag{6.203}$$

这末一式是真空中 π 介子与核子间赝标耦合常数 g 和赝矢耦合常数 f 的关系．

$\Phi_\pi=0$ 是方程 (6.197) 的一个解．它表明 π 场值 Φ_π 为零使核物质能量密度在核子数密度固定的条件下取极值．若这个极值是极小值则 $\Phi_\pi=0$ 的态是稳态，不会发生π 凝聚．若这个极值是极大值则非零 Φ_π 值可降低核物质的能量密度，π 凝聚是放能的因而可自发发生．在核子数密 度固定的条件下将 (6.197) 左边再对 Φ_π 微商一次，并令结果在 $\Phi_\pi=0$ 处小于零，即得 π 凝聚条件

$$\Pi(k,0,Q_F)>k^2+m_\pi^2 . \tag{6.204}$$

临界条件为

$$\Pi(k,0,Q_F)=k^2+m_\pi^2 . \tag{6.205}$$

将核子数密度表为 $n'=\left(\frac{4\pi}{3}r^3\right)^{-1}$，由 (6.184) 和 (6.190) 解得在 $\Phi_\pi=0$ 的条件下

$$Q_F=\left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3}\frac{1}{r-a} \quad . \tag{6.206}$$

给定常数 a 后 Q_F 可表为每核子平均占有线度 r 的确定函数．取赝标耦合常数的经验值：

$$\frac{g^2}{4\pi}=14.6 \ , \tag{6.207}$$

按(6.203)这相当于取

$$\frac{f^2}{4\pi}=0.081 \ , \tag{6.208}$$

此即为赝矢耦合常数的经验值．将(6.206)和(6.207)代入(6.201)右边，得到的极化系数 Π 为 k 和 r 的函数．对一定的核子数密度，r 一定，Π 就成为一个变量 k 的函数．将这个函数代入(6.204)左边即可判断在该密度下给定波数 k 的 π 凝聚能否发生．将它代入(6.205)左边则可求给定波数 k 的 π 凝聚临界密度．当核子数密度超过这临界值时波数为 k 的 π 凝聚才能发生．这种临界密度作为 k 的函数的下确界就是一般说的 π 凝聚临界密度．当核物质中核子数密度超过这个临界值时就有某些波数 k 的 π 凝聚可能发生．在作用常数 g 固定后，临界密度是核子尺度 a 的函数．a 越大临界密度越大．实际计算还表明(张 1981a)：存在核子尺度的一个临界值 $a_0=0.352$ fm，如果 $a>a_0$ 则 π 凝聚根本不能发生．值得注意的是，所有考虑核子有限大小的模型中几乎都有 $a>a_0$．这是否表明核物质中真的不能有 π 凝聚呢？不然．在考虑标量介子自由度后，特别在有近似手征对称的情况下，π 凝聚仍可能发生(张 1981b)．

为简明，采用4.3节介绍过的 σ 模型．由拉格朗日量密度(4.183)得此模型中核子的狄拉克方程

$$[\gamma_\mu\partial_\mu-g(\Phi^{(4)}+\mathrm{i}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\Phi}\gamma_5)]\Psi=0 \ . \tag{6.209}$$

此式又可写为

$$\mathrm{i}\frac{\partial\Psi}{\partial t}=[\boldsymbol{\alpha}\cdot(-\mathrm{i}\nabla)-g\beta(\Phi^{(4)}+\mathrm{i}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\Phi}\gamma_5)]\Psi \ . \tag{6.210}$$

核物质有空间和时间的平移对称，可设其中

$$\Phi^{(4)}(\boldsymbol{r},t)=-\mathscr{A}\cos\theta \ , \tag{6.211}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r},t)=-\mathscr{A}\sin\theta\begin{bmatrix}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\\ \sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\\ 0\end{bmatrix} \ , \tag{6.212}$$

$\mathscr{A}$ 与 θ 设为与时空坐标无关，且已设 $k_4=\mathrm{i}\omega=0$．将它们代入(6.210)，作变换

$$\Psi(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\tau_3}{2}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\tau_3}{2}\gamma_5\theta}\tau_3\Psi_0(\boldsymbol{r},t) \ , \tag{6.213}$$

方程变为

$$\mathrm{i}\frac{\partial\Psi_0}{\partial t}=\left[\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(-\mathrm{i}\nabla-\frac{\tau_3}{2}\boldsymbol{k}\cos\theta\right)+\beta g\mathscr{A}-\frac{\tau_2}{2}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{k}\sin\theta\right]\Psi_0 \ , \tag{6.214}$$

其中

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix} \tag{6.215}$$

为四行四列的泡利矩阵．另一方面，在(6.165)中取 $k_4=\mathrm{i}\omega=0$，代入赝矢耦合狄拉克方程(6.164)，左乘以 β，经整理得

$$\mathrm{i}\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\left\{\boldsymbol{\alpha}\cdot(-\mathrm{i}\nabla)+\beta m+\frac{f}{m_\pi}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{k}[\tau_1\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})-\tau_2\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]\Phi_\pi\right\}\Psi \ . \tag{6.216}$$

作变换

$$\Psi(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\tau_3}{2}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\Psi_0(\boldsymbol{r},t) \ , \tag{6.217}$$

上式变为

$$\mathrm{i}\frac{\partial\Psi_0}{\partial t}=\left[\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(-\mathrm{i}\nabla-\frac{\tau_3}{2}\boldsymbol{k}\right)+\beta m-\frac{f}{m_\pi}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{k}\tau_2\Phi_\pi\right]\Psi_0 \ . \tag{6.218}$$

显见 σ 模型中核子的狄拉克方程(6.214)与赝矢耦合的狄拉克方程(6.218)很相像，只是将后者的 $\boldsymbol{k}$、m 和 f 分别换成了

$$\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}\cos\theta,\quad m'=g\mathscr{A}\quad 和\quad f'=\frac{m_\pi}{2\mathscr{A}} \ , \tag{6.219}$$

而 π 场值现在由

$$\Phi_\pi' = \mathscr{A} \tan\theta \tag{6.220}$$

表示. m' 为受到标量场调制的核子质量. 上节定义的在标量场单独作用下以自由核子质量为单位的核子有效质量为

$$\chi = \frac{m'}{m} = \frac{g\mathscr{A}}{m} . \tag{6.221}$$

由 (6.219) 可得

$$f' = \frac{gm_\pi}{2m'} = \frac{f}{\chi} , \tag{6.222}$$

其中的 f 由 (6.203) 定义. 这里假设了核子与标量场和赝标场的作用常数都是 g, 这是手征对称的表现. 从第 4 章已知, 手征对称不是严格的, 它的破缺导致轴矢流的重整化因子 $g_a=1.26$. (6.214) 右边方括号内末项即为核子轴矢流的贡献, 应在其上乘以这一因子. 结果是在 f' 的表达式 (6.222) 中将 g 改成

$$g_\pi = g_a g , \tag{6.223}$$

这使核子与 π 介子的耦合常数相对于它与标量介子的耦合常数 g 增益 1.26 倍. (6.222) 还表明, 标量场使核物质中核子与 π 介子的耦合常数相对于它的真空值增益 $\frac{1}{\chi}$ 倍.

在将 $\boldsymbol{k}, m, f$ 和 Φ_π 按 (6.219) 和 (6.220) 换成 $\boldsymbol{k}'$、m', f' 和 Φ_π' 后重复 (6.175) 以下的讨论. B 要换成

$$B' = \sqrt{1+\frac{4f'^2\Phi_\pi'^2}{m_\pi^2}} = \sqrt{1+g_a^2\tan^2\theta} . \tag{6.224}$$

在完全手征对称的条件下, $g_a=1, B'=\frac{1}{\cos\theta}$. (6.179) 中定义的 m', g' 和 $\boldsymbol{k}'$ 要分别换成

$$m'' = \frac{m'}{B'} , \quad g' = \frac{2m''f'}{m_\pi} , \quad \boldsymbol{k}'' = B'\boldsymbol{k}' , \tag{6.225}$$

其中的 m' 和 $\boldsymbol{k}'$ 由 (6.219) 定义. 若取 $g_a=1$ 则此式变成

$$m'' = g\mathscr{A}\cos\theta, \quad g' = g\cos\theta, \quad \boldsymbol{k}'' = \boldsymbol{k} . \tag{6.226}$$

将 (6.211) 和 (6.212) 代入 (4.183) ~ (4.185) 得 π 介子场和标量介子场的能量密度

$$\mathscr{E}_{\sigma\pi} = \mathscr{E}_\sigma + \mathscr{E}_\pi , \tag{6.227}$$

$$\mathscr{E}_\sigma = \frac{1}{2} m_\pi^2(\mathscr{A}-\mathscr{A}_0)^2 + \frac{1}{8\mathscr{A}_0^2}(m_\sigma^2 - m_\pi^2)(\mathscr{A}^2-\mathscr{A}_0^2)^2 , \tag{6.228}$$

$$\mathscr{E}_\pi = \frac{1}{2}(k'^2 + m_\pi'^2)\Phi_\pi'^2 , \tag{6.229}$$

$$\mathscr{A}_0 = \frac{m}{g} , \tag{6.230}$$

$$m_\pi' = \sqrt{\frac{2\mathscr{A}\mathscr{A}_0}{\mathscr{A}^2+\Phi_\pi'^2+\mathscr{A}\sqrt{\mathscr{A}^2+\Phi_\pi'^2}}}\, m_\pi . \tag{6.231}$$

$\mathscr{A}=\mathscr{A}_0$ 处 $\mathscr{E}_\sigma$ 极小. 可重新定义

$$\Phi = \mathscr{A} - \mathscr{A}_0 \tag{6.232}$$

为 σ 场. 它的势能密度 $\mathscr{E}_\sigma$ 为 Φ 的四次多项式, 最低次项为 $\frac{1}{2} m_\sigma^2\Phi^2$. 可见此场量子的质量仍为 σ 介子的质量 m_σ. 将 Φ_π' 重新解释为 π 场, m_π' 类似场量子的质量. 它本身是 Φ_π' 的偶函数. $\Phi_\pi'=0$ 处 $m_\pi' = \frac{m_\pi}{\sqrt{\chi}}$, 此即核物质中 π 介子的有效质量. 真空中 $\chi=1, m_\pi'=m_\pi$, π 凝聚态可定义为 $\Phi_\pi' \neq 0$ 的态. $\mathscr{E}_\sigma$ 与 Φ_π' 无关, 只用来计算 $\mathscr{A}$ 的值. 在 $\mathscr{A}$ 以及 $m'=g\mathscr{A}$ 确定后考虑 π 凝聚时, 可在场能密度中只保留 $\mathscr{E}_\pi$. 核物质的能量密度在作了核子的有限尺度修正后为

$$\mathscr{F}'(k'', \Phi_\pi', Q_F) = \mathscr{E}'(k'', \Phi_\pi', Q_F) + \frac{1}{2}(k'^2+m_\pi'^2)\Phi_\pi'^2 , \tag{6.233}$$

以之代替 (6.193). 在计算中还要用 m'' 代替 m'. 注意 $\Phi_\pi'=0$ 时 $\theta=0$, 从而 $k''=k'=k, m''=m'$. 极化系数仍由 (6.201) 表示, 只是其中的 m 要改为 $m'=m\chi$, 作用常数 g 最好也改写为 g_π. 不过此处 g_π 的取值与 (6.207) 规定的 g 的取值相同, 即

$$\frac{g_\pi^2}{4\pi}=14.6\ . \tag{6.234}$$

π 凝聚条件为

$$\Pi(k,0,Q_F)>k^2+m_\pi^2/\chi\ , \tag{6.235}$$

临界条件为

$$\Pi(k,0,Q_F)=k^2+m_\pi^2/\chi\ . \tag{6.236}$$

在作用常数 g 固定后，σ 模型只有一个可调参数，即 σ 介子质量 m_σ. 在考虑核子的有限大小时还引进了一个表示核子尺度的常数 a. 这两个常数可用正常核物质中每核子占有线度 $r=1.175$ fm 和每核子结合能 15.986 MeV 来确定．结果得 $m_\sigma=861$ MeV, $a=0.57$ fm. 由此求得(张 1981b) π 凝聚临界密度 $n_2=\left(\frac{4\pi}{3}\ r_2^3\right)^{-1}$, $r_2=1.015$ fm. 可见 π 凝聚应在略高于正常核密度的条件下发生．值得注意的是此处核子尺度 $a>a_0$, 却可以发生 π 凝聚．这可从极化系数的表达式(6.201)得到定性的解答．其中 k 和 Q_F 分别和 m' 组成无量纲量

$$\bar{k}=\frac{k}{m'}\ ,\quad \bar{Q}_F=\frac{Q_F}{m'}\quad . \tag{6.237}$$

在有标量场作用的条件下都受到标量场的调制，例如由(6.206)

$$\bar{Q}_F=\left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3}\frac{1}{\bar{r}-\bar{a}}\quad , \tag{6.238}$$

其中

$$\bar{r}=m'r\ ,\quad \bar{a}=m'a \tag{6.239}$$

都受标量场调制．在核物质中随着密度的增加 m' 会减小，这使核子的无量纲尺度 $\bar{a}$ 减小，足够高的密度就可使 $\bar{a}$ 小过它的无量纲临界值．这使得 π 凝聚终于可能发生．

σ 模型是理想化了的．由它可了解 π 凝聚的机制．实际情况当然比这复杂．不过基本的物理内容和理论处理的基本方法则是相同的．

6.5 与标量场和矢量场相耦合的相对论核流体力学

核内状态的变化和核与核之间的碰撞过程都要用核动力学来研究．在局域密度近似下它表现为核流体力学．上章已用核流体力学研究过核的转动和振动．现在把介子自由度加进来，并将它改造成相对论的，以讨论高能核核碰撞和这类过程中介子场的响应．同时还将研究这类过程的因果性问题．

核流体由密度场 $n(\boldsymbol{r},t)$ 和速度场 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$ 表示．在每一个流点上建立一个随它运动的坐标系，在这个坐标系中流点是静止的，因而是一个局域的静止坐标系．前面几节讨论的是静止的核物质或静止的核．局域密度近似假定在静止条件下得到的关系在局域静止坐标系中成立．用下标‘0’标志局域静止坐标系中的量，任何惯性系中的量可由局域静止坐标系中的量经局域洛伦兹变换得到．每一时空点 $(\boldsymbol{r},t)$ 附近的局域洛伦兹变换由该点的流体速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$ 决定．例如

$$n(\boldsymbol{r},t)=\frac{n_0(\boldsymbol{r},t)}{\sqrt{1-v^2(\boldsymbol{r},t)}}\quad . \tag{6.240}$$

此处仍继续使用 $c=\hbar=1$ 的自然单位制．理想流体是无旋的，在局域静止坐标系中看，流点的局域环境各向同性，能量动量张量应为

$$\left.\begin{aligned} T_{ij}^{(\mathrm{fl})}&=\mathscr{P}^{(\mathrm{fl})}\delta_{ij}\ , && i,j,=1,2,3\ ,\\ T_{4i}^{(\mathrm{fl})}&=T_{i4}^{(\mathrm{fl})}=0\ , && i=1,2,3\ ,\\ T_{44}^{(\mathrm{fl})}&=-\mathscr{E}_0^{(\mathrm{fl})}\ . \end{aligned}\right\} \tag{6.241}$$

其中上标(fl)表示这是流体的量，包括了流体与矢量场和标量场的作用，却不包含各种场自身的贡献．$\mathscr{P}^{(\mathrm{fl})}$ 和 $\mathscr{E}_0^{(\mathrm{fl})}$ 分别为流体的压力和它在局域静止坐标系中的能量密度．压力总是对静止坐标系而言的，因此可略去下标‘0’. 按(6.110)引进速度四矢量 (U_μ)，可将能量动量张量(6.241)表成协变形式：

$$T^{(\mathrm{fl})}_{\mu\nu}=\mathscr{P}^{(\mathrm{fl})}\delta_{\mu\nu}+(\mathscr{P}^{(\mathrm{fl})}+\mathscr{E}^{(\mathrm{fl})}_0)U_\mu U_\nu\ ,\quad \mu,\nu=1,2,3,4\ . \tag{6.242}$$

在静止坐标系中 $\boldsymbol{v}=0$, 因而 $\boldsymbol{U}=0, U_4=\mathrm{i}$, 此式还原为(6.241). 定义在静止坐标系中的量如$\mathscr{P}^{(\mathrm{fl})}$和$\mathscr{E}^{(\mathrm{fl})}_0$等自然不会因洛伦兹变换而变,(6.242)是明显协变的,因而适用于任何惯性系. 在(6.60)中减去标量场本身的贡献,即得流体中每核子平均能量,因而

$$\mathscr{E}^{(\mathrm{fl})}_0=\varepsilon_1 n_0+2\pi m^2 n_0^2\left(\frac{\alpha_\omega}{m_\omega^2}+\frac{\alpha_\rho}{m_\rho^2}I^2\right), \tag{6.243}$$

其中 ε_1 仍由(6.58)表示,I 为局域不对称参数,因而也与时空坐标有关. 在用相对论考虑核子的有限体积效应并采用(6.105)后,密度与费米动量 η 的关系按(6.122)应为

$$n_0=\frac{2\eta^3}{3\pi^2}Q\ , \tag{6.244}$$

Q 由(6.121)定义,η 与中子费米动量 η_n 和质子费米动量 η_p 的关系仍为(6.55)和(6.56). 在忽略热激发的条件下可只考虑绝对温度为零的情况. 此时按(6.39)和(6.38)有

$$\mathscr{P}^{(\mathrm{fl})}=n_0\frac{\partial\mathscr{E}^{(\mathrm{fl})}_0}{\partial n_0}-\mathscr{E}^{(\mathrm{fl})}_0\ . \tag{6.245}$$

采用以核子康普顿波长为长度单位的自然单位制. 用 $\xi_\mu=mx_\mu$ 表时空点的第 μ 坐标,m 为核子质量. 相应能量单位为核子静止能量 m. 在此单位制中所有拉格朗日量密度均应除以 m^4. 在(6.2)中取只与标量场有关的拉格朗日量密度,写到这种单位制中即是

$$\mathscr{L}^{(\mathrm{s})}=-\frac{1}{2g^2}\frac{\partial\chi}{\partial\xi_\mu}\frac{\partial\chi}{\partial\xi_\mu}-U\ , \tag{6.246}$$

其中 χ 仍由(6.21)定义,U 由(6.61)表示. 在(4.192)中将 ∂_μ 理解为 $\frac{\partial}{\partial\xi_\mu}$,将 ξ 取为 ξ_ν,$\mathscr{L}$就用$\mathscr{L}^{(\mathrm{s})}$,知可定义

$$T^{(\mathrm{s})}_{\mu\nu}=\frac{1}{g^2}\frac{\partial\chi}{\partial\xi_\mu}\frac{\partial\chi}{\partial\xi_\nu}+\mathscr{L}^{(\mathrm{s})}\delta_{\mu\nu} \tag{6.247}$$

为标量场的能量动量张量,它对下标 μ 和 ν 对称且在只有标量场时

满足能量动量守恒律

$$\frac{\partial T^{(\mathrm{s})}_{\mu\nu}}{\partial\xi_\nu}=0\ . \tag{6.248}$$

将(6.2)整个代入(4.192)可得总系统的能量动量张量 $T_{\mu\nu}$,其中的核子部分,包括核子与标量场和矢量场的作用,可用(6.242)定义的核流体的能量动量张量 $T^{(\mathrm{fl})}_{\mu\nu}$ 代替. 在没有 ρ 和 ω 介子凝聚的条件下可设矢量场自身的能量动量张量为零,于是有

$$T_{\mu\nu}=T^{(\mathrm{fl})}_{\mu\nu}+T^{(\mathrm{s})}_{\mu\nu}\ . \tag{6.249}$$

能量动量守恒律为

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial\xi_\nu}=0\ ,\qquad \mu=1,2,3,4\ . \tag{6.250}$$

这四个方程左边组成一四维矢量. $\mu=1,2,3$ 的三个方程组成一个三维矢量方程

$$\nabla(\mathscr{P}^{(\mathrm{fl})}+\mathscr{L}^{(\mathrm{s})})+\frac{1}{g^2}\Box\chi\nabla\chi+\frac{1}{2g^2}\nabla\left(\frac{\partial\chi}{\partial\xi_\nu}\frac{\partial\chi}{\partial\xi_\nu}\right)$$
$$+\frac{\mathscr{P}^{(\mathrm{fl})}+\mathscr{E}^{(\mathrm{fl})}_0}{1-v^2}\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\tau}\right)+\boldsymbol{v}\frac{\partial}{\partial\xi_\nu}\left(\frac{\mathscr{P}^{(\mathrm{fl})}+\mathscr{E}^{(\mathrm{fl})}_0}{\sqrt{1-v^2}}U_\nu\right)=0\ , \tag{6.251}$$

其中 $\Box=\frac{\partial}{\partial\xi_\nu}\frac{\partial}{\partial\xi_\nu}$ 和 ∇ 分别为这个单位制中的达朗贝尔算符和梯度算符,$\tau=-\mathrm{i}\xi_4$ 为这个单位制中的时间. 在 $\mu=4$ 的方程上乘 i 得三维空间的标量方程

$$\frac{\partial(\mathscr{P}^{(\mathrm{fl})}+\mathscr{L}^{(\mathrm{s})})}{\partial\tau}+\frac{1}{g^2}\Box\chi\frac{\partial\chi}{\partial\tau}+\frac{1}{2g^2}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\chi}{\partial\xi_\nu}\frac{\partial\chi}{\partial\xi_\nu}\right)$$
$$-\frac{\partial}{\partial\xi_\nu}\left(\frac{\mathscr{P}^{(\mathrm{fl})}+\mathscr{E}^{(\mathrm{fl})}_0}{\sqrt{1-v^2}}U_\nu\right)=0\ . \tag{6.252}$$

将(6.252)式乘上 $\boldsymbol{v}$ 后与(6.251)式相加得

$$\nabla\mathscr{P}^{(\mathrm{fl})}+\boldsymbol{v}\frac{\partial\mathscr{P}^{(\mathrm{fl})}}{\partial\tau}+\left(\frac{1}{g^2}\Box\chi-\frac{\partial U}{\partial\chi}\right)\left(\nabla\chi+\boldsymbol{v}\frac{\partial\chi}{\partial\tau}\right)$$

$$+\frac{\mathscr{P}^{(\mathrm{fl})}+\mathscr{E}_0^{(\mathrm{fl})}}{1-v^2}\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\tau}\right)=0\ . \tag{6.253}$$

另一方面，由拉格朗日量密度(6.2)经哈密顿原理可得标量场方程．将它表成 χ 的方程并采用此处的自然单位制即是

$$\frac{1}{g^2}\ \Box\chi-\frac{\partial U}{\partial\chi}=\rho^{(s)}\ , \tag{6.254}$$

其中

$$\rho^{(s)}=\overline{\Psi}\Psi \tag{6.255}$$

为核子系的标量密度．将核子场 Ψ 用平面波(2.24)展开并量子化，得

$$\rho^{(s)}=\int_0^{\eta}\frac{\chi}{\sqrt{p^2+\chi^2}}\ \frac{\mathrm{d}n_0}{\mathrm{d}p}\ \mathrm{d}p\ , \tag{6.256}$$

其中 χ 仍由(6.21)定义，$\mathrm{d}n_0=\frac{\mathrm{d}n_0}{\mathrm{d}p}\,\mathrm{d}p$ 为局域静止坐标系中动量大小在 p 附近 $\mathrm{d}p$ 区间内的核子数密度．$\rho^{(s)}$ 为洛伦兹标量，因而可在任一惯性系中计算；而在跟随流点运动的局域静止坐标系中看，核子分布局域各向同性，粒子数密度只与动量大小有关而与动量方向无关．流体的能量密度

$$\mathscr{E}_0^{(\mathrm{fl})}=\int_0^{\eta}\sqrt{p^2+\chi^2}\ \frac{\mathrm{d}n_0}{\mathrm{d}p}\ \mathrm{d}p\ . \tag{6.257}$$

可见

$$\rho^{(s)}=\frac{\partial\mathscr{E}_0^{(\mathrm{fl})}}{\partial\chi}\ . \tag{6.258}$$

求这个偏微商时保持 η 和 n_0 不变．将(6.258)代人(6.254)得

$$\frac{1}{g^2}\ \Box\chi-\frac{\partial U}{\partial\chi}=\frac{\partial\mathscr{E}_0^{(\mathrm{fl})}}{\partial\chi}\ . \tag{6.259}$$

再将此式代人(6.253)，经整理后得与介子场耦合的核流体相对论欧拉方程(Zhang 1995)

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\tau}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}=-\frac{1-v^2}{\mathscr{P}^{(\mathrm{fl})}+\mathscr{E}_0^{(\mathrm{fl})}}\left[\nabla\mathscr{P}^{(\mathrm{fl})}+\boldsymbol{v}\frac{\partial\mathscr{P}^{(\mathrm{fl})}}{\partial\tau}+\frac{\partial\mathscr{E}_0^{(\mathrm{fl})}}{\partial\chi}\left(\nabla\chi+\boldsymbol{v}\frac{\partial\chi}{\partial\tau}\right)\right]\ . \tag{6.260}$$

这个方程和场方程(6.259)以及连续性方程

$$\frac{\partial n}{\partial\tau}+\nabla\cdot(n\boldsymbol{v})=0 \tag{6.261}$$

一起组成这个核子－介子场系统的完备动力学方程组．用这组方程可研究核内运动也可研究核－核碰撞过程，特别是研究相对论性重离子碰撞中的介子场响应．了解介子场响应可以探讨介子凝聚的具体条件，探讨在什么条件下可实际制备反常核，探讨在重离子碰撞过程中引出相干介子场的可能性．

压力 $\mathscr{P}^{(\mathrm{fl})}$ 是两个独立变量 n_0 和 χ 的函数．由(6.245)可简化(6.260)右端．经整理后得

$$\mu_0\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\tau}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\right)=-(1-v^2)\left(\nabla\mu_0+\boldsymbol{v}\frac{\partial\mu_0}{\partial\tau}\right)\ , \tag{6.262}$$

其中

$$\mu_0=\frac{\partial\mathscr{E}_0^{(\mathrm{fl})}}{\partial n_0} \tag{6.263}$$

为局域静止坐标系中核子的化学势．定义

$$\frac{D}{D\tau}=\frac{\partial}{\partial\tau}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\ , \tag{6.264}$$

它是流点的量对时间的微商，称为对时间的全微商．(6.262)又可表为

$$\frac{D}{D\tau}\ \frac{\mu_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2}}=-\sqrt{1-v^2}\ \nabla\mu_0\ . \tag{6.265}$$

此式具有相对论粒子运动方程的典型形式，好像流点有静止质量 μ_0 一样．由于流点速度 v 趋于光速 1 时有效"质量" $\frac{\mu_0}{\sqrt{1-v^2}}$ 趋于

无穷，不会有超光速运动．这可使理论符合因果律．

通常为确保因果律得到遵守还要检验声速是否低于光速．在没有介子波激发的条件下考虑这个问题．在长波极限下标量场的能量密度为 $U(\chi)$，整个系统的能量密度在局域静止坐标系中为

$$\mathscr{E}_0=\mathscr{E}_0^{(\mathrm{fl})}+U\ . \tag{6.266}$$

用它代替 (6.245) 中的 $\mathscr{E}_0^{(\mathrm{fl})}$，得总压力

$$\mathscr{P}=\mathscr{P}^{(\mathrm{fl})}-U\ , \tag{6.267}$$

它包含标量场的静压力．(6.260) 变为

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \tau}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}=-\frac{1-v^2}{\mathscr{P}+\mathscr{E}_0}\left[\nabla\mathscr{P}+\boldsymbol{v}\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial\tau}+\frac{\partial\mathscr{E}_0}{\partial\chi}\left(\nabla\chi+\boldsymbol{v}\frac{\partial\chi}{\partial\tau}\right)\right]. \tag{6.268}$$

在均匀静态核物质中 χ 为常数，由条件

$$\frac{\partial\mathscr{E}_0}{\partial\chi}=0 \tag{6.269}$$

决定．在没有标量介子波激发和长波极限下，可设标量场按此条件绝热地跟随核流体变化．即设 (6.269) 局域地成立．在此近似下 (6.268) 成为

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \tau}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}=-\frac{1-v^2}{\mathscr{P}+\mathscr{E}_0}\left(\nabla\mathscr{P}+\boldsymbol{v}\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial\tau}\right). \tag{6.270}$$

此式具通常相对论流体力学欧拉方程的形式，只是压力 $\mathscr{P}$ 和能量密度 $\mathscr{E}_0$ 均含标量场的贡献．设起始时流体处于静止状态，$n,\mathscr{P},\mathscr{E}_0$ 和 $\boldsymbol{v}=0$ 均与空时坐标无关．受扰动后分别产生增量 $n',\mathscr{P}',\mathscr{E}_0'$ 和 $\boldsymbol{v}'$，它们都被视为一级小量．将它们代入 (6.261) 和 (6.270) 中，精确到一级小分别得

$$\frac{\partial n'}{\partial\tau}+n\nabla\cdot\boldsymbol{v}'=0\ , \tag{6.271}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}'}{\partial\tau}=-\frac{\nabla\mathscr{P}'}{\mathscr{P}+\mathscr{E}_0}\ . \tag{6.272}$$

另一方面，将绝对零度下的热力学关系，$\mathrm{d}E=-\mathscr{P}\mathrm{d}V$ 平均到一个粒子上得 $\mathrm{d}\left(\frac{\mathscr{E}_0}{n}\right)=-\mathscr{P}\mathrm{d}\left(\frac{1}{n}\right)$．它又可表为

$$\mathscr{E}_0'-\frac{\mathscr{P}+\mathscr{E}_0}{n}\,n'=0\ . \tag{6.273}$$

将此式代入 (6.272)，注意在静止状态附近 $\frac{\mathscr{P}'}{n'}=\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial n}$ 和 $\frac{\mathscr{P}'}{\mathscr{E}_0'}=\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial\mathscr{E}_0}$ 都是常数，得

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}'}{\partial\tau}=-c_1^2\frac{\nabla n'}{n}\ , \tag{6.274}$$

其中

$$c_1=\sqrt{\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial\mathscr{E}_0}} \tag{6.275}$$

为常数．将 (6.271) 对 τ 微商，再将 (6.274) 代入得

$$\nabla^2 n'-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 n'}{\partial\tau^2}=0\ . \tag{6.276}$$

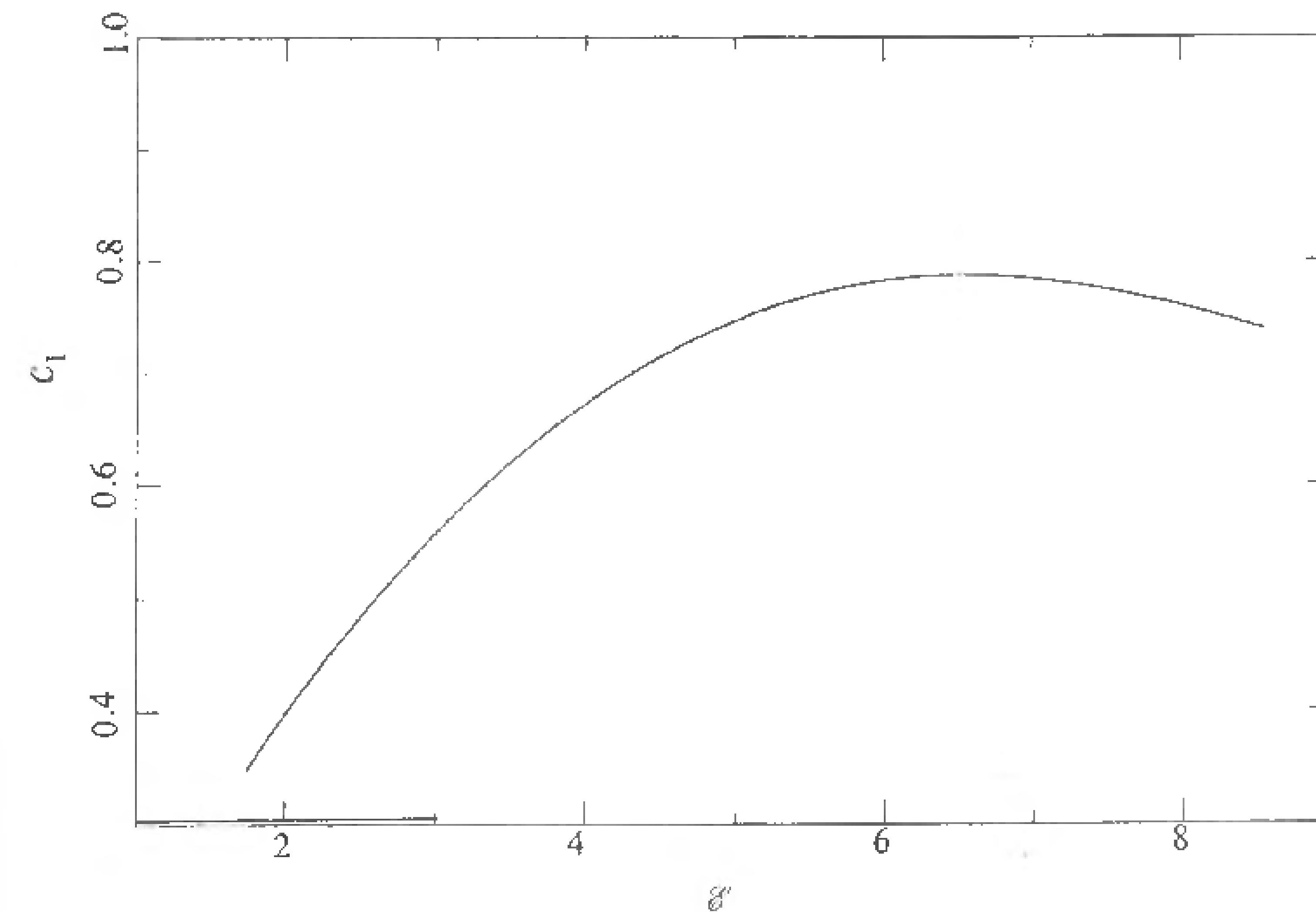


图 6-3　相对论核物质中声速随密度的变化．纵坐标为以光速为单位的声速，横坐标为以正常核密度为单位的能量密度[取自 Zhang 1995]．

这是一相速为 c_1 的波动方程．它描写的是核子数密度涨落 n' 的波动，即是核流体中声波的波方程．图 6-3 画出了用表 6-2列举的参数 I 按(6.275)算出的核物质中的声速．一直到很高的密度声速 c_1 都小于光速 $c=1$，表明 6.2 节中关于核物质的相对论理论确实符合因果律，是自洽的．

第 7 章　作为夸克系的原子核与核内夸克自由度

7.1　轻子在强子上的深度非弹性散射与强子的结构函数，标度律与强子的部分子模型

轻子不参与色作用，在强子内部与在正常真空中性质相同，可用来探测强子的结构．由于对轻子参与的弱电作用，特别对其中的电磁作用已有彻底的了解，对它们与强子碰撞过程中产生的种种现象可作彻底的分析，由它们探测到的关于强子结构的信息是可靠的．自 60 年代以来，人们对轻子在强子和核上的深度非弹性散射作了系统的实验和理论研究，发现了下面将着重介绍的标度律．由此建立起关于强子结构的部分子(Parton)模型．按此模型，强子由一些自旋为$\frac{1}{2}$ 的点粒子组成．这些无结构的点粒子叫部分子，可以理解为前面讲过的夸克和反夸克．(Feynman 1969, Bjorkon 1969)

图 7-1 表示轻子 l 在强子 h 上的碰撞．入射轻子的能量为 ω，动量为 $\boldsymbol{k}$．靶强子的能量为 E，动量为 $\boldsymbol{P}$．它们之间通过交换虚光子而相互作用．虚光子的四维动量用 q_μ 表示，$\mu=1,2,3,4$．虚光子是不可探测的，质量为虚数，即有

$$q_\mu q_\mu > 0\ . \tag{7.1}$$

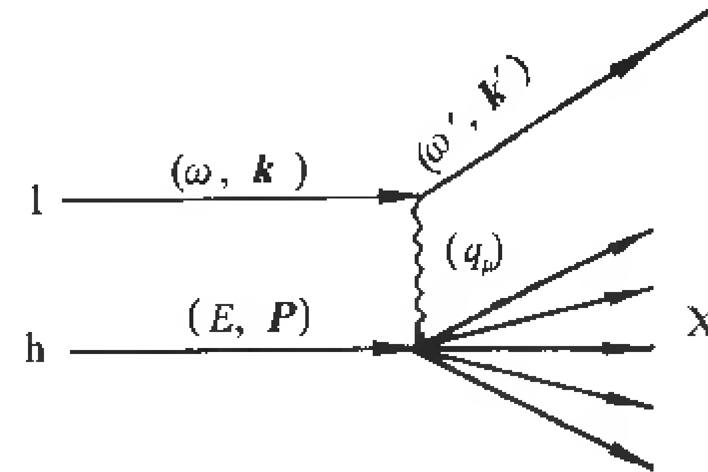


图 7-1　轻子在强子上的深度非弹性散射

在非弹性散射过程中轻子种类不变,能量和动量分别变为ω'和$\boldsymbol{k}'$.令$k_4=\mathrm{i}\omega$, $k_4'=\mathrm{i}\omega'$,电磁作用过程中能量动量守恒要求

$$q_\mu=k_\mu-k_\mu' \quad . \tag{7.2}$$

深度非弹性散射指能量动量转移特别大的非弹性散射.引进洛伦兹不变量

$$\nu\equiv-q_\mu P_\mu/M \ , \tag{7.3}$$

P_μ为靶强子的四维动量,M为靶强子的质量.在实验室系$\boldsymbol{P}=0$, $P_4=\mathrm{i}M$,

$$\nu=\omega-\omega' \tag{7.4}$$

为轻子在非弹性散射中的能量损失.深度非弹性散射具体定义为

$$\nu\to\infty \ , \qquad q^2\equiv q_\mu q_\mu\to\infty \tag{7.5}$$

条件下的非弹性散射.在这一极限下保持洛伦兹不变量

$$x\equiv q^2/(2M\nu) \tag{7.6}$$

取定值,对深度非弹性散射数据的分析为强子结构的研究提供了重要的信息.只测一个末态粒子的碰撞实验称为单举(inclusive)实验.轻子在强子上的单举深度非弹性散射实验中,只测被散射后的轻子,其余末态粒子的情形一概不问.这些被漠视的粒子在图7-1中用X表示,可视为靶强子接受从轻子转移来的大能量和大动量后的激发产物.它可包含大量强子,可有复杂的成分和分布.应当说它包含了大量信息,只是因受不清楚的强作用控制而难以分析.这就是它暂时被漠视的原因.这里唯一用到的是它的总能量E_X和总动量$\boldsymbol{P}_X$按能量动量守恒可用q_μ和P_μ表出:

$$E_X=E+\omega-\omega' \qquad \boldsymbol{P}_X=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}' \ . \tag{7.7}$$

因此,图7-1的强子顶点上的矩阵元应能由q_μ和P_μ表出.又由于靶强子的能量动量关系

$$P_\mu P_\mu=-M^2 \ , \tag{7.8}$$

这两个四动量只能组成两个独立的标量,它们可选为(7.3)和(7.6)定义的ν和x.

电磁场与电磁作用的拉格朗日量密度由(3.5)中的$\mathscr{L}_1$表示.

轻子场满足狄拉克方程,它的拉格朗日量密度由(3.13)中的$\mathscr{L}_2$表示,现在m为轻子质量.对带正电的轻子,电荷-电流密度四矢量j_μ由(3.14)表示,因而轻子-电磁场系统的总拉格朗日量密度由(3.16)中的$\mathscr{L}$表示.如果轻子带负电则要将(3.14)和(3.16)中的e换为$-e$.不过下面的计算要取绝对值平方,结果与电荷符号无关.取协变的洛伦兹规范

$$\partial_\mu A_\mu=0 \ , \tag{7.9}$$

电磁场方程(3.7)可写为

$$\Box A_\mu=-j_\mu \quad \mu=1,\ 2,\ 3,\ 4 \ . \tag{7.10}$$

它的解为

$$A_\mu(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^4}\iint\frac{\mathrm{d}^4q'}{q'^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\boldsymbol{q}'\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-q_0'(t-t')]}\,j_\mu(\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}\tau'\mathrm{d}t' \ , \tag{7.11}$$

其中$q'\equiv(q_\mu')\equiv(\boldsymbol{q}',\ \mathrm{i}q_0')$为电磁场一个平面分波的四维波矢量,$q'^2\equiv q_\mu'q_\mu'$, $\mathrm{d}^4q'\equiv\mathrm{d}\boldsymbol{q}'\mathrm{d}q_0'$, $\mathrm{d}\tau'$为$\boldsymbol{r}'$处的体积元.这可由

$$\begin{aligned}\Box\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{\mathrm{d}^4q'}{q'^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\boldsymbol{q}'\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-q_0'(t-t')]}&=-\frac{1}{(2\pi)^4}\int\mathrm{d}^4q'\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\boldsymbol{q}'\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-q_0'(t-t')]}\\&=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t')\end{aligned} \tag{7.12}$$

直接验证得知.在(3.14)右边取消灭一个波矢量为$\boldsymbol{k}$圆频率为ω的轻子,产生一个波矢量为$\boldsymbol{k}'$圆频率为ω'的轻子的项,得这一过程中的电流密度四矢量

$$j_\mu(\boldsymbol{r}',t')=\mathrm{i}e\frac{\sqrt{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'}}{(2\pi)^3}\,\overline{u}(\boldsymbol{k}')\gamma_\mu u(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}'-(\omega-\omega')t']} \ , \tag{7.13}$$

其中

$$u(\boldsymbol{k})=\sqrt{\frac{\omega+m}{2\omega}}\begin{bmatrix}\chi\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{\omega+m}\chi\end{bmatrix} \ , \tag{7.14}$$

$\omega=\sqrt{k^2+m^2}$, χ为轻子的自旋态(参阅(2.24)~(2.26)和(4.68)~

(4.70)).代入(7.11)得深度非弹性散射中轻子产生的电磁势

$$A_\mu(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{i}e\frac{\sqrt{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'}}{(2\pi)^3}\,\overline{u}(\boldsymbol{k}')\gamma_\mu u(\boldsymbol{k})\,\frac{1}{q^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}-q_0t)}\,, \tag{7.15}$$

其中 $q\equiv(q_\mu)\equiv(\boldsymbol{q},\mathrm{i}q_0)$ 和 q^2 分别在 (7.2) 和 (7.5) 中定义．用 (eJ_μ) 表示强子电流密度四矢量,强子与电磁场作用 的哈密顿量即为

$$\hat{H}'=-e\int A_\mu\hat{J}_\mu\mathrm{d}\tau\ . \tag{7.16}$$

它对散射矩阵的贡献为

$$\hat{S}=-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{H}'\mathrm{d}t=\mathrm{i}e\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\int A_\mu\hat{J}_\mu\mathrm{d}\tau\ . \tag{7.17}$$

此式好像只计及了强子顶点上的一级微扰,其实由于其中的 A_μ 将用(7.15)代入,即已考虑了轻子顶点的一级微扰,整个结果计及了两级微扰．由于时空平移对称,$\hat{J}_\mu$ 在靶强子态与强子末态间的矩阵元可写为

$$\langle \mathrm{X}|J_\mu|\mathrm{h}\rangle\,\frac{\sqrt{\mathrm{d}^3P\mathrm{d}^3P_\mathrm{X}}}{(2\pi)^3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_\mathrm{X})\cdot\boldsymbol{r}-(E-E_\mathrm{X})t]}\ , \tag{7.18}$$

其中 $\langle \mathrm{X}|J_\mu|\mathrm{h}\rangle$ 与时空坐标无关．取(7.17)在始态 a 和末态 b 之间的矩阵元 ,将(7.15)和(7.18)代入积分后得

$$S_{ba}=-\frac{\sqrt{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'\mathrm{d}^3P\mathrm{d}^3P_\mathrm{X}}}{\pi}\times\delta^4(q+P-P_\mathrm{X})\overline{u}(\boldsymbol{k}')\gamma_\mu u(\boldsymbol{k})\,\frac{\alpha}{q^2}\,\langle \mathrm{X}|J_\mu|\mathrm{h}\rangle\,, \tag{7.19}$$

其中 $\alpha=\dfrac{e^2}{4\pi}=\dfrac{1}{137.0}$ 为精细结构常数．四维 δ 函数

$$\delta^4(q+P-P_\mathrm{X})\equiv\delta(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_\mathrm{X})\delta(q_0+E-E_\mathrm{X}) \tag{7.20}$$

表示强子顶点处的能量动量守恒．$|S_{ba}|^2$ 代表由 a 到 b 的跃迁几率．两个四维 δ 函数自乘,其中一个因子由于

$$\delta(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_\mathrm{X})\mathrm{d}^3P=1\ ,\qquad 若\ \boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_\mathrm{X}-\boldsymbol{q}\ , \tag{7.21}$$

$$\delta(q_0+E-E_\mathrm{X})=\frac{T}{2\pi}\ ,\qquad 若\ E=E_\mathrm{X}-q_0\ , \tag{7.22}$$

而被约去,$T\to\infty$ 为相互作用经历的时间．单位时间内的跃迁几率为

$$\frac{|S_{ba}|^2}{T}=\frac{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'\mathrm{d}^3P_\mathrm{X}}{2\pi^3}\delta^4(q+P-P_\mathrm{X})\frac{\alpha^2}{q^4}\times|\overline{u}(\boldsymbol{k}')\gamma_\mu u(\boldsymbol{k})\langle \mathrm{X}|J_\mu|\mathrm{h}\rangle|^2\ . \tag{7.23}$$

与入射轻子波

$$\sqrt{\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}}\,u(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \tag{7.24}$$

相应的入射轻子流密度为 $\dfrac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\dfrac{|\boldsymbol{k}|}{\omega}$,以此除(7.23)右边,稍作整理得微分截面

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\omega'\mathrm{d}\Omega'}=\frac{4\alpha^2}{q^4}\,\frac{k'}{k}\,\frac{M}{E}\,L_{\mu\nu}W_{\mu\nu}\ , \tag{7.25}$$

其中 $k\equiv|\boldsymbol{k}|$, $k'\equiv|\boldsymbol{k}'|$, $\mathrm{d}\omega'$ 和 $\mathrm{d}\Omega'$ 由

$$\mathrm{d}^3k'=k'^2\mathrm{d}k'\mathrm{d}\Omega'=k'\omega'\mathrm{d}\omega'\mathrm{d}\Omega' \tag{7.26}$$

定义,且

$$L_{\mu\nu}\equiv\frac{\omega\omega'}{2}\sum_{\sigma\sigma'}\overline{u}(\boldsymbol{k}')\gamma_\mu u(\boldsymbol{k})\overline{u}(\boldsymbol{k})\gamma_\nu u(\boldsymbol{k}')\ , \tag{7.27}$$

$$W_{\mu\nu}\equiv\frac{E}{M}\sum_\mathrm{X}\overline{\langle \mathrm{X}|J_\mu|\mathrm{h}\rangle\langle \mathrm{h}|J_\nu|\mathrm{X}\rangle}\ . \tag{7.28}$$

整理中用到

$$\delta(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_\mathrm{X})\mathrm{d}^3P_\mathrm{X}=1,\qquad 若\ \boldsymbol{P}_\mathrm{X}=\boldsymbol{q}+\boldsymbol{P}\ . \tag{7.29}$$

此式约去了(7.23)中四维 δ 函数中的三维因子,并表明图 7-1 中强子顶点的动量守恒．(7.27)右边除因子 $\omega\omega'$ 外是(7.23)中绝对值平方对轻子末态自旋 σ' 的求和和对轻子始态自旋 σ 的平均．(7.28)右边除因子 E/M 外是(7.23)中绝对值平方对靶强子 h 自旋态的平均和对强子末态 X 的求和．只是求和 $\sum_\mathrm{X}$ 是在一定动量 $\boldsymbol{P}_\mathrm{X}$ 和一定能量 E_X 的条件下进行的．动量 $\boldsymbol{P}_\mathrm{X}$ 已由(7.29)固定．对 E_X 的积分则在推导(7.25)时做毕．正是由

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(q_0+E-E_X)\mathrm{d}E_X=1 \tag{7.30}$$

约去了(7.23)中四维δ函数的第四维因子,并要求图7-1中强子顶点能量守恒. 在推导中还用到四维流密度矢量的性质

$$[\mathrm{i}\bar{u}(\boldsymbol{k}')\gamma_\mu u(\boldsymbol{k})]^*=\begin{cases}\mathrm{i}\bar{u}(\boldsymbol{k})\gamma_\mu u(\boldsymbol{k}') & 若\ \mu=1,2,3,\\ -\mathrm{i}\bar{u}(\boldsymbol{k})\gamma_\mu u(\boldsymbol{k}') & 若\ \mu=4,\end{cases} \tag{7.31}$$

和

$$\langle \mathrm{X}|J_\mu|\mathrm{h}\rangle^*=\begin{cases}\langle \mathrm{h}|J_\mu|\mathrm{X}\rangle & 若\ \mu=1,2,3,\\ -\langle \mathrm{h}|J_\mu|\mathrm{X}\rangle & 若\ \mu=4.\end{cases} \tag{7.32}$$

(7.27)右边对轻子始末态自旋求和可直接算出. 通常采用投影算符方法(详见附录II),结果为

$$L_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\left[\delta_{\mu\nu}(k_{\mu'}k'_{\mu'}+m^2)-k_\mu k'_\nu-k'_\mu k_\nu\right]. \tag{7.33}$$

它显然是一个洛伦兹二阶张量,且有性质

$$L_{\mu\nu}q_\nu=q_\mu L_{\mu\nu}=0 . \tag{7.34}$$

这个性质是规范不变性的表现. 这是因为张量 $L_{\mu\nu}$ 是由流密度矢量组成的,在电磁作用中以形式 $L_{\mu\nu}A_\nu$ 或 $A_\mu L_{\mu\nu}$ 出现. 在电磁势的规范变换中 $A_\mu\to A_\mu-\mathrm{i}\partial_\mu\Lambda$,因此上列形式将增加一项 $-\mathrm{i}L_{\mu\nu}\partial_\nu\Lambda$ 或 $-\mathrm{i}(\partial_\mu\Lambda)L_{\mu\nu}$. 电磁作用的规范不变性应使这种增加为零. 将Λ用平面波展开,能量动量守恒从其中选出分波 $e^{iq_\mu x_\mu}$, 其中四维波矢量 q_μ 满足(7.2). 这使(7.34)足以保证理论的规范不变性. $W_{\mu\nu}$ 是强子顶点上与 $L_{\mu\nu}$ 对应的量,因此也应是洛伦兹张量,且满足

$$q_\mu W_{\mu\nu}=W_{\mu\nu}q_\nu=0 . \tag{7.35}$$

如前所述,强子顶点上的量应能由 (q_μ) 和 (P_μ) 组成. 由它们组成的具有性质(7.35)的二阶洛伦兹张量的一般形式为

$$W_{\mu\nu}=-W_1\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)-\frac{W_2}{M^2}\left(P_\mu-\frac{q_{\mu'}P_{\mu'}}{q^2}q_\mu\right)\left(P_\nu-\frac{q_{\nu'}P_{\nu'}}{q^2}q_\nu\right), \tag{7.36}$$

W_1 和 W_2 为标量,是 ν 和 x 的函数.

对轻子的深度非弹性散射,轻子质量 m 已不重要,可以略去. 在此条件下

$$k_\mu k_\mu=k'_\mu k'_\mu=0 , \tag{7.37}$$

$$q^2=-2k_\mu k'_\mu . \tag{7.38}$$

(7.33)简化为

$$\begin{aligned}L_{\mu\nu}&=\frac{1}{2}(\delta_{\mu\nu}k_{\mu'}k'_{\mu'}-k_\mu k'_\nu-k'_\mu k_\nu)\\&=\frac{1}{2}(\delta_{\mu\nu}k_{\mu'}k'_{\mu'}+q_\mu k_\nu+k_\mu q_\nu-2k_\mu k_\nu) .\end{aligned} \tag{7.39}$$

在实验室坐标系中 $\boldsymbol{P}=0$, $P_0=E=M$. 代入(7.36), 算得在实验室系看深度非弹性散射有

$$L_{\mu\nu}W_{\mu\nu}=\omega\omega'\left(2W_1\sin^2\frac{\theta}{2}+W_2\cos^2\frac{\theta}{2}\right), \tag{7.40}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\nu\mathrm{d}q^2}=\frac{4\pi\alpha^2}{q^4}\frac{\omega'}{\omega}\left(2W_1\sin^2\frac{\theta}{2}+W_2\cos^2\frac{\theta}{2}\right), \tag{7.41}$$

其中 θ 为轻子的散射角,即 $\boldsymbol{k}'$ 与 $\boldsymbol{k}$ 之间的交角. 实验结果确可用此式拟合,而且发现由拟合实验得到的 $W_1\neq 0$, 而 νW_2 在深度非弹性极限条件下与 ν 无关,只是 x 的函数. 这就是著名的标度(Scaling)律. 具体地说,固定 x, νW_2 在 $q^2\to\infty$ 和 $\nu\to\infty$ 时的极限存在. 将此极限记作 $F(x)$, 它称为靶强子的结构函数,能反映靶强子的结构. 标度律可由强子的部分子模型说明. 这个模型将 $F(x)$ 与强子的部分子结构联系起来.

设强子由一些部分子组成,这些部分子是1/2自旋的无结构点粒子,因此是定域狄拉克场的量子. 对它们就像对轻子一样可以用狄拉克理论描写. 采用强子在其中高速运动的坐标系,在这种坐标系中看强子有极高的动量和能量. 部分子在强子内部的费米运动和相

互束缚在这种坐标系中看来变得微不足道，可以忽略．这种坐标系的极限称为无穷动量坐标系．在无穷动量坐标系中部分子是自由的，它们以与强子相同的速度运动，而这个速度的大小即为光速．可见在这种坐标系中部分子和强子的质量都可忽略．部分子模型在这种极限条件下计算 W_1 和 W_2，由于它们都是标量，算得的结果适用于任何惯性系，自然也适用于实验室系．

轻子在强子上的散射截面应为它在其中每个部分子上散射截面之和．考虑它在一个部分子上的散射．设这个部分子以 e 为单位的电荷为 Q，四动量为

$$p_\mu = yP_\mu \quad . \tag{7.42}$$

由于在无穷动量坐标系中强子和部分子都被当作是无质量的，它们的四动量成比例，y 表示这个部分子的四动量在强子四动量中占的份额，显然有

$$0 \leqslant y \leqslant 1 \ . \tag{7.43}$$

用这个部分子代替强子，重复前面的推导．为此，用 d^3p 代替 d^3P，d^3p' 代替 d^3P_X，(p'_μ) 为部分子末态四动量，再用 $\delta^4(q+p-p')$ 代替 $\delta^4(q+P-P_X)$．用

$$\left.\begin{aligned}&\delta(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\mathrm{d}^3p'=1\ ,\quad 若\ \boldsymbol{p}'=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}\ ,\\&\delta(q_0+p_0-p'_0)=\frac{T}{2\pi}\ ,\ 若\ p'_0=p_0+q_0\end{aligned}\right\} \tag{7.44}$$

代替 (7.21) 和 (7.22) 消去取跃迁振幅绝对值平方时出现的一个四维 δ 函数因子．剩下的一个因子中的三维 δ 函数用

$$\delta(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\mathrm{d}^3p=1\ ,\quad 若\ \boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{q} \tag{7.45}$$

消去．第四维因子则成为

$$\begin{aligned}\delta(p'_0-p_0-q_0)&=2p'_0\,\delta[p'^2_0-(p_0+q_0)^2]\\&=p'_0\,\delta(q_\mu p_\mu+\frac{1}{2}q_\mu q_\mu)=p'_0\,\delta[P_\mu q_\mu(y-x)]\\&=-\frac{p'_0}{P_\mu q_\mu}\,\delta(y-x)\ ,\end{aligned} \tag{7.46}$$

在末一等号处用了 $P_\mu q_\mu<0$．这个部分子对 $W_{\mu\nu}$ 的贡献为

$$\begin{aligned}w_{\mu\nu}&=-\frac{Q^2p'_0}{P_{\mu'}q_{\mu'}}\,\delta(y-x)\frac{E}{M}\frac{1}{2}\sum_{\sigma,\sigma'}\overline{u}(\boldsymbol{p}')\gamma_\mu u(\boldsymbol{p})\overline{u}(\boldsymbol{p})\gamma_\nu u(\boldsymbol{p}')\\&=-\frac{Q^2}{P_{\mu'}q_{\mu'}}\,\delta(y-x)\frac{1}{My}\frac{1}{2}(\delta_{\mu\nu}p_{\mu'}p'_{\mu'}-p_\mu p'_\nu-p'_\mu p_\nu)\\&=-w_1(\delta_{\mu\nu}-\frac{q_\mu q_\nu}{q^2})\\&\quad-\frac{w_2}{M^2}\left(P_\mu-q_\mu\frac{P_{\mu'}q_{\mu'}}{q^2}\right)\left(P_\nu-q_\nu\frac{P_{\nu'}q_{\nu'}}{q^2}\right)\ ,\end{aligned} \tag{7.47}$$

其中

$$w_1=\frac{Q^2}{2M}\,\delta(y-x)\ ,\qquad w_2=\frac{Q^2x}{\nu}\,\delta(y-x)\ . \tag{7.48}$$

设强子内电荷为 Q_i 的第 i 种部分子在 y 的区间 $\mathrm{d}y$ 内共有 $n_i(y)\mathrm{d}y$ 个．将其中各种部分子的贡献加起来得

$$\nu W_2=\sum_i Q_i^2xn_i(x)=F(x)\ , \tag{7.49}$$

$$W_1=\frac{1}{2Mx}\ \nu W_2=\frac{1}{2Mx}\ F(x)\ . \tag{7.50}$$

(7.49) 符合标度律，而且直接将强子的结构函数 $F(x)$ 与强子内部分子的分布函数 $n_i(x)$ 联系起来．动量分布函数 $n_i(y)$ 要符合归一化条件

$$\sum_i\int_0^1 n_i(y)y\mathrm{d}y=1\ . \tag{7.51}$$

由于部分子可以是夸克也可以是反夸克，因此总数可以是无穷大．

7.2 EMC-SLAC 效应与核内夸克自由度

在深度非弹性散射实验中入射轻子能量都很高．如果靶粒子是一个原子核，则在入射轻子看来核内核子之间的束缚和核子的费米运动能量都是微不足道的，可以略去．因此曾经预期，核内核子的

结构函数与自由核子的一样,轻子在核上的深度非弹性散射的单举截面应是在单个核子上的单举截面的简单和．如果将单举截面折合到一个核子上则应与单个自由核子的单举截面相等．而且这种情况应与核的种类无关,即与核的核子数 A 和电荷数 Z 无关．然而实验结果与这种预期明显不符．

1983 年,欧洲 μ 子协作组(按英文字头简称 EMC)发表了他们用 μ 子进行这种实验的结果(Aubert 1983).令人惊讶地表明,铁核内核子的截面和结构函数与氘核内核子的截面和结构函数显著不同．这一结果称为 EMC 效应．这效应很快被伯克利(Berkeley)-费米实验室(Fermilab)-普林斯顿(Princeton)协作组核实(Clark 1983)．人们重新审查原先的电子在铁和铝上散射的实验结果,同样发现了核环境对散射的影响(Bodek 1983)．随后人们在 SLAC 用电子对周期表上一系列元素的核进行了系统的深度非弹性散射研究

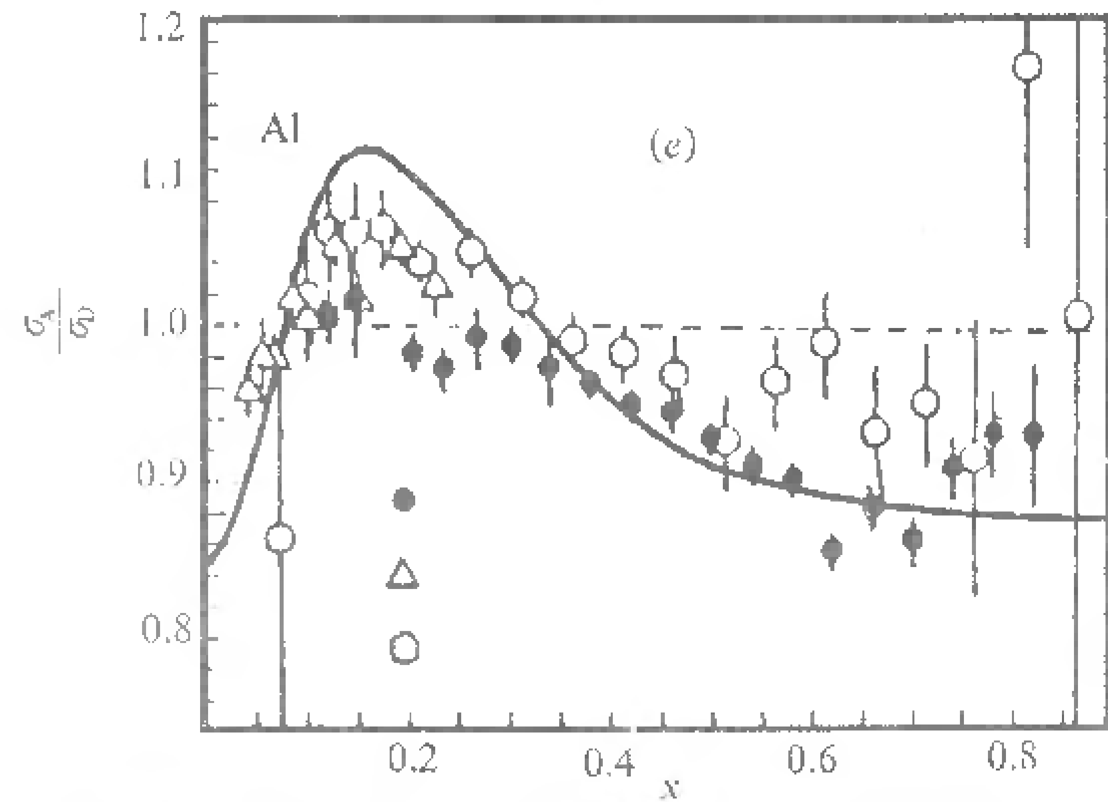


图 7-2 高能电子在铝核上深度非弹性散射每核子单举截面 σ_A 与在氘核上深度非弹性散射每核子单举截面 σ_D 之比随比约肯变量 x 的变化[取自 Faissner 1984]

(Arnold 1984),除再次核实了 EMC 效应外对效应的细节作了定量补充．还了解了这一效应随核质量数 A 变化的规律．因此这效应又称 EMC-SLAC 效应．大体说来,这效应从氦 4 到金约增长了一倍．

图 7-2 表示出电子在铝核上深度非弹性散射的 EMC-SLAC 效应．纵坐标是铝核中核子单举截面 σ_A 与氘核中核子单举截面 σ_D 之比,横坐标为(7.6)中定义的标量 x. $\frac{\sigma_A}{\sigma_D}$ 相对于 1 的偏离表明原子核不是核子的简单堆积,表示出核环境对核内核子状况的影响．这就是 EMC-SLAC 效应．

EMC 效应的发现在粒子物理和核物理学界引起轰动．普遍认为这表明核内核子的结构与自由核子不同,而且不同核内核子的结构也不同．由于核子结构就是核子内部的夸克结构,于是认为核子的夸克结构在核内并未冻结,而受核环境的影响,是可变的,在不同核内是不同的．这就是说存在核内夸克自由度．作这种结论的前提是本节开始时提到的认识,即在高能轻子看来核内核子间的束缚和费米运动是不重要的,一切变化来自核子内部．人们花了好几年的时间来检验这一前提,即实际计算核子间的束缚和核内核子的费米运动对轻子深度非弹性散射的影响．结论依然是这种影响远不足以说明 EMC 现象．EMC-SLAC 效应要由核子本身结构受核环境的影响来说明．

图 7-2 中的实线是在 EMC-SLAC 效应发现后不久考虑核内夸克自由度算出的一条理论曲线．费斯勒(Faissner)等人设核内一部分核子形成了四核子的 12 夸克集团,在引进少数可调参数后较好地符合了大量 EMC-SLAC 数据,这条曲线是他们的结果之一．费斯勒的模型只是一个例子,说明考虑核内夸克自由度可以得到什么样的结果．至于核内夸克自由度应如何考虑,则不只取决于 EMC-SLAC 效应,还需全面顾及核物理和强子物理各方面已有的实验和理论成果．EMC-SLAC 效应的特殊意义是向我们强烈提示考虑核内夸克自由度的重要性．

7.3 核物质的口袋晶体模型

在 EMC 效应发现后不久,在思考核内夸克自由度的热潮中,1984 年在世界上几个地方几乎同时在考虑建立核物质的口袋晶体模型. 这一工作的目的并非直接去解释 EMC 效应,而是要建立一个合理的理论框架,来全面考虑核内夸克自由度问题. 作为核物质的一种模型,它应该首先能符合核物质的基本数据,特别是核物质的平衡密度和平衡条件下的每核子结合能. 在这基础上才能谈论解释像 EMC 效应这种可能特别反映核内夸克自由度的现象. 口袋模型中 MIT 口袋模型最简单,口袋晶体模型中自然也是 MIT 口袋晶体模型(Zhang 1986, Zhang 1992b)最简单. 正因为它最简单因而可处理得最彻底,最少任意性. 下面就集中介绍核物质的 MIT 口袋晶体模型.

在口袋模型看来,核子既是一个装有夸克的口袋,由核子组成的核或核物质就应是口袋的集合体,或者说是口袋物质. 按照关于物质的认识,这种口袋物质可以是口袋气体、口袋液体或口袋固体. 简单的估计表明,即使口袋半径为 1 fm, 在正常核密度下口袋已经彼此挤在一起,因此很难把核物质设想为口袋气体. 由于液滴模型的成功,口袋液体的想法似乎很诱人. 然而液滴模型只能说明核的平均性质. 壳效应却表明原子核并非均匀结构. 有人将壳效应作为原子核晶状结构的证据(Cook 1987). 这似乎表明将核物质当作口袋固体,即口袋晶体更为合理. 另一方面,无限大晶体有较好的对称性,理论处理较容易,这就促使人们发展核物质的口袋晶体模型.

考虑简单立方晶格. 它是正立方格子的无穷重复. 相邻的正立方格子面对面地靠在一起,各有一个表面与对方的一个表面重合. 每一个这样的正立方格子称为一个晶胞. 晶胞的边长 a称为格子常数. 每个晶胞内放一个代表核子的口袋. 如果认定在正常核密度

下每核子平均占有体积 $\frac{4\pi}{3}r^3$, $r=1.175\,\text{fm}$, 那么这也就应是晶胞的体积 a^3. 由此可得正常核密度下的格子常数

$$a=\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}1.175\ \text{fm}=1.894\ \text{fm} \quad . \tag{7.52}$$

如果一个核子口袋的半径为 1fm, 直径就是 2fm, 可见正常核密度下一个晶胞内放不下一个核子口袋. 如果硬往里放,并将口袋中心放在晶胞中心上,口袋就会被晶胞的上、下、左、右、前、后六个面切掉六块(图 7-3). 于是在相邻晶胞内的两个口袋间就开出一个窗口,窗口张角的余弦(见图 7-3)在正常核密度下对 1fm半径的口袋为

$$\cos\theta_0=0.947 \ . \tag{7.53}$$

窗口既开,夸克就可以从原来的一个口袋进入另外的口袋. 实际上代表核子的一个个口袋现在规则地连成了一个多连通的巨口袋. 这就是代表核物质的口袋晶体. 夸克在这巨口袋内自由运动,而在巨口袋表面,即在原来代表核子的球口袋表面的未被切除的部分满足 MIT 边条件(1.140). 由于晶体的周期性平移对称,可将求解夸克在晶体内运动的问题归结为它在一个晶胞内运动的问题. 为此要在窗口也加上边条件. 将晶胞中心取作坐标原点,将相对的两个窗口中心联线取作坐标轴. 六个窗口正好提供互相垂直的三条坐标轴 x,y 和 z. 在 x 方向,y 方向和 z 方向的三对窗口上加周期边条件

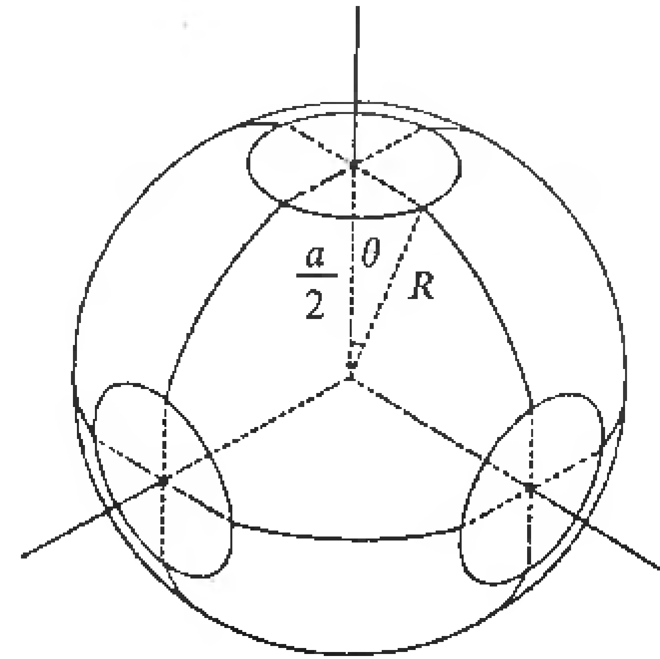


图 7-3 放在简单立方晶格内开了六个窗口的球口袋,有三个窗口在背面[取自 Zhang 1992b]

$$
\left.\begin{aligned}
\psi\left(\frac{a}{2},y,z\right)&=e^{ik_xa}\psi\left(-\frac{a}{2},y,z\right),\\
\psi\left(x,\frac{a}{2},z\right)&=e^{ik_ya}\psi\left(x,-\frac{a}{2},z\right),\\
\psi\left(x,y,\frac{a}{2}\right)&=e^{ik_za}\psi\left(x,y,-\frac{a}{2}\right).
\end{aligned}\right\}\tag{7.54}
$$

它们和口袋表面的 **MIT** 边条件(1.140)合起来称联合边条件．这组条件可以用来确定晶胞内满足狄拉克方程的夸克波函数和能量，就象条件(1.140)确定球口袋中夸克的波函数和能量一样．晶胞已不再是球对称的，其中自由狄拉克粒子的波函数已不再是球面波(1.150)，不过仍可用不同球面波叠加而成．设组成核子的 u,d 夸克是无质量的，它们满足狄拉克方程的球面波为①

$$
\Phi^{\varepsilon}_{\kappa\mu}(r,\theta,\varphi)=A^{\varepsilon}_{\kappa}\begin{bmatrix} j_{l_\kappa}(\varepsilon r)\chi_{\kappa\mu}(\theta,\varphi)\\ i\,\mathrm{sgn}(\kappa) j_{l_{-\kappa}}(\varepsilon r)\chi_{-\kappa\mu}(\theta,\varphi)\end{bmatrix}, \tag{7.55}
$$

ε为夸克的能量，$\kappa=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$ 为狄拉克量子数，它与总角动量量子数j_κ、轨道角动量量子数l_κ和宇称 Π_κ 的关系分别为 $j_\kappa=|\kappa|-\frac{1}{2}$，$l_\kappa=|\kappa|-[1-\mathrm{sgn}(\kappa)]/2$，和 $\Pi_\kappa=(-1)^\kappa\mathrm{sgn}(\kappa)$. 此处 $j_l(x)$ 为 x 的 l 阶球贝塞耳函数；$\mathrm{sgn}(x)$ 为 x 的符号函数，对 $x>0$ 取 $+1$，对 $x<0$ 取 -1. $\chi_{\kappa\mu}(\theta,\varphi)$为旋量球谐函数，即$\frac{1}{2}$自旋粒子的总角动量量子数为$j_\kappa$，轨道角动量量子数为 l_κ，而总角动量在极轴上的投影量子数为 μ 的本征函数．A^{ε}_{κ}为归一化常数，保证

$$
\int_{\mathrm{bag}}\Phi^{\varepsilon\dagger}_{\kappa\mu}(\boldsymbol{r})\Phi^{\varepsilon}_{\kappa\mu}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau=1 , \tag{7.56}
$$

其中积分区域 bag 对一个完整口袋即为口袋内部，而对硬塞进一个晶胞因此开了窗口的口袋就是它在这个晶胞内的部分．晶胞内夸克的波函数为

$$
\psi^{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}\nu}(\boldsymbol{r})=\sum_{\kappa\mu}C^{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}\nu}(\kappa\mu)\Phi^{\varepsilon}_{\kappa\mu}(\boldsymbol{r}) , \tag{7.57}
$$

$\boldsymbol{k}=(k_x,k_y,k_z)$ 为夸克在晶体内运动的赝动量，三个分量k_x,k_y 和 k_z 定义在边条件(7.54)中．展开系数 $C^{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}\nu}(\kappa\mu)$ 和能量 ε 由联合边条件确定．球形对称被破坏使表示角动量和宇称的 κ 和 μ 不再是好量子数．这表现为(7.57)右边对它们的不同取值求和．不过现在还残存球形对称的一个子对称，即简单立方晶格的点群对称，也就是正立方体的对称．它包括绕正立方体相对面中心联线的 90°转动，绕相对棱中心联线的 180°转动和绕主对角线的 120°转动，以及由它们衍生出的转动和反演下的对称．简单立方晶格中运动的夸克的波函数应能表成这种点群不可约表示的基底．(7.57)引进的量子数ν就是用来区别这些不可约表示的基底的．可将它取得与球对称条件下夸克态(7.55)中的量子数 μ 对应．在表示自由核子的球口袋中 $\mu=\pm\frac{1}{2}$，与之对应有 $\nu=\pm\frac{1}{2}$．不难看出，点群对称使 ν的这两个取值对应的态中夸克能量相同．即夸克能级对 ν的符号简并．

周期边条件(7.54)随夸克赝动量 $\boldsymbol{k}$ 连续变化．这使夸克的定态波函数和能量都随 $\boldsymbol{k}$ 连续变化．这种能量可取值的连续变化范围称为能带，它是由原来球口袋中的夸克能级扩张而成的．球口袋中的不同能级扩张成不同能带．周期边条件(7.54)本身也有周期性．在 k_x,k_y 或 k_z 上加 $\frac{2\pi}{a}$ 的整数倍，条件(7.54)不变，由它定出的夸克态和夸克能量自然也不变．因此可将 k_x,k_y 和 k_z 的变化限制在区间$\left(-\frac{\pi}{a},\frac{\pi}{a}\right)$上，且区间两端代表同一物理状态．由此限定的赝动量 $\boldsymbol{k}$ 变化的三维区域称为一个布里渊区(Brillouin zone)．能带内能量随赝动量的变化可藉这种周期性展成傅立叶(Fourier)

① 参阅张启仁，《量子力学》，§16.5，高等教育出版社，1989.

级数．$\boldsymbol{k}$空间的傅立叶级数中越高的分波随 $\boldsymbol{k}$ 变化的周期越短，由测不准关系知应是越远的晶胞的贡献．越远的晶胞的贡献应当越小，可见这种傅立叶级数应当较快地收敛．在实际计算中应可只取最低的几阶分波．尤其当在布里渊区中平均某些量时，高阶傅立叶分波很快地忽正忽负地变化，致使它的贡献显著地自我抵消而很小．在傅立叶级数中只保留很少几个低分波，这就提供了一个将能带参数化的办法．在进一步考虑简单立方晶格点群的对称性后，可将其中夸克的能带表成

$$\varepsilon(\boldsymbol{k})=\sum_{i=0}^{3}B_i f_i(\boldsymbol{k}) \ , \qquad (7.58)$$

$$\left.\begin{aligned} &f_0(\boldsymbol{k})=1 \ ,\\ &f_1(\boldsymbol{k})=\cos(k_x a)+\cos(k_y a)+\cos(k_z a) \ ,\\ &f_2(\boldsymbol{k})=\cos(k_x a)\cos(k_y a)+\cos(k_y a)\cos(k_z a)\\ &\qquad +\cos(k_z a)\cos(k_x a) \ ,\\ &f_3(\boldsymbol{k})=\cos(k_x a)\cos(k_y a)\cos(k_z a) \ . \end{aligned}\right\} \qquad (7.59)$$

四个参数 B_0, B_1, B_2 和 B_3 由布里渊区中四个点上的单夸克能量 $\varepsilon(\boldsymbol{k})$ 来确定．这四个点可取为 $\boldsymbol{k}=(0,0,0)$，$(0,0,\frac{\pi}{a})$，$(\frac{\pi}{a},\frac{\pi}{a},0)$，$(\frac{\pi}{a},\frac{\pi}{a},\frac{\pi}{a})$．对这四个点上的夸克能量作数值计算，将算得的结果代入(7.58)左边即可解得参数 B_0, B_1, B_2 和 B_3．它们随窗口张角余弦 $\cos\theta_0$ 的变化表示在图 7-4 中．

一个给定赝动量 $\boldsymbol{k}$ 对应两个‘自旋态’$\nu=\pm\frac{1}{2}$、两个同位旋态 u和 d、以及三种不同色态．它们共搭配出$2\times2\times3=12$个态．将夸克按能量从低到高的次序填入能带中，直至费米能量 ε_f．于是赝动量为 $\boldsymbol{k}$ 的夸克数为

$$F(\boldsymbol{k})=\begin{cases}12 \ , & 若\ \varepsilon(\boldsymbol{k})\leqslant\varepsilon_f \ ;\\ 0 \ , & 否则\ .\end{cases} \qquad (7.60)$$

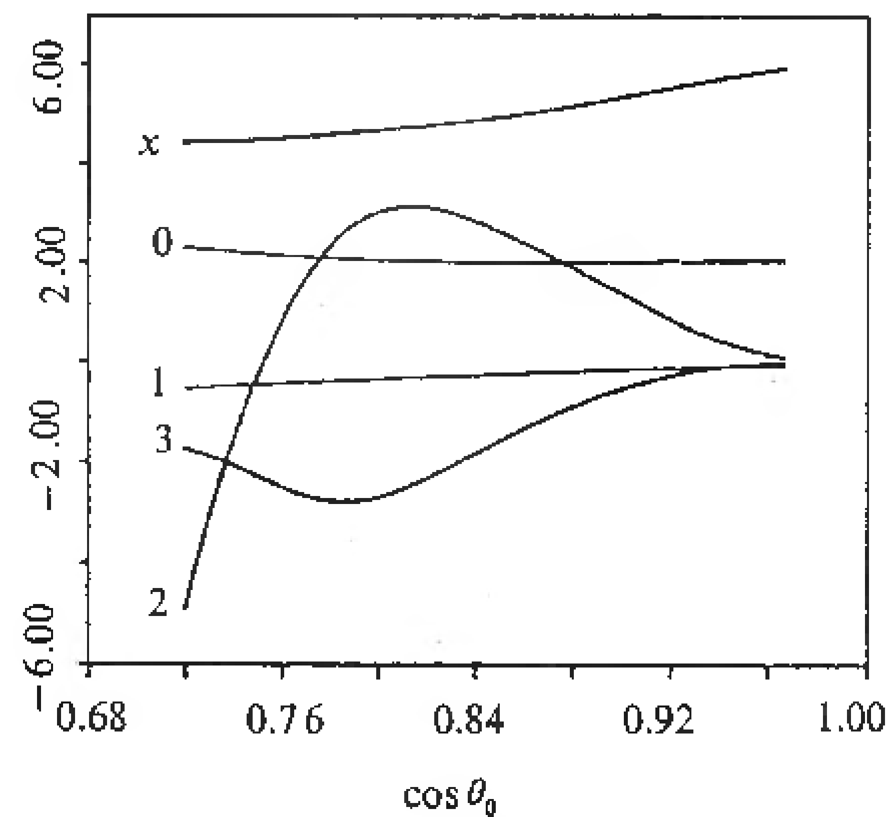


图 7-4　B_i 和 E_q 随 $\cos\theta_0$ 的变化，曲线 i 对 $i=0,1$ 表 RB_i，对 $i=2,3$ 表 10^2RB_i．曲线 x 表 RE_q．

这里“赝动量为 $\boldsymbol{k}$的夸克数”确切地说是赝动量在 $\boldsymbol{k}$ 附近一个微小区域 d^3k内的归一化夸克态中的夸克数．由于每个晶胞中有一个核子，因而有三个夸克，晶胞的体积为 a^3，故

$$\frac{a^3}{(2\pi)^3}\iiint_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}}F(\boldsymbol{k})d^3k=3 \ . \qquad (7.61)$$

此式与(7.60)联合，并利用(7.58)，可定出费米能量 ε_f．将它代入(7.60)即得一完全确定的分布函数 $F(\boldsymbol{k})$，用它和定好了参数的单夸克能量表达式(7.58)可算得每核子中单夸克能量和的平均值

$$E_q=\frac{a^3}{(2\pi)^3}\iiint_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}}\varepsilon(\boldsymbol{k})F(\boldsymbol{k})d^3k \ . \qquad (7.62)$$

算得的 E_q 与 $\cos\theta_0$ 的关系也表示在图 7-4 中．

在用联合边条件求得 ε 和 $C^{\varepsilon}_{k\nu}(\kappa\mu)$ 后代入 (7.57)即得单夸克波函数．它们的斯累特 (Slater)行列式就是定态夸克系的零级近似波函数．有了波函数就可计算夸克系的各种量，包括夸克间的色作用

能．由于设核物质只含无质量的 u 和 d 夸克，各色夸克的空间分布是一样的，整个核物质的无色蕴涵核物质内逐点无色．因此零级近似色电能为零．这一点与单核子口袋模型的结果一致．色磁能 E_{cm} 的计算也与1.5节对球口袋的相应计算类似，只是现在色电磁场的MIT边条件 (1.148) 只适用于晶胞内口袋的壁上，而在窗口上则应加上类似 (7.54) 的周期边条件．这就增加了计算的复杂性．经过对色流和色场的多极展开和不太长的拉卡代数还是将它彻底算出 (Zhang 1992b)．算出晶胞内口袋的体积，可得体积能

$$E_v = \frac{4\pi}{3} R^3(4.5\cos\theta_0 - 1.5\cos^3\theta_0 - 2)B \ , \tag{7.63}$$

R为被开了窗口的球口袋半径，B为 1.5节中定义的体积能常数．将卡西米尔能分布在晶胞内的口袋表面上，得一个晶胞的卡西米尔能量

$$E_{ca} = -\frac{z_0}{R}(3\cos\theta_0 - 2) \ , \tag{7.64}$$

z_0为 1.5 节中定义的无量纲卡西米尔能常数．至此，已按强子口袋模型的标准将由 u, d夸克组成的口袋晶体一个晶胞的各项能量完全算出．一个晶胞的平均能量即是

$$E = E_q + E_{cm} + E_{ca} + E_v \ . \tag{7.65}$$

此式与 (1.213) 很相似，只是已代入色电能 $E_{ce}=0$．当然，现在其中前两项，即 E_q 和 E_{cm} 只有数值计算的结果而无解析表达式．由于每个晶胞装有一个核子，(7.65) 表示的也就是口袋晶体模型给出的核物质中每核子平均能量．给定核物质密度 a^{-3} 也就给定了晶体的格子常数 a．在此条件下改变窗口张角 θ_0 使 (7.65) 表示的能量取极小值．仍用 E 表示这个极小值，它已只是核物质密度的函数．这样得到的每核子平均能量随核物质密度变化的函数关系就是基态核物质的物态方程．图 7-5 表示的是由参数 (1.231) 算得的这种核物态方程，其中密度换算成了相应的格子常数 a．令人惊喜的是每核子平均能量随核密度的变化确有一极小，表明这个模型中核物质确

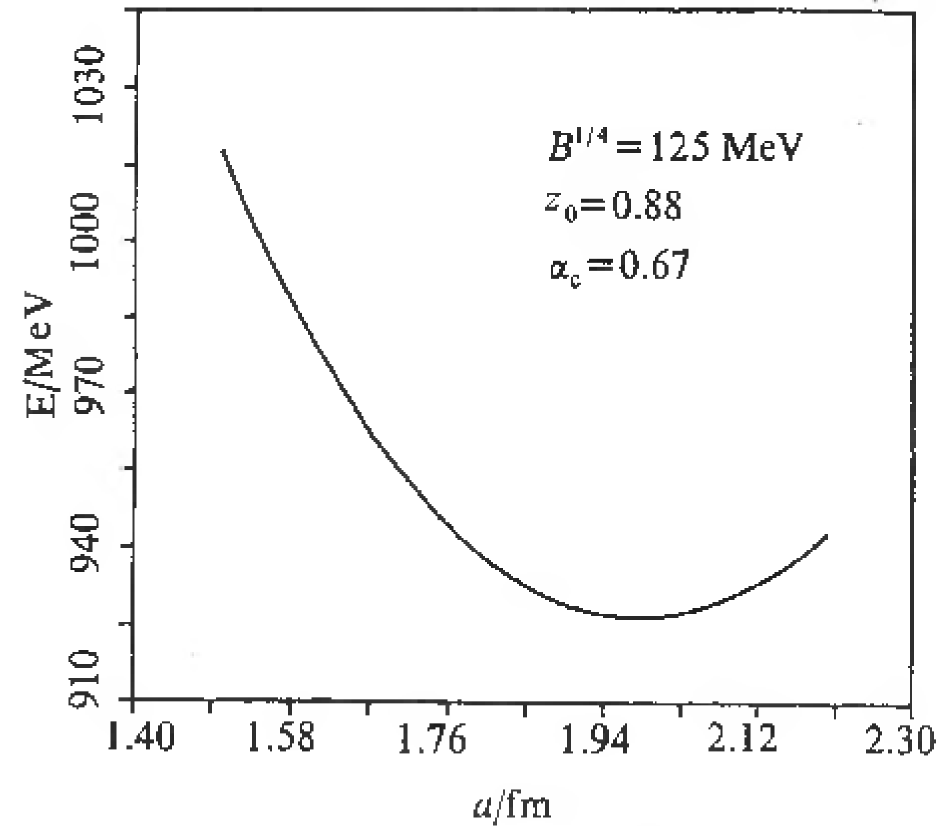


图7-5　口袋晶体中核子能量 E 随格子常数 a 的变化[取自 Zhang 1992b]

有一平衡密度．由图 7-5 中 E 的极小值处的格子常数换算得平衡密度为 0.13 核子/fm^3，与经验值 0.147 核子/fm^3相近．而平衡密度处的每核子结合能 12.6MeV 也与经验值 15.986MeV 相近．由于模型参数 (1.231) 事先已由强子性质定好，在计算核物质性质时已无可调参数．计算值与经验值如此接近是难得的，应视为对模型的有力支持，直接表现了模型的合理性．当然，计算中用了一些近似方法．虽然这些方法的合理性是经过论证的 (Zhang 1992b)，进一步改进还是必要的．理论的初步成功表明沿这个方向深入核内夸克自由度似属可取．

7.4　夸克物质与夸克-胶子等离子体

口袋模型，不论是单个强子的口袋模型还是核物质的口袋晶体模型，都将空间分成两部分，以口袋壁为界，袋内为 QCD 微扰真空，有色的夸克和胶子可存在于其中作渐近自由的运动．袋外是正常

真空，只能有无色物体存在．例如口袋晶体每个晶胞中心附近，在口袋壁包围的空间区域为 QCD 微扰真空，夸克可以在其中几近自由地运动，而且还可通过窗口流入其他晶胞，但在口袋壁上还是被 MIT 边条件反射回来．在壁外，在晶胞的八个顶点附近的空间区域仍为正常真空，夸克和胶子不得进入．即按此图象核内仍有由口袋壁隔开的两个不同区域，其中的真空彼此不同，夸克只能在其中的一种区域中运动．现在的问题是，强子系，具体地说核或核物质，能否处于一种状态，在此状态中只有 QCD 微扰真空，夸克可在这强子系占据的空间的任何部分运动．这样的强子系可称为夸克系，占据整个空间的夸克系称为夸克物质．在口袋晶体中取消口袋壁，使夸克可在整个空间中运动，就得到夸克物质．由于夸克运动的渐近自由性质，夸克间的作用不强，夸克物质中夸克的运动是近独立粒子运动．夸克物质可视为夸克气．夸克气的性质是好计算的．下面看看基态夸克气，即绝对零度下的夸克物质的物态方程和基本性质．

为与核物质比较，考虑只含无质量 u、d 夸克的夸克气．动量为 k 的夸克能量即为 k. 每一动量 $\boldsymbol{k}$ 对应两个自旋态，两个味态即 u 和 d，和三种色态，总共搭配出 $2\times2\times3=12$ 个态，可填充 12 个夸克．在绝对零度下动量不超过费米动量 η 的夸克数密度因而是

$$n_q=\frac{12}{(2\pi)^3}\int_{k\leqslant\eta}d^3k=\frac{6}{\pi^2}\int_0^\eta k^2dk=\frac{6}{3\pi^2}\eta^3\ . \tag{7.66}$$

三个夸克对应一个核子，可见核子数密度为

$$n=\frac{n_q}{3}=\frac{2}{3\pi^2}\eta^3\ . \tag{7.67}$$

夸克系的能量密度为

$$\mathscr{E}_q=\frac{12}{(2\pi)^3}\int_{k\leqslant\eta}kd^3k=\frac{6}{\pi^2}\int_0^\eta k^3dk=\frac{3}{2\pi^2}\eta^4\ . \tag{7.68}$$

每夸克平均能量为

$$\varepsilon_q=\frac{\mathscr{E}_q}{n_q}=\frac{3}{4}\eta\ . \tag{7.69}$$

每核子平均夸克能量也就是

$$E_q=3\varepsilon_q=\frac{9}{4}\eta\ . \tag{7.70}$$

类似(2.24)～(2.26)，无质量夸克动量在 $\boldsymbol{k}$ 处 d^3k 范围内自旋量子数为 σ 的归一化狄拉克平面波函数为

$$\psi_{k\sigma}(\boldsymbol{r})=u_\sigma(\boldsymbol{k})\sqrt{\frac{d^3k}{(2\pi)^3}}\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\ , \tag{7.71}$$

$$u_\sigma(\boldsymbol{k})=\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}\chi_\sigma\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}_0\chi_\sigma\end{bmatrix}\ , \tag{7.72}$$

χ_σ 为归一化自旋态，$\boldsymbol{k}_0=\dfrac{\boldsymbol{k}}{k}$ 为 $\boldsymbol{k}$ 方向的单位矢量．(7.71)是单夸克空间一自旋态 $|k\sigma\rangle$ 的坐标表象．完全的单夸克态为这个态与味态和色态的直乘．在只考虑 u,d 夸克的问题中，味就是同位旋，味态即同位旋态 $|\tau\rangle$，$\tau=1$ 表示 u 夸克，$\tau=-1$ 表示 d 夸克．色态用 $|c\rangle$ 表示．$c=1,2,3$ 表三种不同的色．用 ι 表示单夸克的这些量子数的集合，单夸克态可表为

$$|\iota\rangle=|k\sigma\rangle|\tau\rangle|c\rangle\ . \tag{7.73}$$

如果夸克间的作用可忽略，夸克气的状态 $|\rangle$ 即为这些单夸克态的斯累特行列式．若用微扰法计算夸克间的色作用，则可用这个斯累特行列式作夸克气的零级近似态．

由于只考虑了无质量的 u,d 夸克，色电作用能可略．参照(1.192)的第一等式知，色磁能密度为

$$\mathscr{E}_{cm}=-\sum_{a=1}^{8}\sum_{i>i'}\langle|\hat{\mathscr{H}}_i^a\cdot\hat{\mathscr{H}}_{i'}^a|\rangle\ , \tag{7.74}$$

其中 $\hat{\mathscr{H}}_i^a$ 为第 i 夸克产生的色磁场，a 为胶场的八重态色指标．一般说来，色磁场与色磁能密度都可与空间坐标 $\boldsymbol{r}$ 有关．然在无穷大空间范围内的夸克物质有空间平移对称．这种对称使色磁能密度与 $\boldsymbol{r}$ 无关．下面的实际计算也证实了这一点．因此除非必要，将在书写中省去自变量 $\boldsymbol{r}$. (7.74)表明，色磁能是二体作用能，将单夸克态 $|\iota\rangle$

的斯累特行列式代入其中的夸克气态 $|\ \rangle$ 得

$$\mathscr{E}_{\rm cm}=-\frac{1}{2}\sum_{\ell\ell'}\sum_{a}[\langle\ell'|\hat{\mathscr{H}}^a|\ell'\rangle\cdot\langle\ell|\hat{\mathscr{H}}^a|\ell\rangle-\langle\ell|\hat{\mathscr{H}}^a|\ell'\rangle\cdot\langle\ell'|\hat{\mathscr{H}}^a|\ell\rangle], \quad (7.75)$$

$\hat{\mathscr{H}}^a$ 为单夸克的色磁场．和号下方括号内的第一项为直接作用，第二项为交换作用．求和本应只及 $\ell'\neq\ell$ 的项．然因 $\ell=\ell'$ 时方括号内两项恰抵消，因此可将求和限制 $\ell\neq\ell'$ 取消．先看对色指标 a 和 ℓ 中的色量子数 c 的求和．按(1.190)作分解

$$\hat{\mathscr{H}}^a=g\lambda_a\hat{\mathscr{H}}, \quad (7.76)$$

$\hat{\mathscr{H}}$ 已与色无关．由

$$\sum_{c=1}^{3}\langle c|\lambda_a|c\rangle=\mathrm{Tr}\lambda_a=0,$$

$$\sum_{a=1}^{8}\sum_{c,c'=1}^{3}\langle c|\lambda_a|c'\rangle\langle c'|\lambda_a|c\rangle=\sum_{a=1}^{8}\mathrm{Tr}\lambda_a^2=16, \quad (7.77)$$

知(7.75)中的直接作用项为零，从而有

$$\mathscr{E}_{\rm cm}=32\pi\alpha_c\sum_{k\sigma\tau}\sum_{k'\sigma'\tau'}|\langle \boldsymbol{k}\sigma\tau|\hat{\mathscr{H}}|\boldsymbol{k}'\sigma'\tau'\rangle|^2 .$$

色磁场与味无关，因此 $\hat{\mathscr{H}}$ 与同位旋 τ 无关，此式变为

$$\mathscr{E}_{\rm cm}=64\pi\alpha_c\sum_{k\sigma}\sum_{k'\sigma'}|\langle \boldsymbol{k}\sigma|\hat{\mathscr{H}}|\boldsymbol{k}'\sigma'\rangle|^2, \quad (7.78)$$

$\alpha_c=\dfrac{g^2}{4\pi}$ 已在(1.195)后定义为色精细结构常数．由波函数(7.71)和(7.72)可得单夸克态间夸克流的矩阵元

$$\langle \boldsymbol{k}'\sigma'|\hat{\boldsymbol{j}}|\boldsymbol{k}\sigma\rangle=\frac{\sqrt{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'}}{(2\pi)^3}u^\dagger_{\sigma'}(\boldsymbol{k}')\boldsymbol{\alpha}u_\sigma(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}} . \quad (7.79)$$

波函数 (7.71)本来还有一个与时间有关的相因子，它会给这个矩阵元也带来一个与时间有关的相因子．不过夸克气整体处于定态，其中的总夸克流应是恒定的，与时间无关．故在(7.79)中可省去那个与时间有关的相因子．这相当于将总夸克流在各夸克间的重新分配．取(1.182)在单夸克态间的矩阵元即是

$$\nabla^2\langle \boldsymbol{k}'\sigma'|\hat{\boldsymbol{B}}|\boldsymbol{k}\sigma\rangle=-\langle \boldsymbol{k}'\sigma'|\hat{\boldsymbol{j}}|\boldsymbol{k}\sigma\rangle . \quad (7.80)$$

将(7.79)代入此式右边，解得

$$\langle \boldsymbol{k}'\sigma'|\hat{\boldsymbol{B}}|\boldsymbol{k}\sigma\rangle=\frac{\sqrt{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'}}{(2\pi)^3}\frac{u^\dagger_{\sigma'}(\boldsymbol{k}')\boldsymbol{\alpha}u_\sigma(\boldsymbol{k})}{|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'|^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}} . \quad (7.81)$$

从而

$$\langle \boldsymbol{k}'\sigma'|\hat{\mathscr{H}}|\boldsymbol{k}\sigma\rangle=\nabla\times\langle \boldsymbol{k}'\sigma'|\hat{\boldsymbol{B}}|\boldsymbol{k}\sigma\rangle$$

$$=\frac{\sqrt{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'}}{(2\pi)^3}\frac{u^\dagger_{\sigma'}(\boldsymbol{k}')[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\times\boldsymbol{\alpha}]u_\sigma(\boldsymbol{k})}{|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'|^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}} . \quad (7.82)$$

由于(7.79)是重新分配过的流，此式表达的也是在夸克间重新分配过的场．代入(7.78)得

$$\mathscr{E}_{\rm cm}=\frac{\alpha_c}{\pi^5}\sum_{\sigma\sigma'}\int_{k,k'\leqslant\eta}\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'\left|\frac{u^\dagger_{\sigma'}(\boldsymbol{k}')[(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\times\boldsymbol{\alpha}]u_\sigma(\boldsymbol{k})}{|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'|^2}\right|^2 . \quad (7.83)$$

由(7.72)知

$$u^\dagger_{\sigma'}(\boldsymbol{k}')\boldsymbol{\alpha}u_\sigma(\boldsymbol{k})=\frac{1}{2}\chi^\dagger_{\sigma'}[(\boldsymbol{k}_0+\boldsymbol{k}_0')+\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_0-\boldsymbol{k}_0')\times\boldsymbol{\sigma}]\chi_\sigma, \quad (7.84)$$

$\boldsymbol{k}_0=\dfrac{\boldsymbol{k}}{k}$ 和 $\boldsymbol{k}_0'=\dfrac{\boldsymbol{k}'}{k'}$ 分别为 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{k}'$ 方向的单位矢量．由此得

$$\sum_{\sigma\sigma'}|u^\dagger_{\sigma'}(\boldsymbol{k}')[(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\times\boldsymbol{\alpha}]u_\sigma(\boldsymbol{k})|^2=\frac{1}{4}\mathrm{Tr}M, \quad (7.85)$$

其中

$$M=\{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\times[(\boldsymbol{k}_0+\boldsymbol{k}_0')-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_0-\boldsymbol{k}_0')\times\boldsymbol{\sigma}]\}\cdot\{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\times[(\boldsymbol{k}_0+\boldsymbol{k}_0')+\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_0-\boldsymbol{k}_0')\times\boldsymbol{\sigma}]\} \quad (7.86)$$

为二行二列矩阵．初等的矢量运算可算出(7.86)右边，得

$$\sum_{\sigma\sigma'}|u^\dagger_{\sigma'}(\boldsymbol{k}')[(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\times\boldsymbol{\alpha}]u_\sigma(\boldsymbol{k})|^2=2(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')^2+\frac{1}{2kk'}[(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')^4-(k^2-k'^2)^2] . \quad (7.87)$$

代入(7.83)，所有积分均可用初等方法解析地做出．得色磁能密度

$$\mathscr{E}_{cm}=\frac{8\alpha_c\eta^4}{\pi^3}\ . \tag{7.88}$$

每核子平均色磁能为

$$E_{cm}=\frac{\mathscr{E}_{cm}}{n}=\frac{12\alpha_c\eta}{\pi}\ . \tag{7.89}$$

QCD 微扰真空的能量密度即口袋模型的体积能常数 B. 每核子平均占有体积 n^{-1}, 因此有体积能

$$E_v=n^{-1}B=\frac{3\pi^2B}{2\eta^3}\ . \tag{7.90}$$

夸克物质没有边界,自然没有卡西米尔能量. 因此,将(7.70)、(7.89)和(7.90)加起来即得夸克物质中的每核子(即每三个夸克)平均能量

$$E=E_q+E_{cm}+E_v=\left(\frac{9}{4}+\frac{12\alpha_c}{\pi}\right)\eta+\frac{3\pi^2B}{2\eta^3}\ . \tag{7.91}$$

将(7.67)与(6.92)联立得

$$\eta=\left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3}\frac{1}{r}\ . \tag{7.92}$$

与上一章的类似表达式不同,这里的 η 是夸克的费米动量. (7.92)表达的是夸克费米动量与夸克物质中每核子平均占有线度 r 的关系. 代入(7.91)得

$$E=\left(\frac{9}{4}+\frac{12\alpha_c}{\pi}\right)\left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3}\frac{1}{r}+\frac{4\pi}{3}r^3B\ . \tag{7.93}$$

采用参数(1.231),在正常核密度下,$r=1.175\,\text{fm}$, 此式给出每核子平均能量 $E=1440.6$ MeV, 远高于一个自由核子的静止能量 939MeV. E 在 $r=1.38\,\text{fm}$ 处取极小值 1393 MeV, 仍高于自由核子的静止能量. 若取参数(1.222),在正常核密度下(7.93)给出每核子平均能量 $E=1503.9$ MeV, 在 $r=1.16\,\text{fm}$ 处 E 取极小值 1503.5 MeV. 两套参数给出的具体数值虽不同,但每核子平均能量恒远高于自由核子的静止能量这一定性结果则是一致的. 它表明夸克物质只能是核物质的高激发态. 这与人们的朴素认识是一致的,也是合理的.

如果温度高于绝对零度就称为是有限温度情形. 在有限温度下会从真空中激发起夸克反夸克对,而且不只是 u 和 d 夸克反夸克对,还能激发起 s, c, b 和 t 等各种味的夸克反夸克对. 自然还可能激发起各色胶子. 这就导致一种含各种色、味的夸克和反夸克以及各种色的胶子的物质. 如果这种物质是总体上无色的,就称为夸克-胶子等离子体,按英文字头简称 QGP. 高温 QGP 有相当简单的行为. 下面考虑温度足够高以致各种夸克和反夸克的质量均可忽略,色作用也可忽略的情形. 在这种情形下 QGP 成为无质量独立粒子系,可作彻底的理论分析. 设有 N_f 种不同味的夸克,每种味还可有三种不同色和两种不同的自旋态. 因此单位体积内动量在 $\boldsymbol{k}$ 处 d^3k 范围内的单夸克态数为 $\frac{6N_f}{(2\pi)^3}\mathrm{d}^3k$. 按费米分布,动量在 $\boldsymbol{k}$ 处 d^3k 范围内的夸克数密度为

$$\mathrm{d}n_q=\frac{6N_f}{(2\pi)^3}\,\frac{\mathrm{d}^3k}{1+\exp[\beta(k-\mu_q)]}\ , \tag{7.94}$$

反夸克数密度为

$$\mathrm{d}n_{\bar{q}}=\frac{6N_f}{(2\pi)^3}\,\frac{\mathrm{d}^3k}{1+\exp[\beta(k+\mu_q)]}\ , \tag{7.95}$$

其中 $k=|\boldsymbol{k}|$ 为自然单位制中无质量夸克的能量,$\beta=\frac{1}{k_BT}$, μ_q 为夸克的化学势. 对动量积分,得夸克数密度

$$n_q=\int\mathrm{d}n_q=\frac{3N_f}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{k^2\mathrm{d}k}{1+\exp[\beta(k-\mu_q)]}$$

$$=\frac{3N_f}{\pi^2\beta^3}\int_{-\beta\mu_q}^\infty\frac{(x+\beta\mu_q)^2}{1+e^x}\mathrm{d}x\ , \tag{7.96}$$

反夸克数密度

$$n_{\bar{q}}=\int\mathrm{d}n_{\bar{q}}=\frac{3N_f}{\pi^2\beta^3}\int_{\beta\mu_q}^\infty\frac{(x-\beta\mu_q)^2}{1+e^x}\mathrm{d}x\ . \tag{7.97}$$

每个夸克的重子数为$\frac{1}{3}$，反夸克的重子数为$-\frac{1}{3}$，因此 QGP 的重子数密度为

$$n=\frac{1}{3}(n_q-n_{\bar{q}}) . \tag{7.98}$$

记$\xi=\beta\mu_q$，由 (7.96) ~ (7.98) 得

$$\begin{aligned} n &= \frac{N_f}{\pi^2\beta^3}\left[\int_{-\xi}^{\infty}\frac{(x+\xi)^2}{1+e^x}dx-\int_{\xi}^{\infty}\frac{(x-\xi)^2}{1+e^x}dx\right] \\ &= \frac{N_f}{\pi^2\beta^3}\left[4\xi\int_0^{\infty}\frac{x}{1+e^x}dx+\int_0^{\xi}(x^2-2x\xi+\xi^2)dx\right] \\ &= \frac{N_f}{\pi^2\beta^3}\left(4A_1\xi+\frac{\xi^3}{3}\right) , \end{aligned} \tag{7.99}$$

其中

$$\begin{aligned} A_\nu &\equiv \int_0^{\infty}\frac{x^\nu}{1+e^x}dx=\sum_{l=1}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-lx}(-1)^{l-1}x^\nu dx \\ &= \nu!\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l-1}}{l^{\nu+1}}=\nu!\left(1-\frac{1}{2^\nu}\right)\zeta(\nu+1) , \end{aligned} \tag{7.100}$$

而

$$\zeta(z)\equiv\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^z} , \qquad \mathrm{Re}(z)>1 , \tag{7.101}$$

为黎曼 (Riemann) ζ函数. 由费米分布 (7.94) 和 (7.95) 还可得 QGP 中夸克与反夸克的能量密度

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_1 &= \frac{6N_f}{(2\pi)^3}\int\left\{\frac{k}{1+\exp[\beta(k-\mu_q)]}+\frac{k}{1+\exp[\beta(k+\mu_q)]}\right\}d^3k \\ &= \frac{3N_f}{\pi^2\beta^4}\left[\int_{-\xi}^{\infty}\frac{(x+\xi)^3}{1+e^x}dx+\int_{\xi}^{\infty}\frac{(x-\xi)^3}{1+e^x}dx\right] \\ &= \frac{3N_f}{\pi^2\beta^4}\left\{\int_0^{\infty}\left[\frac{(x+\xi)^3}{1+e^x}+\frac{(x-\xi)^3}{1+e^x}\right]dx-\int_0^{\xi}(x-\xi)^3dx\right\} \\ &= \frac{3N_f}{\pi^2\beta^4}\left(2A_3+6A_1\xi^2+\frac{\xi^4}{4}\right) . \end{aligned} \tag{7.102}$$

平行于 (6.35) ~ (6.47) 的推导可得夸克与反夸克的压力

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_1 &= \frac{6N_f}{(2\pi)^3\beta}\left\{\int\ln\left[1+e^{-\beta(k-\mu_q)}\right]d^3k+\int\ln\left[1+e^{-\beta(k+\mu_q)}\right]d^3k\right\} \\ &= \frac{3N_f}{\pi^2\beta^4}\left[\int_{-\xi}^{\infty}\ln(1+e^{-x})(x+\xi)^2dx+\int_{\xi}^{\infty}\ln(1+e^{-x})(x-\xi)^2dx\right] \\ &= \frac{N_f}{\pi^2\beta^4}\left[\int_{-\xi}^{\infty}\frac{(x+\xi)^3}{1+e^x}dx+\int_{\xi}^{\infty}\frac{(x-\xi)^3}{1+e^x}dx\right] \\ &= \frac{N_f}{\pi^2\beta^4}\left(2A_3+6A_1\xi^2+\frac{\xi^4}{4}\right)=\frac{\mathscr{E}_1}{3} . \end{aligned} \tag{7.103}$$

胶子是玻色子，具玻色分布. 胶子有八种不同色态和两种不同偏振态. 因此单位体积内动量在 $\boldsymbol{k}$ 处 d^3k 范围内的单胶子态数为 $\frac{16}{(2\pi)^3}d^3k$. 按玻色分布，动量在 $\boldsymbol{k}$ 处 d^3k 范围内的胶子数密度为

$$dn_g=\frac{16}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{e^{\beta k}-1} . \tag{7.104}$$

胶子的能量密度便是

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_g &= \frac{16}{(2\pi)^3}\int\frac{k\,d^3k}{e^{\beta k}-1}=\frac{8}{\pi^2\beta^4}\int_0^{\infty}\frac{x^3}{e^x-1}dx \\ &= \frac{8}{\pi^2\beta^4}\int_0^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}e^{-lx}x^3dx \\ &= \frac{48}{\pi^2\beta^4}\zeta(4) . \end{aligned} \tag{7.105}$$

平行于 (6.35) ~ (6.47) 的推导可得胶子的压力

$$\mathscr{P}_g=-\frac{16}{(2\pi)^3\beta}\int\ln(1-e^{-\beta k})d^3k$$

$$= -\frac{8}{\pi^2\beta^4}\int_0^\infty x^2\ln(1-e^{-x})dx$$

$$= \frac{8}{3\pi^2\beta^4}\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}\,dx = \frac{\mathscr{E}_g}{3}$$

$$= \frac{16}{\pi^2\beta^4}\,\zeta(4)\,. \qquad (7.106)$$

由具体计算[①]或查表知 $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$，$\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$．代入(7.105)、(7.106)和(7.100)，再将算得的 A_1 和 A_3 代入(7.99)、(7.102)和(7.103)，得QGP中的重子数密度

$$n=\frac{N_f}{3}\mu_q\left(k_B^2T^2+\frac{\mu_q^2}{\pi^2}\right), \qquad (7.107)$$

能量密度

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_g+B$$

$$=N_f\left[\frac{7\pi^2}{20}k_B^4T^4+3\left(\frac{k_B^2T^2\mu_q^2}{2}+\frac{\mu_q^4}{4\pi^2}\right)\right]+\frac{8\pi^2}{15}k_B^4T^4+B, \qquad (7.108)$$

和压力

$$\mathscr{P}=\mathscr{P}_1+\mathscr{P}_g-B$$

$$=N_f\left[\frac{7\pi^2}{60}k_B^4T^4+\frac{k_B^2T^2\mu_q^2}{2}+\frac{\mu_q^4}{4\pi^2}\right]+\frac{8\pi^2}{45}k_B^4T^4-B, \qquad (7.109)$$

其中 B 为QCD微扰真空的能量密度．(7.107)～(7.109)完全没有计及夸克与胶子间的色作用，或者说它们精确到色精细结构常数 α_c 的零次幂．色作用对(7.107)～(7.109)的修正可逐级算出(Kapusta 1979)．这是一项有一定程式却相当繁复的工作，详情可参阅有关文献．

① 参阅王竹溪，郭敦仁，《特殊函数概论》，科学出版社，1965.

7.5 强子物质与夸克-胶子等离子体间的相变

强子物质与夸克-胶子等离子体成分相同，都由夸克和胶子组成，但状态不同，前者夸克与胶子禁闭在强子内，后者夸克胶子可以在一个较广大的空间中运动．它们是同一种物质的两相．上章中求得了强子物质的物态方程，上节又求得了夸克-胶子等离子体的物态方程．有了两相的物态方程就可求两相共存的条件．这也就是相变的条件．两相热平衡，温度相等．可用 T 表示两相的共同温度．重子数守恒，两相的重子化学势在物质平衡条件下应相等．用 μ 表强子相中的重子化学势．夸克的重子数为 $\frac{1}{3}$，三个夸克组成一个重子．因此夸克胶子等离子体中的重子化学势为 $3\mu_q$，μ_q 为夸克的化学势．强子相与夸克胶子等离子体相的化学平衡条件为

$$\mu=3\mu_q\,. \qquad (7.110)$$

两相空间平衡条件为压力相等．仍用 $\mathscr{P}$ 表强子物质的压力，用 $\mathscr{P}_{qg}$ 表夸克胶子等离子体的压力．$\mathscr{P}$ 与 μ、T 的关系 $\mathscr{P}(\mu,T)$ 为强子相的物态方程，已于6.2节详加讨论．$\mathscr{P}_{qg}$ 与 μ_q，T 的关系 $\mathscr{P}_{qg}(\mu_q,T)$ 即是上节中讨论的 $\mathscr{P}$ 与 μ_q，T 的关系，只是现在为 $\mathscr{P}$ 加上了下标qg，以示它是夸克胶子等离子体的压力．$\mathscr{P}_{qg}(\mu_q,T)$ 为夸克胶子等离子体的物态方程．强子相与夸克胶子等离子体相的热平衡、化学平衡和空间平衡等三项条件可统一表为

$$\mathscr{P}(\mu,T)=\mathscr{P}_{qg}\left(\frac{\mu}{3},T\right). \qquad (7.111)$$

由此可解得函数关系 $\mu(T)$，它在 μ-T 平面上是一条曲线，将强子相与夸克胶子等离子体相分开．对一定的 μ 和 T，两相的重子数密度可不相同．仍用 n 表强子相的重子数密度，夸克胶子等离子体相的重子数密度则改用 n_{qg} 表示．一条曲线 $\mu(T)$ 表现为两条重子数密度-温度曲线 $n(T)$ 和 $n_{qg}(T)$．这两条曲线的外侧分别为强子相和夸

克胶子相，两线间为两相共存区，即相变区．将这些画下来就是一张两相平衡的相图．

核物质是最简单的强子物质，其中只有质子与中子两种重子．它的物态方程 $\mathscr{P}(\mu, T)$ 可按 6.2 节的方法得到．例如可用 (6.70) 考虑核子的有限体积，采用表 6 中的参数．本节下面介绍的数值结果就是由此得来，采用的是表 6 中的参数 I. 与核物质平衡的夸克－胶子等离子体中也只考虑 u,d 两种夸克，味数 $N_f=2$. 物态方程 (7.109) 中还需口袋模型的体积能常数 B. 由 1.5 节知它应在 $(100\,\mathrm{MeV})^4$ 至 $(200\,\mathrm{MeV})^4$ 之间．由相平衡条件 (7.111) 可得强子相与夸克胶子相的相图．不过人们最感兴趣的是真空相变．即真空的强子相与夸克胶子相的相变，也就是正常真空与 QCD 微扰真空间的相变．QCD 被认为是强作用的理论基础，格点 QCD 计算被认为是较可靠的 QCD 非微扰计算．这种计算预言了真空相变，临界温度 $T_c \approx 200\,\mathrm{MeV}$. 能否给出这种相变被当作对强作用模型理论的一种考验．点强子系的相对论定域平均场论给不出这种相变 (Rischke 1991) 被当作必须考虑核子的有限体积效应的信号．在考虑了核子的有限体积效应后确实得到了这种相变 (Ma 1993). 用上述简单理论，取 $B^{1/4}=200\,\mathrm{MeV}$，得到的真空相变临界温度 $T_c=140\,\mathrm{MeV}$. 在考虑了夸克胶子间色作用的微扰后真空相变临界温度修正为 $T_c=170\,\mathrm{MeV}$(Ma 1993)，与格点 QCD 预言一致．

这方面还有许多工作要进一步做．在这两章框架内可做的事就包括：1. 考虑核子以外的重子的贡献，相应地考虑其他夸克特别是 s 夸克的贡献；2. 考虑其他介子特别是 π 介子的贡献；3. 采用相对论关系 (6.105) 代替 (6.70) 并采用表 7 中的参数；4. 进一步考虑夸克胶子间的色作用等．

第 8 章　核反应的一般理论

8.1　反应的形式理论

考虑反应

$$a+A \rightarrow \begin{cases} b+B\ , \\ c+C\ , \\ \cdots\ . \end{cases} \tag{8.1}$$

对核反应而言 a, A, b, B, c 和 C 都是核子或核．左边称入射道，用 a 表示，就称为 a 道．右边为反应道分别由 $b, c, \cdots$ 表示，称 b 道、c 道⋯．入射道和各反应道实际都是同一个多体系的不同的划分．设这是一 N 粒子系，用非相对论量子力学来讨论它．不过以下的许多关系和结论也适用于相对论的情形，用时可仔细斟酌．设 N 个粒子质量相同．由于中子与质子质量几乎相等，这一点对核系统是很好成立的．N 粒子系的哈密顿量为

$$\hat{H}=\sum_{i=1}^{N} \frac{\hat{p}_i^2}{2m}+V\ . \tag{8.2}$$

一般地考虑 s 道．$s=a$ 为入射道，$s=b, c, \cdots$ 为反应道．用 V_s 表示 s 道中 s 与 S 两核各自内部各核子间的相互作用以及两核间某种特别选定的相互作用势之和．这里用了模糊词‘某种’，表示这种选择有伸缩性，视物理问题而可有所不同．常见的选择有两种：一是选为零，即 V_s 中只含 s 与 S 两核各自内部各核子间的作用，而不含这两核间的作用．另一是选为 s 与 S 两核间的光学势，即 V_s 为 s 与 S 两核各自内部各核子间的作用与这光学势之和．定义

$$\hat{H}_0=\sum_{i=1}^{N}\frac{\hat{p}_i^2}{2m} , \tag{8.3}$$

$$\hat{H}_s=\hat{H}_0+V_s , \tag{8.4}$$

$$\overline{V}_s=V-V_s . \tag{8.5}$$

用 $|sn\rangle$表示 $\hat{H}_s$ 的一个本征态，本征值为 E_{sn}:

$$\hat{H}_s|sn\rangle=E_{sn}|sn\rangle . \tag{8.6}$$

此处 n 为与 $\hat{H}_s$ 能同时确定的一组完备力学量量子数的集合．s 道的入态定义为 $\hat{H}$ 的本征 态

$$|sn+\rangle=|sn\rangle+\frac{1}{E_{sn}-\hat{H}_s+\mathrm{i}\varepsilon}\overline{V}_s|sn+\rangle , \tag{8.7}$$

ε为正无穷小．它表示以 s 道为入射道的碰撞过程．右边的 $|sn\rangle$表入射态，若 V_s 中含 s 与 S 两核间的光学势则还表示由光学势引起的散射．右边第二项表示经 s 道入射后的反应结果．这一点由含时间的碰撞理论更易看清楚．

设 $t=-\infty$ 时系统处于 $|sn\rangle$态．此后，扰 动$\overline{V}_s$ 绝热地，即无限缓慢地加进来．这一点可由因子 $e^{\varepsilon t}$ 表示，ε为一正无穷小．对任何有限时刻 t，$e^{\varepsilon t}=1$；而对 $t=-\infty$，它的定义为 $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\lim\limits_{t\to-\infty}e^{\varepsilon t}=0$．在 s 道的相互作用图象中，扰动哈密顿量为

$$V_s'(t)=e^{\mathrm{i}\frac{\hat{H}_s}{\hbar}t}\overline{V}_s e^{\varepsilon t}e^{-\mathrm{i}\frac{\hat{H}_s}{\hbar}t} . \tag{8.8}$$

态从 t_0 时刻到 t 时刻的演化算符 $\hat{U}(t,t_0)$ 服从微分方程[①]

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\hat{U}(t,t_0)}{\partial t}=V_s'(t)\hat{U}(t,t_0) . \tag{8.9}$$

两边对 t 积分，并用起始条件 $\hat{U}(t,t_0)=\mathrm{I}$，I为幺算符，得积分方程

$$\hat{U}(t,t_0)=\mathrm{I}-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{t}V_s'(t')\hat{U}(t',t_0)\mathrm{d}t' . \tag{8.10}$$

① 参阅张启仁,《量子力学》,§7.8, §17.1,高等教育出版社,1989.

经反复迭代得这个方程的微扰展开解

$$\hat{U}(t,t_0)=\sum_{j=0}^{\infty}\hat{U}^{(j)}(t,t_0) , \tag{8.11}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\hat{U}^{(0)}(t,t_0)=\mathrm{I} ,\\&\hat{U}^{(j)}(t,t_0)=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{t}V_s'(t')\hat{U}^{(j-1)}(t',t_0)\mathrm{d}t',\quad 对\ j=1,2,3,\cdots .\end{aligned}\right\} \tag{8.12}$$

解 (8.11) ~ (8.12) 成立的条件就是 (8.11) 右边的级数在所讨论的时间范围内一致收敛，以保证将它代入 (8.10) 右边后可逐项积分．不过由这个解导出的结论常可延拓到它的收敛范围以外．由此可知，$\overline{V}_s e^{\varepsilon t}$ 将 $t=-\infty$ 时的态 $|sn\rangle$ 演化成 $t=0$ 时的态

$$\hat{U}(0,-\infty)|sn\rangle=\sum_{j=0}^{\infty}\hat{U}^{(j)}(0,-\infty)|sn\rangle . \tag{8.13}$$

其中

$$\hat{U}^{(0)}(t,-\infty)|sn\rangle=|sn\rangle , \tag{8.14}$$

$$\begin{aligned}\hat{U}^{(1)}(t,-\infty)|sn\rangle&=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{-\infty}^{t}e^{\mathrm{i}\frac{\hat{H}_s}{\hbar}t'}\overline{V}_s e^{\varepsilon t'}e^{-\mathrm{i}\frac{\hat{H}_s}{\hbar}t'}\mathrm{d}t'|sn\rangle\\&=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{-\infty}^{t}e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\hat{H}_s-E_{sn}-\mathrm{i}\varepsilon)t'}\mathrm{d}t'\overline{V}_s|sn\rangle\\&=e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\hat{H}_s-E_{sn}-\mathrm{i}\varepsilon)t}\frac{1}{E_{sn}-\hat{H}_s+\mathrm{i}\varepsilon}\overline{V}_s|sn\rangle .\end{aligned} \tag{8.15}$$

此式第二等号处用了本征方程 (8.6)，它将作用在态 $|sn\rangle$ 上的算符 $e^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_s t'}$ 变成数 $e^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_{sn}t'}$，因而可与因子 $e^{\varepsilon t'}$ 一起移到$\overline{V}_s$ 的左边．$\overline{V}_s$ 因与时间无关而移到了积分号外．利用 (8.15)得

$$\hat{U}^{(2)}(t,-\infty)|sn\rangle=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\hat{H}_s}{\hbar}t'}\overline{V}_s\mathrm{e}^{\varepsilon t'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\hat{H}_s}{\hbar}t'}\hat{U}^{(1)}(t',-\infty)\mathrm{d}t'|sn\rangle$$

$$=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\hat{H}_s-E_{sn}-2\mathrm{i}\varepsilon)t'}\overline{V}_s\frac{1}{E_{sn}-\hat{H}_s+\mathrm{i}\varepsilon}\overline{V}_s\mathrm{d}t'|sn\rangle$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\hat{H}_s-E_{sn}-\mathrm{i}2\varepsilon)t}\frac{1}{E_{sn}-\hat{H}_s+\mathrm{i}2\varepsilon}\overline{V}_s\frac{1}{E_{sn}-\hat{H}_s+\mathrm{i}\varepsilon}\overline{V}_s|sn\rangle$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\hat{H}_s-E_{sn}-\mathrm{i}\varepsilon)t}\left(\frac{1}{E_{sn}-\hat{H}_s+\mathrm{i}\varepsilon}\overline{V}_s\right)^2|sn\rangle\ . \tag{8.16}$$

由于 ε 与 2ε 都是正无穷小，且同步地趋于零，故可用同一符号代表．将它们都写成 ε 就导致上式中的最后一个等号．依此类推得

$$U^{(j)}(t,-\infty)|sn\rangle=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\hat{H}_s-E_{sn}-\mathrm{i}\varepsilon)t}\left(\frac{1}{E_{sn}-\hat{H}_s+\mathrm{i}\varepsilon}\overline{V}_s\right)^j|sn\rangle\ . \tag{8.17}$$

将 $t=0$ 代入(8.14)～(8.17)，再将结果代入(8.13)得

$$\hat{U}(0,-\infty)|sn\rangle=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{E_{sn}-\hat{H}_s+\mathrm{i}\varepsilon}\overline{V}_s\right)^j|sn\rangle$$

$$=|sn\rangle+\frac{1}{E_{sn}-\hat{H}_s+\mathrm{i}\varepsilon}\overline{V}_s\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{E_{sn}-\hat{H}_s+\mathrm{i}\varepsilon}\overline{V}_s\right)^j|sn\rangle$$

$$=|sn\rangle+\frac{1}{E_{sn}-\hat{H}_s+\mathrm{i}\varepsilon}\overline{V}_s\hat{U}(0,-\infty)|sn\rangle\ . \tag{8.18}$$

与(8.7)比较知

$$|sn+\rangle=\hat{U}(0,-\infty)|sn\rangle\ . \tag{8.19}$$

即在相互作用图象看来，入态是无穷长时间前 $\hat{H}_s$ 的本征态 $|sn\rangle$ 演化过来的状态．除入射态 $|sn\rangle$ 以外的部分，即(8.7)右边第二项为反应的结果．同理可定义 s 道的出态

$$|sn-\rangle=|sn\rangle+\frac{1}{E_{sn}-\hat{H}_s-\mathrm{i}\varepsilon}\overline{V}_s|sn-\rangle\ . \tag{8.20}$$

容易验证它也是 $\hat{H}$ 的本征态，本征值为 E_{sn}，与 $|sn+\rangle$ 的 $\hat{H}$ 的本征值相同．(8.20)右边第二项表碰撞过程，而碰撞的结果是从 s 道出射，出射态为 $|sn\rangle$．由含时间的理论可看清这一点．这一次考虑态从 $t=0$ 到 $t=+\infty$ 的演化，要求演化的结果为 $|sn\rangle$，问 $t=0$ 时什么态演化到 $t=\infty$ 时成为 $|sn\rangle$．这个问题可逆着时间顺序求解，即问 $t=\infty$ 时的态 $|sn\rangle$ 逆着时间顺序演化到 $t=0$ 时成为什么态．在相互作用图象中它应成为

$$U(0,\infty)|sn\rangle=\sum_{j=0}^{\infty}U^{(j)}(0,\infty)|sn\rangle\ . \tag{8.21}$$

仍设扰动 $\overline{V}_s$ 只在 t 取有限值时存在，而当 $t\to\infty$ 时绝热地，即无限缓慢地消失．由于现在是在 t 取正值的区间内讨论，$\overline{V}_s$ 的绝热消失可由因子 $\mathrm{e}^{-\varepsilon t}$ 表示．对任何有限时刻这个因子为 1；而对 $t=\infty$ 它定义为 $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\varepsilon t}=0$．相互作用图象中的扰动哈密顿量现在是

$$V_s'(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\hat{H}_s}{\hbar}t}\overline{V}_s\mathrm{e}^{-\varepsilon t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\hat{H}_s}{\hbar}t}\ . \tag{8.22}$$

重复(8.14)～(8.18)的讨论，只是将其中的 ε 变为 $-\varepsilon$，得

$$|sn-\rangle=\hat{U}(0,\infty)|sn\rangle\ . \tag{8.23}$$

此式表明 $|sn-\rangle$ 演化到无穷长时间以后成为 $\hat{H}_s$ 的本征态 $|sn\rangle$．即出态表示的碰撞过程最后由 $\hat{H}_s$ 的本征态出射．由入态 $|an_a+\rangle$ 测得出态 $|bn_b-\rangle$ 的几率振幅

$$S_{bn_b,an_a}\equiv\langle bn_b-|an_a+\rangle=\langle bn_b|\hat{U}(\infty,-\infty)|an_a\rangle \tag{8.24}$$

称为散射矩阵的矩阵元．它的绝对值平方表示对入态 $|an_a+\rangle$ 测得出态 $|bn_b-\rangle$ 的几率，也就是由入射态 $|an_a\rangle$ 经过碰撞，发生反应，最后跃迁到出射态 $|bn_b\rangle$ 的几率．

定义总预解式

$$G(Z)=(\hat{H}-Z)^{-1} \tag{8.25}$$

和 s 道的预解式

$$G_s(Z)=(\hat{H}_s-Z)^{-1}\ , \tag{8.26}$$

其中 Z 为一复数．简单的代数可验证

$$G(Z)=G_s(Z)-G_s(Z)\overline{V}_sG(Z)\ , \tag{8.27}$$

$$G(Z)=G_s(Z)-G(Z)\overline{V}_sG_s(Z)\ . \tag{8.28}$$

例如(8.27),它的

$$\text{右边}=G_s(Z)(1-\overline{V}_sG(Z))=G_s(Z)(G^{-1}(Z)-\overline{V}_s)G(Z)$$
$$=G_s(Z)G_s^{-1}(Z)G(Z)=\text{左边}\ .$$

下面证明一对重要关系

$$G(Z)=\delta_{ba}G_b(Z)-G_b(Z)U_{ba}G_a(Z)\ , \tag{8.29}$$

$$U_{ba}=-(1-\delta_{ba})(\hat{H}_0-Z)+V-V_a-V_b+\delta_{ba}V_a-\overline{V}_b\,G(Z)\overline{V}_a\ . \tag{8.30}$$

证:将(8.30)当作 U_{ba} 的定义代入(8.29),证明它两边相等:对情形 $b=a$ 有

$$U_{aa}=\overline{V}_a-\overline{V}_aG(Z)\overline{V}_a=\overline{V}_a(1-G(Z)\overline{V}_a)=\overline{V}_aG(Z)G_a^{-1}(Z)\ .$$

因此

$$G_a(Z)-G_a(Z)U_{aa}G_a(Z)=G_a(Z)(1-\overline{V}_aG(Z))$$
$$=G_a(Z)G_a^{-1}(Z)G(Z)=G(Z)\ .$$

即(8.29)在此情形下成立.

对情形 $b\neq a$, (8.30)给出

$$U_{ba}=-G_a^{-1}(Z)+\overline{V}_b(1-G(Z)\overline{V}_a)$$
$$=\overline{V}_bG(Z)G_a^{-1}(Z)-G_a^{-1}(Z)=-G_b^{-1}(Z)G(Z)G_a^{-1}(Z)\ .$$

可见

$$G(Z)=-G_b(Z)U_{ba}G_a(Z)\ ,$$

即(8.29)在此情形中也成立. 证毕.

由(8.7)和(8.20)分别得

$$|an_a+\rangle=-\mathrm{i}\varepsilon G(E_{an_a}+\mathrm{i}\varepsilon)|an_a\rangle\ , \tag{8.31}$$

$$|bn_b-\rangle=\mathrm{i}\varepsilon' G(E_{bn_b}-\mathrm{i}\varepsilon')|bn_b\rangle\ . \tag{8.32}$$

ε 和 ε' 为两个独立的正无穷小. 由于 $|an_a+\rangle$为 $\hat{H}$ 的本征态,本征值为 E_{an_a},

$$\langle bn_b-|an_a+\rangle=-\frac{\mathrm{i}\varepsilon'}{E_{an_a}-E_{bn_b}-\mathrm{i}\varepsilon'}\langle bn_b|an_a+\rangle$$

$$=\frac{\varepsilon\varepsilon'}{E_{bn_b}-E_{an_a}+\mathrm{i}\varepsilon'}\langle bn_b|G(E_{an_a}+\mathrm{i}\varepsilon)|an_a\rangle\ .$$

将(8.29)代入此式,并利用

$$G_a(E_{an_a}+\mathrm{i}\varepsilon)|an_a\rangle=-\frac{1}{\mathrm{i}\varepsilon}|an_a\rangle \tag{8.33}$$

和

$$\langle an_a'|an_a\rangle=\delta_{n_a'n_a} \tag{8.34}$$

得

$$\langle bn_b-|an_a+\rangle=\frac{\mathrm{i}\varepsilon'}{E_{bn_b}-E_{an_a}+\mathrm{i}\varepsilon'}\delta_{ba}\delta_{n_bn_a}$$
$$-\frac{\mathrm{i}\varepsilon'}{E_{bn_b}-E_{an_a}+\mathrm{i}\varepsilon'}\,\frac{1}{E_{bn_b}-E_{an_a}-\mathrm{i}\varepsilon}\langle bn_b|U_{ba}(E_{an_a}+\mathrm{i}\varepsilon)|an_a\rangle\ .$$

由于

$$\lim_{\varepsilon'\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\mathrm{i}\varepsilon'}{E_{bn_b}-E_{an_a}+\mathrm{i}\varepsilon'}\,\frac{1}{E_{bn_b}-E_{an_a}-\mathrm{i}\varepsilon}$$
$$=\lim_{\varepsilon'\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\left(\frac{1}{E_{bn_b}-E_{an_a}-\mathrm{i}\varepsilon}-\frac{1}{E_{bn_b}-E_{an_a}+\mathrm{i}\varepsilon'}\right)$$
$$=2\pi\mathrm{i}\delta(E_{bn_b}-E_{an_a})\ ,$$

代入上式得

$$S_{bn_b,an_a}=\delta_{ba}\delta_{n_bn_a}-2\pi\mathrm{i}\delta(E_{bn_b}-E_{an_a})\langle bn_b|U_{ba}(E_{an_a}+\mathrm{i}\varepsilon)|an_a\rangle\ . \tag{8.35}$$

如果出射道与入射道不同,即 $b\neq a$, 则称发生了反应. 若出射道就是入射道,$b=a$, 但 $n_b\neq n_a$, 则称发生了散射. 若相互碰撞的两核中至少有一个核内部结构发生了变化,就说发生了非弹性散射. 若两核各自内部结构均未变,但相对运动状态发生了变化,就称发生了弹性散射. 连弹性散射也未发生的过程是不考虑的. 即在考虑的过程中或者 $b\neq a$, 或者 $n_b\neq n_a$, 总之(8.35)中的第一项为零. 所考虑过程的几率为(8.35)第二项的绝对值平方. 这就会出现

$$[\delta(E_{an_a}-E_{bn_b})]^2=\delta(E_{an_a}-E_{bn_b})\delta(0) \ . \tag{8.36}$$

采取表达式

$$\delta(E_{an_a}-E_{bn_b})=\frac{1}{2\pi\hbar}\lim_{t\to\infty}\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_{an_a}-E_{bn_b})t'}dt' , \tag{8.37}$$

知

$$\delta(0)=\frac{1}{2\pi\hbar}\lim_{t\to\infty} t \ . \tag{8.38}$$

于是得单位时间内由 $|an_a\rangle$态跃迁到 $|bn_b\rangle$态的几率

$$\frac{dW_{bn_b an_a}}{dt}=\frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle bn_b|U_{ba}(E_{an_a}+i\varepsilon)|an_a\rangle\right|^2\delta(E_{an_a}-E_{bn_b}) \ . \tag{8.39}$$

而单位时间内由态 $|an_a\rangle$跃迁到包括 $|bn_b\rangle$在内的一组选定的末态的几率为

$$P_{bn_b,an_a}=\frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle bn_b|U_{ba}(E_{an_a}+i\varepsilon)|an_a\rangle\right|^2\rho(E_{bn_b}=E_{an_a}) , \tag{8.40}$$

其中 $\rho(E)$ 为这组选定末态随能量分布的密度,称末态密度. (8.40)为多道过程的费米黄金规则. 由 (8.30)知

$$\begin{aligned} U_{ba} &= -(1-\delta_{ba})G_a^{-1}(Z)+\overline{V}_b-\overline{V}_bG(Z)\overline{V}_a \\ &= -(1-\delta_{ba})G_a^{-1}(Z)+\overline{V}_bG(Z)G_a^{-1}(Z) , \end{aligned} \tag{8.41}$$

$$\begin{aligned} U_{ba} &= -(1-\delta_{ba})G_b^{-1}(Z)+\overline{V}_a-\overline{V}_bG(Z)\overline{V}_a \\ &= -(1-\delta_{ba})G_b^{-1}(Z)+G_b^{-1}(Z)G(Z)\overline{V}_a \ . \end{aligned} \tag{8.42}$$

又由 (8.41),

$$G_a^{-1}(E_{an_a}+i\varepsilon)|an_a\rangle=-i\varepsilon|an_a\rangle , \tag{8.43}$$

和 (8.31) 得跃迁矩阵元

$$\langle bn_b|U_{ba}(E_{an_a}+i\varepsilon)|an_a\rangle=\langle bn_b|\overline{V}_b|an_a+\rangle \ . \tag{8.44}$$

(8.39) 中的 δ 函数因子使得可将 U_{ba} 的自变量改为 $E_{bn_b}+i\varepsilon$. 取 (8.43)的伴随,并将ε变成$-\varepsilon$可知

$$\langle bn_b|G_b^{-1}(E_{bn_b}+i\varepsilon)=-i\varepsilon\langle bn_b| \ . \tag{8.45}$$

由 (8.42)、(8.45) 及 (8.32) 的伴随得跃迁矩阵元的另一表达式

$$\langle bn_b|U_{ba}(E_{bn_b}+i\varepsilon)|an_a\rangle=\langle bn_b-|\overline{V}_a|an_a\rangle \ . \tag{8.46}$$

8.2 直接反应,平面波玻恩近似(PWBA)与扭曲波玻恩近似(DWBA)

上节的结果是严格的,也是全面的. 然而在对核反应的具体研究中感兴趣的常常是一种特定条件下的核反应或核反应的某一特定机制. 最常见的核反应机制有两种. 一是直接反应,另一是通过复合核的反应. 本节研究直接反应.

直接反应是从入射道直接跃迁到出射道的反应,不经过中间的复杂过程. 由跃迁矩阵元的表达式 (8.44) 右边可以看出,反应中多体系先从入射道形成入态,再在扰动$\overline{V}_b$ 的作用下由入态进入出射道. 从入射道形成入态的过程可以相当复杂. 而直接反应是指那种没有如此复杂过程的反应. 在数学表达上则是指近似

$$\langle bn_b|\overline{V}_b|an_a+\rangle\approx\langle bn_b|\overline{V}_b|an_a\rangle \tag{8.47}$$

成立. 这种近似称为玻恩(Born)近似. 若 V_a 只含入射道中 a、A 两核各自内部各核子间的作用而不含 a、A 两核间的作用,则态 $|an_a\rangle$中 a、A 两核的相对运动由平面波描述. 同理,若 V_b 只含反应道中 b、B 两核各自内部各核子间的作用而不含 b、B 两核间的作用,则态 $|bn_b\rangle$ 中 b、B 两核的相对运动也由平面波描述. 将这样的 $|an_a\rangle$和 $|bn_b\rangle$代入 (8.47) 右边的近似称为平面波玻恩近似,按英文字头简记为 PWBA. 若 V_a 和 (或) V_b 含各该道中两核间的作用,则 $|an_a\rangle$和 (或) $|bn_b\rangle$中两核间的相对运动不再由平面波描述,而会出现各该道中的散射波. 这时就称入射波和 (或) 出射波受到了扭曲. 将这样的 $|an_a\rangle$和 $|bn_b\rangle$代入 (8.47) 右边的近似称为扭曲波玻恩近似,按英文字头简记为 DWBA.

以直接 (p, n) 反应为例. 设质子轰击一个双满壳层外有一个中子的核,将这个中子击出而自己留在核中. 这种反应称为敲出反应. 用 $\boldsymbol{r}$ 表质子坐标,$\boldsymbol{r}'$表中子坐标. 忽略质子与核间的库仑作用,

在平面波玻恩近似内入射波函数为

$$\psi_a(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\chi_{\mu_a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\frac{u_a(r')}{r'}\mathscr{Y}_{l_aj_am_a}(\theta',\varphi') \quad . \tag{8.48}$$

其中 μ_a 为入射质子自旋投影量子数，χ_{μ_a} 为它的 $\frac{1}{2}$ 自旋旋量，$\hbar\boldsymbol{k}$ 为它的动量；l_a, j_a 和 m_a 为靶核内满壳层外中子的轨道量子数、总角动量量子数和总角动量投影量子数，

$$\mathscr{Y}_{l_aj_am_a}(\theta',\varphi')=\sum_{\mu_a'=\pm\frac{1}{2}}C^{j_a\,m_a}_{l_a\,m_a-\mu_a'\,\frac{1}{2}\,\mu_a'}Y_{l_a\,m_a-\mu_a'}(\theta',\varphi')\chi'_{\mu_a'} \tag{8.49}$$

为这些量子数确定的状态，称旋量球谐函数，$\chi'_{\mu_a'}$ 为投影量子数为 μ_a' 的中子自旋态．在同一近似内出射波函数为

$$\psi_b(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{u_b(r)}{r}\mathscr{Y}_{l_bj_bm_b}(\theta,\varphi)\chi'_{\mu_b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'}, \tag{8.50}$$

其中 l_b、j_b 和 m_b 为剩余核中满壳层外质子的轨道量子数、总角动量量子数和总角动量投影量子数．χ'_{μ_b} 为出射中子的自旋态，自旋投影量子数为 μ_b；$\hbar\boldsymbol{k}'$为出射中子动量．设引起反应的作用可表成零程势且集中在离中心为 R 处的核表面上，则

$$\overline{V}_b=V_0\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(r-R) \quad . \tag{8.51}$$

直接计算得平面波玻恩近似内这一(p, n)敲出反应的跃迁矩阵元为

$$\begin{aligned}T_{ba}&=\int\psi_b^\dagger(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\overline{V}_b\psi_a(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau'\\&=V_0C^{j_a\,m_a}_{l_a\,m_a-\mu_b\,\frac{1}{2}\,\mu_b}C^{j_b\,m_b}_{l_b\,m_b-\mu_a\,\frac{1}{2}\,\mu_a}\\&\quad\times\int\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r}}\frac{u_b^*(r)u_a(r)}{r^2}Y^*_{l_b\,m_b-\mu_a}(\theta,\varphi)Y_{l_a\,m_a-\mu_b}(\theta,\varphi)\delta(r-R)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

取

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k} \tag{8.52}$$

为球坐标的极轴，将上式积分号下的平面波用球面波展开，作出积分得

$$\begin{aligned}T_{ba}&=V_0u_b^*(R)u_a(R)C^{j_a\,m_a}_{l_a\,m_a-\mu_b\,\frac{1}{2}\,\mu_b}C^{j_b\,m_b}_{l_b\,m_b-\mu_a\,\frac{1}{2}\,\mu_a}\sqrt{\frac{2l_a+1}{2l_b+1}}\\&\quad\times\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\mathrm{i}^{-l}C^{l_b\,0}_{l\,0\,l_a\,0}\,C^{l_b\,m_b-\mu_a}_{l\,0\,l_a\,m_a-\mu_b}\mathrm{j}_l(qR)\\&=(-1)^{1+m_a+\mu_a}V_0u_b^*(R)u_a(R)\sqrt{(2j_a+1)(2j_b+1)}\;C^{l_a\,\mu_b-m_a}_{j_a\,-m_a\,\frac{1}{2}\,\mu_b}\\&\quad\times C^{l_b\,\mu_a-m_b}_{j_b\,-m_b\,\frac{1}{2}\,\mu_a}\sum_l\mathrm{i}^{-l}C^{l\,0}_{l_b\,0\,l_a\,0}C^{l\,0}_{l_b\,\mu_a-m_b\,l_a\,m_a-\mu_b}\mathrm{j}_l(qR) \quad .\end{aligned} \tag{8.53}$$

在第二等号处用了 CG 系数的对称性质．在不研究极化的实验中不测入射粒子和靶核的自旋投影，截面是对这些不同投影的平均；也不测出射粒子和剩余核的自旋投影，截面要对这些不同投影求和．反应的微分截面正比于

$$\frac{1}{2(2j_a+1)}\sum_{m_am_b}\sum_{\mu_a\mu_b}|T_{ba}|^2=\left(j_b+\frac{1}{2}\right)\left|V_0u_b(R)u_a(R)\right|^2\sum_l\left[C^{l\,0}_{l_b\,0\,l_a\,0}\mathrm{j}_l(qR)\right]^2, \tag{8.54}$$

推导中用了 CG 系数的正交归一性．此式表现出完全确定的角分布，可与实验比较来探讨反应的机制．

考虑靶核光学势对入射质子波的扭曲，它将表示质子入射的平面波扭曲为

$$\varepsilon_a(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r})=\sum_l\sqrt{4\pi(2l+1)}\;\mathrm{i}^l\frac{F_l^{(+)}(kr)}{kr}Y_{l\,0}(\theta,\varphi) \quad . \tag{8.55}$$

这里将入射质子方向 $\boldsymbol{k}$ 取作了球坐标的极轴．扭曲表现为将球贝塞耳函数 $\mathrm{j}_l(kr)$ 改为 $\frac{F_l^{(+)}(kr)}{kr}$，其中 $F_l^{(+)}(kr)$ 满足质子在靶核光学势作用下的径向定态薛定谔方程，以及边条件和渐近形式

$$F_l^{(+)}(0)=0 \quad , \qquad F_l^{(+)}(kr)\xrightarrow{r\to\infty}\frac{\eta_l^{(+)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)}}{2\mathrm{i}} \quad , \tag{8.56}$$

$|\eta_l^{(+)}|<1$. 入射波函数成为

$$\psi_a(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\chi_{\mu_a}\varepsilon_a(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r})\,\frac{u_a(r')}{r'}\,\mathscr{Y}_{l_aj_am_a}(\theta',\varphi')\ . \tag{8.57}$$

同理，剩余核光学势对出射中子波的扭曲把它从平面波变为

$$\varepsilon_b(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{r}')=4\pi\sum_l \mathrm{i}^l\,\frac{F_l^{(-)}(k'r')}{k'r'}\sum_{m=-l}^{l}\mathrm{Y}_{lm}^*(\theta_1,\varphi_1)\mathrm{Y}_{lm}(\theta',\varphi')\ , \tag{8.58}$$

其中 $\theta_1\varphi_1$ 为中子出射方向 $\boldsymbol{k}'$ 的球面坐标．$F_l^{(-)}(k'r')$ 满足中子在剩余核光学势作用下的径向定态薛定谔方程，以及边条件和渐近形式

$$F_l^{(-)}(0)=0\ ,\quad F_l^{(-)}(k'r')\xrightarrow{r'\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k'r'-\frac{l\pi}{2}\right)}-\eta_l^{(-)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(k'r'-\frac{l\pi}{2}\right)}}{2\mathrm{i}}\ , \tag{8.59}$$

$|\eta_l^{(-)}|>1$. 出射波函数成为

$$\psi_b(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{u_b(r)}{r}\,\mathscr{Y}_{l_bj_bm_b}(\theta,\varphi)\chi'_{\mu_b}\varepsilon_b(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{r}')\ . \tag{8.60}$$

取消反应只发生在核表面的限制，但仍维持零程作用的假定，导致反应的作用可表为

$$\overline{V}_b=V_0\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\ . \tag{8.61}$$

在扭曲波玻恩近似内 (p, n) 敲出反应的跃迁矩阵元为

$$\begin{aligned}T_{ba}&=\int\psi_b^\dagger(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\overline{V}_b\psi_a(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau'\\&=V_0\mathrm{C}^{j_a\ m_a}_{l_a\ m_a-\mu_b\ \frac{1}{2}\ \mu_b}\mathrm{C}^{j_b\ m_b}_{l_b\ m_b-\mu_a\ \frac{1}{2}\ \mu_a}\\&\quad\times\int\varepsilon_b^*(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{r})\varepsilon_a(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r})\frac{u_b^*(r)u_a(r)}{r^2}\mathrm{Y}^*_{l_b\ m_b-\mu_a}(\theta,\varphi)\mathrm{Y}_{l_a\ m_a-\mu_b}(\theta,\varphi)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

将 (8.55) 和 (8.58) 代入，并定义

$$I_{ll'}\equiv\int_0^\infty\frac{F_l^{(-)*}(k'r)}{k'r}\,\frac{F_{l'}^{(+)}(kr)}{kr}\,u_b^*(r)u_a(r)\mathrm{d}r\ , \tag{8.62}$$

得

$$\begin{aligned}T_{ba}&=V_0\mathrm{C}^{j_a\ m_a}_{l_a\ m_a-\mu_b\ \frac{1}{2}\ \mu_b}\mathrm{C}^{j_b\ m_b}_{l_b\ m_b-\mu_a\ \frac{1}{2}\ \mu_a}\sum_{lm}\mathrm{Y}_{lm}(\theta_1,\varphi_1)\sum_{l'}\mathrm{i}^{l'-l}I_{ll'}\\&\quad\times\sqrt{4\pi(2l+1)(2l_a+1)(2l_b+1)}\ (2l'+1)\sum_{LM}\frac{1}{2L+1}\ \mathrm{C}^{L0}_{l\,0\,l_b\,0}\mathrm{C}^{L\ 0}_{l'\,0\,l_a\,0}\\&\quad\times\mathrm{C}^{L\ M}_{l\ m\ l_b\ m_b-\mu_a}\mathrm{C}^{L\ M}_{l'\ 0\ l_a\ m_a-\mu_b}\\&=V_0\mathrm{C}^{j_a\ m_a}_{l_a\ m_a-\mu_b\ \frac{1}{2}\ \mu_b}\mathrm{C}^{j_b\ m_b}_{l_b\ m_b-\mu_a\ \frac{1}{2}\ \mu_a}\sum_{lm}\mathrm{Y}_{lm}(\theta_1,\varphi_1)\sum_{l'}\mathrm{i}^{l'-l}I_{ll'}\\&\quad\times\sqrt{4\pi(2l+1)(2l_a+1)(2l_b+1)}\ \sum_{L,L'}\mathrm{C}^{L\ 0}_{l\,0\,l_b\,0}\mathrm{C}^{l'\ 0}_{L'\,0\,l_a\,0}(-1)^{m_a-\mu_b}\\&\quad\times\sqrt{(2L+1)(2L'+1)}\ \mathrm{W}(ll_bl'l_aLL')\mathrm{C}^{L'\ m_b-m_a+\mu_b-\mu_a}_{l_b\ m_b-\mu_a\ l_a\ \mu_b-m_a}\mathrm{C}^{l'\ 0}_{l\ m\ L'\ m_b-m_a+\mu_b-\mu_a}\ .\end{aligned} \tag{8.63}$$

在第二等号处用了 CG 系数的对称性质和拉卡系数的定义．在不测入射质子、靶核、出射中子和剩余核的自旋投影的条件下，微分截面正比于

$$\frac{1}{2(2j_a+1)}\,|T_{ba}|^2=\left(j_b+\frac{1}{2}\right)V_0\sum_l G_l\mathrm{P}_l(\cos\theta_1)\ , \tag{8.64}$$

其中系数

$$\begin{aligned}G_l=&\sum_{L'}\sum_{L_1L_2}\sum_{l_1l_2}\sum_{l_1'l_2'}(-1)^{l+l_1'+l_2'-L'}\mathrm{i}^{l_1'-l_1+l_2-l_2'}I_{l_1l_1'}I^*_{l_2l_2'}\\&\times(2l_1+1)(2l_2+1)(2L'+1)\sqrt{(2l_1'+1)(2l_2'+1)(2L_1+1)(2L_2+1)}\\&\times\mathrm{C}^{L_1\ 0}_{l_1\,0\,l_b\,0}\mathrm{C}^{L_2\ 0}_{l_2\,0\,l_b\,0}\mathrm{C}^{l_1'\ 0}_{L_1\,0\,l_a\,0}\mathrm{C}^{l_2'\ 0}_{L_2\,0\,l_a\,0}\mathrm{C}^{l\ 0}_{l_1\,0\,l_2\,0}\mathrm{C}^{l\ 0}_{l_1'\,0\,l_2'\,0}\\&\times\mathrm{W}(l_1l_bl_1'l_aL_1L')\mathrm{W}(l_2l_bl_2'l_aL_2L')\mathrm{W}(l_2'l_2l_1'l_1L'l)\ .\end{aligned} \tag{8.65}$$

这是一系列简单的拉卡代数计算的结果．(8.64) 与 (8.65) 与平面波玻恩近似的相应表达式 (8.54) 相比确实复杂了许多，但仍是不难作数值计算的．对直接反应，在平面波玻恩近似不能与实验相符的情况下，扭曲波玻恩近似常常给出与实验很好相符的结果．

8.3　通过复合核的反应，共振与共振态

30 年代人们就已发现核反应有明显的共振现象，即当入射粒子能量接近若干特别值时反应截面陡然变得很大，就像强迫振动中强迫力的频率接近振动物体的特征频率时振幅陡然变大一样．在能量－截面图上共振现象表现为峰状结构．每一峰中截面的最

大值称为该峰的高度，峰所占的能量区间称为该峰的宽度．低能核反应中普遍存在极窄的共振峰，宽度可小到电子伏的量级．一个宽度为零的共振对应一个能量确定的状态，即定态．它是不随时间变的，寿命为无穷长．一个极窄的共振对应一个相当接近定态的状态，寿命极长．一般地说，共振峰的宽度 Γ 就是反应中形成的状态的能量宽度．它与这个态的寿命 τ 满足能量时间测不准关系．

$$\Gamma\tau \sim \hbar \ . \tag{8.66}$$

在共振峰能区内形成的反应状态称为共振态．一个宽度为电子伏量级的共振态的寿命可按此式估计为 $\tau \sim 10^{-34}/10^{-19} = 10^{-15}$(s) 的量级．而一个能量为仟电子伏量级的核子速度约为光速的千分之几，穿过尺度为若干fm的核需时为 10^{-20}s 量级．两者相比可知，共振反应远不是直接的．入射粒子与核相撞，未能穿核而过或在穿核而过的途中发生直接反应，而是形成了一个长寿命的因而是复杂的复合系统，称为复合核．寿命之长超过核子从核的一端自由穿行到核的另一端所需时间的十万倍以上．这种长寿命的态相当接近定态，有相当确定的能量因而也有相当确定的结构．经过长寿命之后它再衰变，分解入各反应道．这就是玻尔(Bohr 1936)在本世纪 30 年代中提出的通过复合核反应的概念．

为将这概念发展成理论，先考虑一简化的数学模型，其中哈密顿量

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}' \ ; \tag{8.67}$$

$\hat{H}_0$ 的本征态包括一个复合核态 $|K\rangle$，它占一单独的分立谱能级：

$$\hat{H}_0|K\rangle = E_K|K\rangle \ , \tag{8.68}$$

和各道的自由运动状态 $|sEv\rangle$，它们组成连续能谱：

$$\hat{H}_0|sEv\rangle = E|sEv\rangle \ . \tag{8.69}$$

s 仍为道的标志，v 为确定此道状态必需的其它量子数．设这些态合在一起组成一完备正交归一化的态矢量系，因此

$$\langle K|K\rangle = 1, \quad \langle K|sEv\rangle = 0 \ , \tag{8.70}$$

$$\langle sEv|s'E'v'\rangle = \delta_{ss'}\delta_{vv'}\delta(E-E') \ , \tag{8.71}$$

$$|K\rangle\langle K| + \sum_{s,v}\int dE|sEv\rangle\langle sEv| = 1 \ . \tag{8.72}$$

对 v 中含的连续变量，δ 符号意即 δ 函数，求和意即积分．设 $\hat{H}'$ 在 $\hat{H}_0$ 表象中只在复合核态和各道自由运动态间有非零矩阵元，即

$$\langle K|\hat{H}'|K\rangle = \langle sEv|\hat{H}'|s'E'v'\rangle = 0 \ . \tag{8.73}$$

(8.67)－(8.73) 为这个简化数学模型的基本假定．按此假定，对每一道 s，8.1 节定义的

$$V_s = 0 \ , \ \overline{V}_s = \hat{H}', \ \hat{H}_s = \hat{H}_0 \ . \tag{8.74}$$

s 道入态

$$|sEv+\rangle = |sEv\rangle + \frac{1}{E-\hat{H}_0+i\varepsilon}\hat{H}'|sEv+\rangle \tag{8.75}$$

为 $\hat{H}$ 的本征态，本征值为 E. 它以 $\hat{H}_0$ 的本征态为基底的展开式为

$$|sEv+\rangle = C_K|K\rangle + \sum_{s'v'}\int dE' C(s'E'v')|s'E'v'\rangle \ , \tag{8.76}$$

$$\left.\begin{aligned} C_K &= \langle K|sEv+\rangle \ , \\ C(s'E'v') &= \langle s'E'v'|sEv+\rangle \ . \end{aligned}\right\} \tag{8.77}$$

取 (8.75) 两边与 $|K\rangle$ 的标量积，由 (8.77)、(8.70)、(8.76)、(8.73) 和 (8.68) 得

$$C_K = \frac{1}{E-E_K+i\varepsilon}\sum_{s'v'}\int dE' C(s'E'v')D(s'E'v') \ , \tag{8.78}$$

其中

$$D(s'E'v') = \langle K|\hat{H}'|s'E'v'\rangle \ . \tag{8.79}$$

在 (8.78) 两边乘 $E-E_K+i\varepsilon$ 后令 $\varepsilon \to 0$ 得

$$(E-E_K)C_K = \sum_{s'v'}\int dE' C(s'E'v')D(s'E'v') \ . \tag{8.80}$$

取 (8.75) 两边与 $|s'E'v'\rangle$ 的标量积，由 (8.77)、(8.71)、(8.76)、(8.73) 和 (8.69) 得

$$C(s'E'v') = \delta_{s's}\delta_{v'v}\delta(E'-E) + \frac{1}{E-E'+i\varepsilon}C_K D^*(s'E'v') \ . \tag{8.81}$$

将此式代入(8.80)右端得

$$(E-E_K)C_K=D(sE\nu)-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{E'-E-\mathrm{i}\varepsilon}\sum_{s'\nu'}|D(s'E'\nu')|^2\mathrm{d}E'C_K. \tag{8.82}$$

在积分号下

$$\frac{1}{E'-E-\mathrm{i}\varepsilon}=\frac{1}{E'-E}+\mathrm{i}\pi\delta(E'-E). \tag{8.83}$$

这是因为左边作为 E' 的函数有奇点 $E+\mathrm{i}\varepsilon$，E' 沿实轴积分时在这奇点的下方无穷近处擦奇点而过．这等价于将此式改为 $\frac{1}{E'-E}$，奇点就在实轴上 $E'=E$ 处，沿实轴积分到 $E-\varepsilon$后在奇点下方绕一半径为 ε的半圆积到 $E+\varepsilon$，再沿实轴继续积分．挖去从 $E-\varepsilon$到 $E+\varepsilon$的无穷小区间的实轴上的积分为积分主值，它的贡献由(8.83)右边第一项表示．在以 E 为心 ε为半径的无穷小半圆周上$E'=E+\varepsilon e^{\mathrm{i}\varphi}$，$\frac{1}{E'-E}$ 为 $\frac{1}{\varepsilon}e^{-\mathrm{i}\varphi}$，$\mathrm{d}E'=\mathrm{i}\varepsilon e^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{d}\varphi$，因而 $\frac{\mathrm{d}E'}{E'-E}=\mathrm{i}\mathrm{d}\varphi$．将此式从$\varphi=-\pi$到$\varphi=0$ 积分得 $\mathrm{i}\pi$，在E' 离 E 无穷近的这个半圆周上被积函数其他因子中 E' 的值可用 E 代．其结果导致(8.83)右边第二项．将(8.83)代入(8.82)右边，经整理后得

$$C_K=\frac{D(sE\nu)}{E-E_K-\Delta E_K+\mathrm{i}\frac{\Gamma}{2}}, \tag{8.84}$$

其中

$$\Delta E_K=\sum_{s'\nu'}\int\frac{|D(s'E'\nu')|^2}{E-E'}\mathrm{d}E', \tag{8.85}$$

$$\Gamma=2\pi\sum_{s'\nu'}|D(s'E\nu')|^2, \tag{8.86}$$

(8.85)中的定积分区间为能量变化的整个区间．由态 $|sE\nu\rangle$到态 $|s'E\nu'\rangle$的跃迁振幅为

$$\langle s'E\nu'|\hat{H}'|sE\nu+\rangle=\langle s'E\nu'|\hat{H}'|K\rangle\langle K|sE\nu+\rangle$$

$$=D^*(s'E\nu')C_K=\frac{D(sE\nu)D^*(s'E\nu')}{E-E_K-\Delta E_K+\mathrm{i}\frac{\Gamma}{2}}. \tag{8.87}$$

归一化(8.71)要求在跃迁几率公式(8.40)中置末态密度 $\rho=1$．若将 $|sE\nu\rangle$取作 s 道中两核相对运动动量 $\boldsymbol{p}_s$ 确定的态，则对结合能为 B_s 的 s 道

$$E=\frac{p_s^2}{2M_s}-B_s, \tag{8.88}$$

M_s 为 s 道两核的折合质量．在这种取法中 ν具体化为 $\boldsymbol{p}_s$ 的方向 Ω，$|sE\nu\rangle$具体化为 $|sE\Omega\rangle$，完备正交关系(8.70)～(8.72)成为

$$\langle K|K\rangle=1, \qquad \langle K|sE\Omega\rangle=0, \tag{8.89}$$

$$\langle sE\Omega|s'E'\Omega'\rangle=\delta_{ss'}\delta(\Omega-\Omega')\delta(E-E'), \tag{8.90}$$

$$|K\rangle\langle K|+\sum_s\int\mathrm{d}\Omega\int\mathrm{d}E|sE\Omega\rangle\langle sE\Omega|=1, \tag{8.91}$$

其中

$$\mathrm{d}\Omega=\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi, \tag{8.92}$$

$\theta\varphi$为 $\boldsymbol{p}_s$ 的球面坐标．取坐标表象

$$\langle \boldsymbol{r}|sE\Omega\rangle=\sqrt{\frac{M_sp_s}{(2\pi\hbar)^3}}e^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}_s\cdot\boldsymbol{r}/\hbar}, \tag{8.93}$$

这是一个平面波，右边的根号因子为保证(8.90)的归一化常数．它的几率流密度为

$$j_s=\frac{p_s^2}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{8.94}$$

以此除单位时间内的跃迁几率(8.40)得从 s 道反应到 s' 道的截面

$$\sigma_{s\to s'}(E,\Omega')=4\pi^2\lambdabar_s^2\frac{\Gamma_s(E\Omega)\Gamma_{s'}(E\Omega')}{(E-E_K-\Delta E_K)^2+\frac{\Gamma^2}{4}}, \tag{8.95}$$

其中 $\lambdabar_s=\hbar/p_s=\frac{\lambda_s}{2\pi}$，$\lambda_s$ 为 s 道波长，

$$\Gamma_s(E\Omega)=2\pi|D(sE\Omega)|^2, \tag{8.96}$$

$$\Gamma=\sum_{s'}\int \mathrm{d}\Omega'\Gamma_{s'}(E\Omega') \ , \tag{8.97}$$

$$\Delta E_K=\sum_{s'}\int \mathrm{d}\Omega'\int \mathrm{d}E' \frac{|D(s'E'\Omega')|^2}{E-E'} \ , \tag{8.98}$$

$$D(sE\Omega)=\langle K|\hat{H}'|sE\Omega\rangle \ , \tag{8.99}$$

$\int \mathrm{d}\Omega'$为对动量方向的 4π 立体角积分．由于固定了出射方向 Ω',(8.95)表示的实际为微分截面.

由于整个系统处于各向同性的空间环境中,角动量守恒．复合核态 $|K\rangle$为角动量的本征态．$|sE\nu\rangle$也可取为角动量的本征态,ν即是角动量量子数．暂设各道中入射和出射的核均无自旋,角动量即是轨道角动量．ν即是轨道量子数 l 和角动量投影量子数μ 的集合.将它们的坐标表象写入球坐标表示:

$$\langle r|sEl\mu\rangle=R_l(p_s r/\hbar)Y_{l\mu}(\theta,\varphi) \ , \tag{8.100}$$

$$R_l(p_s r/\hbar)=\sqrt{\frac{2M_s p_s}{\pi\hbar^3}}\, j_l(p_s r/\hbar) \ . \tag{8.101}$$

末式右边的根号因子也是保证(8.71)的归一化常数．现考虑到末态$|s'El'\mu'\rangle$的反应截面．入射态仍有一定动量 $\boldsymbol{p}_s$,入射波仍为平面波(8.93)．以入射方向 $\boldsymbol{p}_s$ 为极轴计球坐标,将此平面波用球面波(8.100)展开得

$$|sE\Omega\rangle=\sum_l i^l\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,|sEl0\rangle \ . \tag{8.102}$$

由于角动量守恒,此展开式中只有 l 与复合核态角动量量子数 l_K 相等的一项能形成复合核,而形成的复合核角动量的投影量子数必为$\mu_K=0$. 即有

$$\langle K|\hat{H}'|sEl\mu\rangle=D_s(E)\delta_{l l_K}\delta_{\mu\mu_K} \ . \tag{8.103}$$

此式还表明末态必有 $l'=l_K=l,\mu'=\mu_K=0$．由(8.95)与(8.102)得

$$\sigma_{s\to s'}(E)=(2l_K+1)\pi\lambda\!\!\!^{-}{}_s^2\frac{\Gamma_s(E)\Gamma_{s'}(E)}{(E-E_K-\Delta E_K)^2+\frac{\Gamma^2}{4}} \ , \tag{8.104}$$

其中

$$\Gamma_s(E)=2\pi|D_s(E)|^2 \ , \tag{8.105}$$

$$\Gamma=\sum_{s'}\Gamma_{s'}(E) \ , \tag{8.106}$$

$$\Delta E_K=\sum_{s'}\int\frac{|D_{s'}(E')|^2}{E-E'}\,\mathrm{d}E' . \tag{8.107}$$

考虑 s 道中互相碰撞的两核的自旋 $\hat{I}_1$ 和 $\hat{I}_2$.它们的平方和在极轴上的投影共同确定的状态分别为 $|I_1\mu_1\rangle$和 $|I_2\mu_2\rangle$. 它们的和

$$\hat{I}=\hat{I}_1+\hat{I}_2 \tag{8.108}$$

称为道自旋．道自旋确定的态为

$$|I\mu_{12}\rangle=\sum_{\mu_1\mu_2}C^{I\,\mu_{12}}_{I_1\,\mu_1\,I_2\,\mu_2}|I_1\mu_1\rangle|I_2\mu_2\rangle \ . \tag{8.109}$$

道内轨道角动量$\boldsymbol{L}$与道自旋之和即是总角动量

$$\hat{J}=\hat{L}+\hat{I} \ . \tag{8.110}$$

由轨道角动量确定的态(8.100)和道自旋确定的态(8.109)可加出总角动量确定的态

$$|sElIJM\rangle=\sum_{\mu\mu_{12}}C^{J\,M}_{l\,\mu\,I\,\mu_{12}}|sEl\mu\rangle|I\mu_{12}\rangle$$

$$=\sum_{\mu\mu_{12}}\sum_{\mu_1\mu_2}C^{J\,M}_{l\,\mu\,I\,\mu_{12}}C^{I\,\mu_{12}}_{I_1\,\mu_1\,I_2\,\mu_2}|sEl\mu\rangle|I_1\mu_1\rangle|I_2\mu_2\rangle. \tag{8.111}$$

由角动量守恒知

$$\langle K|\hat{H}'|sElIJM\rangle=D_{slI}(E)\delta_{JJ_K}\delta_{MM_K} \ , \tag{8.112}$$

J_K 和 M_K 为复合核态的角动量平方和它在极轴上投影的量子数．另一方面有

$$|sEl0\rangle|I_1\mu_1\rangle|I_2\mu_2\rangle=\sum_I C^{I\,\mu_{12}}_{I_1\mu_1I_2\mu_2}|s\;E\;l\;0\rangle|I\;\mu_{12}\rangle$$

$$=\sum_{IJ}C^{I\,\mu_{12}}_{I_1\mu_1I_2\mu_2}C^{J\,\mu_{12}}_{l\,0\,I\,\mu_{12}}|s\;E\;l\;I\;J\;\mu_{12}\rangle$$

$$=\sum_{lJ}(-1)^{l+\mu_{12}}C^{I\ \mu_{12}}_{I_1\mu_1 I_2\mu_2}C^{l\ 0}_{J\ -\mu_{12}\ I\ \mu_{12}}\sqrt{\frac{2J+1}{2l+1}}\ |sElIJ\mu_{12}\rangle\ , \tag{8.113}$$

其中 $\mu_{12}=\mu_1+\mu_2$．由此式和(8.102)得含自旋的平面波展开式

$$|sE\Omega\rangle|I_1\mu_1\rangle|I_2\mu_2\rangle=\sum_{lIJ}\mathrm{i}^l(-1)^{I+\mu_{12}}C^{I\ \mu_{12}}_{I_1\mu_1 I_2\mu_2}C^{l\ 0}_{J\ -\mu_{12}\ I\ \mu_{12}} \times\sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}\ |s\ E\ l\ I\ J\ \mu_{12}\rangle\ . \tag{8.114}$$

角动量守恒使这一展开式中只有 $J=J_K$ 的分波能形成复合核，而复合核角动量在入射方向上的投影量子数则只能是 $M_K=\mu_{12}$，为入射道两核自旋投影量子数 μ_1 和 μ_2 之和．当入射道中两核自旋投影都确定时复合核的自旋投影 M_K 也是确定的．实际上一般核反应并不事先固定两核自旋投影，而是任它们随机取值．在此条件下截面应对这些不同投影求平均，即对μ_1 和μ_2 求和后除以 $(2I_1+1)(2I_2+1)$．将(8.114)代入绝对值平方号下会出现不同 I 和不同 l 的交叉项．不过在固定 μ_{12} 的前提下对 μ_1 和 μ_2 求和，由于 CG 系数的正交性导致不同 I 值的交叉项为零．随后对 μ_{12} 的求和则导致不同 l 值的交叉项为零．于是只需对(8.114)右边每一 l 值和每一 I 值的项分别取绝对值平方．这使 $\mathrm{i}^l(-1)^{I+\mu_{12}}$ 的贡献为一因子 1．在对 μ_1、μ_2 和 μ_{12} 求和后，两个 CG 系数由于归一性也只贡献一因子1. 最后得截面公式

$$\sigma_{s\to s'}(E)=\frac{2J_K+1}{(2I_1+1)(2I_2+1)}\ \pi\lambda_s^2\sum_{I=|I_1-I_2|}^{I_1+I_2}\ \sum_{l=|J_K-I|}^{J_K+I}\frac{\Gamma_{slI}(E)\Gamma_{s'l'I'}(E)}{(E-E_K-\Delta E_K)^2+\Gamma^2/4}\ , \tag{8.115}$$

其中 I_1 和 I_2 分别为入射道 s 中两核的自旋量子数，

$$\Gamma_{slI}(E)=2\pi|D_{slI}(E)|^2\ , \tag{8.116}$$

$$\Gamma=\sum_{s'l'I'}\Gamma_{s'l'I'}(E)\ , \tag{8.117}$$

$$\Delta E_K=\sum_{s'l'I'}\int\frac{|D_{s'l'I'}(E')|^2}{E-E'}\,\mathrm{d}E'\ . \tag{8.118}$$

这是从 s 道经角动量为 J_K 的复合核到 s' 道轨道角动量为 l' 道自旋为 I' 的末态的反应截面．(8.95)，(8.104)和(8.115)都具典型的共振

结构，在 E 接近 $E_K+\Delta E_K$ 处截面显著增大，称为共振．ΔE_K和 Γ 本也都是能量 E 的函数，不过在共振能量附近可视为常数．在此近似下

$$E=E_K+\Delta E_K \tag{8.119}$$

处截面取极大值．共振能量相对于复合核能量 E_K 有一移动 ΔE_K，称为狄拉克能移．在共振能量两侧增减 $\frac{\Gamma}{2}$ 处截面降到最大值的一半．这两处能量差 Γ 称为共振峰的宽度，又称复合核的能级宽度．由(8.96)～(8.99)、(8.105)～(8.107)和(8.103)，以及(8.116)～(8.118)和(8.112)知，共振能级的移动和宽度都是复合核态与各道运动状态相互耦合的结果．共振反应截面公式最初由布莱特(Breit 1936)和维格纳(Wigner)模仿光的共振吸收理论导出，称为布莱特－维格纳公式．

由(8.67)～(8.73)定义的数学模型并不能直接等同于核反应的实际．在只考虑核子自由度的低能核理论中核反应是核子系的非相对论量子多体问题．不同的道是同一多核子系的不同划分方式．不同道的波函数一般并不正交．并未能找到哈密顿量的分解(8.67)使 $\hat{H}_0$的完备正交归一化的本征态系由各道的运动状态和复合核态组成．下面两节将表明，核子系的量子多体问题可以按道和复合核的概念约化，等效于一模型理论．在此基础上可建立起关于直接反应和通过复合核反应的统一理论．

8.4　多体理论到多道等效理论的约化

扩充道的概念．如某道中诸核子可分解为 N 个彼此相距无穷远的核，则称它为一N 体道．按此概念，复合核可称为一单体道．$N\geqslant3$ 的道称多体道．为确定计，设系统的能量 E 不高，不足以形成开放的多体道．即只考虑包含单体道和二体道的过程．不过简单的推广就能得到包含多体道的理论．在给定能量下有些二体道也可

能不开放．这里开放是指两核距离无限远的几率不为零；而不开放或闭合则指两核距离无限远的几率为零，波函数随两核距离趋于无穷而指数地趋于零．闭合道实际就是单体道．每道 s 有势能 V_s，它是道内两核各自内部诸核子相互作用势和两核间作用势之和．对单体道，可将它视为闭合二体道来取 V_s．总势能 V 与各道势能之和的差

$$V_r = V - \sum_{s'} V_{s'} \tag{8.120}$$

也可形式地看作 r 道的势能，由此虚拟地定义一个 r 道．由于在形式推导中 r 道与其他道处于完全相等的地位，如不言明也就把它包含在一切与道有关的表达式以及求和之中．(8.120) 可改写为

$$V = \sum_s V_s \ , \tag{8.121}$$

右边和号内也包含 V_r 这一项。

定义 s 道的 T 算符

$$T_s = V_s - V_s G_s V_s \ , \tag{8.122}$$

它满足方程

$$T_s G_0 = V_s G_s , \qquad G_0 T_s = G_s V_s \ , \tag{8.123}$$

其中

$$G_0(Z) = (\hat{H}_0 - Z)^{-1} \tag{8.124}$$

为自由核子运动的预解式．由 (8.123)、(8.26)、(8.29) 和 (8.25) 得

$$\begin{aligned}\sum_{b'\neq b} T_{b'} G_0 U_{b'a} &= \sum_{b'\neq b} V_{b'} G_{b'} U_{b'a} \\ &= \sum_{b'\neq b} V_{b'} G_{b'} U_{b'a} G_a G_a^{-1} \\ &= V_a + V_b - V - \delta_{ba} V_b + \bar{V}_b G \bar{V}_a \ .\end{aligned} \tag{8.125}$$

与 (8.30) 比较知

$$U_{ba} = -(1-\delta_{ba})(\hat{H}_0 - Z) - \sum_{b'\neq b} T_{b'} G_0 U_{b'a} \ . \tag{8.126}$$

类似地有

$$U_{ba} = -(1-\delta_{ba})(\hat{H}_0 - Z) - \sum_{a'\neq a} U_{ba'} G_0 T_{a'} \ . \tag{8.127}$$

定义以道指标为行、列指标的矩阵 F, W 和 R:

$$F_{ba} = G_0 U_{ba} G_0 \ , \tag{8.128}$$

$$W_{ba} = -(1-\delta_{ba}) G_0 \ , \tag{8.129}$$

$$R_{ba} = -\delta_{ba} T_a \ . \tag{8.130}$$

(8.126) 可表成矩阵关系

$$F = W - WRF \ . \tag{8.131}$$

作分解

$$T_s = T_s^{(0)} + T_s' \ , \tag{8.132}$$

其中

$$T_s^{(0)} = -\sum_n |sn;Z\rangle t_{sn}(Z) \langle \overline{sn;Z}| \tag{8.133}$$

为可分项的和．可取

$$|sn;Z\rangle = G_0^{-1}(Z)|sn\rangle \ , \tag{8.134}$$

$$\langle \overline{sn;Z}| = \langle sn|G_0^{-1}(Z) \ , \tag{8.135}$$

在 Z 为复数时 $\langle \overline{sn;Z}|$ 并非 $|sn;Z\rangle$ 的厄米伴随．对开放的二体道 n 表两核的内部运动状态量子数，包括两核各自内部运动量子数和两核相对运动量子数．对闭合的二体道或单体道 n 表整个核子系统组成的一个束缚态的量子数，可以理解为一个复合核的量子数．不过这样定义的复合核可能离定态甚远，谈不上近似确定的能量，因而并不与核反应中观察到的窄共振峰对应．(8.133) 和号内应收进哪些项一方面视研究的问题而定，把物理上可出现的开放道和复合核态包括进来，另一方面则宜使 (8.132) 中的另一项，即 T_s' 尽可能地小．这可使实际计算收敛快且便于解释．定义

$$U'_{ba} = -(1-\delta_{ba})(\hat{H}_0 - Z) - \sum_{b'\neq b} T'_{b'} G_0 U'_{b'a} \ , \tag{8.136}$$

$$F'_{ba} = G_0 U'_{ba} G_0 \ , \qquad R'_{ba} = -\delta_{ba} T'_a \ , \tag{8.137}$$

得矩阵关系

$$F' = W - WR'F' \ . \tag{8.138}$$

再定义

$$R_{ba}^{(0)} = -\delta_{ba} T_a^{(0)} \ , \tag{8.139}$$

由 (8.132) 知

$$R = R^{(0)} + R' \ . \tag{8.140}$$

用$1-R^{(0)}F$右乘(8.138)两边，记

$$\widetilde{F}=F'(1-R^{(0)}F) \quad , \tag{8.141}$$

得

$$\widetilde{F}=W-WR^{(0)}F-WR'\widetilde{F} \quad . \tag{8.142}$$

若$F=\widetilde{F}$，即若它满足方程

$$F=F'-F'R^{(0)}F \quad , \tag{8.143}$$

则它也就是方程(8.131)的解．另一方面，若F满足方程(8.131)，则$\Delta F=\widetilde{F}-F$满足方程

$$\Delta F=-WR'\Delta F \quad . \tag{8.144}$$

这是线性方程组(8.138)的齐次方程．在(8.138)有解的情况下此方程只能有平庸解，即$\Delta F=0$．可见(8.131)的解F必满足方程(8.143)，这两个方程等价．由定义(8.128)～(8.130)还可将(8.127)表成矩阵方程

$$F=W-FRW \quad . \tag{8.145}$$

与(8.126)和(8.127)比较知，(8.136)也可表为

$$U'_{ba}=-(1-\delta_{ba})(\hat{H}_0-Z)-\sum_{a'\neq a}U_{ba'}G_0T'_{a'} \quad . \tag{8.146}$$

它的矩阵方程为

$$F'=W-F'R'W \quad . \tag{8.147}$$

平行于(8.141)～(8.144)的讨论知，方程(8.145)等价于

$$F=F'-FR^{(0)}F' \quad . \tag{8.148}$$

如前所述，F、W、R和F'都是以道指标为行列指标的矩阵．然而当行列指标确定后它们仍是指定道内态空间的算符，即仍是以态指标为行列指标的矩阵．因此这些量实际都是更大的矩阵，它们的行、列指标分别都包括一个道指标和该道内的一个态指标．要把这些矩阵完全表示出来，就要包括每一道内的一个完备正交归一化态系中的每一个态．选择(8.133)和定义(8.139)的作用是在完备的态空间中选出一个较小的"工作空间"，其中只含我们感兴趣的态．对现在考虑的核反应问题就是开放的二体道中两核的运动状态和单体道中的复合核态．将(8.133)代入(8.139)，再将结果代入(8.143)和

(8.148)，分别得

$$T=V-VG_0(Z)T \quad , \tag{8.149}$$

$$T=V-TG_0(Z)V \quad , \tag{8.150}$$

其中T,V和G_0都是工作空间的矩阵，矩阵元分别为

$$T_{bn_b,an_a}=\langle bn_b;Z|F_{ba}|an_a;Z\rangle=\langle bn_b|U_{ba}|an_a\rangle \quad , \tag{8.151}$$

$$V_{bn_b,an_a}=\langle bn_b;Z|F'_{ba}|an_a;Z\rangle=\langle bn_b|U'_{ba}|an_a\rangle \quad , \tag{8.152}$$

$$G_0(Z)_{bn_b,an_a}=t_{an_a}(Z)\delta_{ba}\delta_{n_bn_a} \quad . \tag{8.153}$$

在工作空间中我们面对的是一多道二体问题，只涉及二体道中两核的相对运动，二体道之间的跃迁，二体道与复合核态之间的耦合．(8.149)和(8.150)则是这一等效二体问题的李普曼(Lippmann 1950)–许温格(Schwinger)方程．这种等效不仅表现在方程的形式上，而且表现在对未知函数$T(Z)$的解释上．(8.151)表明，它的矩阵元确实就是(8.35)中需要的跃迁矩阵元．T为等效二体问题的T算符，V和$G_0(Z)$分别为等效问题中的势能算符和自由运动的预解式．这里的自由只是指不包括V的作用，道内两核间的作用则已通过V_s和$T_s^{(0)}$而部分地考虑了．它导致道波函数的扭曲．

李普曼–许温格方程与薛定谔方程等价，哈密顿量算符为

$$\hat{H}=\hat{H}_0+V \quad , \tag{8.154}$$

$$\hat{H}_0=G_0^{-1}(Z)+Z \quad . \tag{8.155}$$

定义(8.26)表明，$\hat{H}_s$的本征值E_{sn}是函数$G_s(Z)$的奇点，因而也是(8.122)定义的函数$T_s(Z)$的奇点．在奇点E_{sn}附近

$$T_s(Z)\approx-V_s|sn\rangle\frac{1}{E_{sn}-Z}\langle sn|V_s \quad , \tag{8.156}$$

$$V_s|sn\rangle=(\hat{H}_s-\hat{H}_0)|sn\rangle=(E_{sn}-\hat{H}_0)|sn\rangle$$

$$\approx(Z-\hat{H}_0)|sn\rangle=-G_0^{-1}(Z)|sn\rangle \quad . \tag{8.157}$$

可见，在(8.133)中宜取

$$t_{sn}(Z)=\frac{1}{E_{sn}-Z} \quad . \tag{8.158}$$

由(8.155)、(8.153)和(8.158)定义的$\hat{H}_0$在工作空间中是对角矩阵，对

角元即是 E_{sn}． $\hat{H}_0$ 对每一道分别运算，在 s 道中它还原成 $\hat{H}_s$．多体问题现在约化成了一个多道二体问题，它的态矢量为一列矢量，不同道的态矢量分别属于这个列矢量的不同行．将列矢量的标量积定义为相应行态矢量标量积之和，标量积为零定义为正交，则在这个等效理论中不同道的态之间就是正交的．由 (8.133) 选出的态中包括开放的二体道态，也包括单体道态．它们彼此正交，且可令其归一．等效理论的工作空间就由它们张成．因此，这些态组成等效理论的完备正交归一化态系．上节的推导可建立在这个等效理论的基础上．

8.5 核反应的统一理论

将等效理论的工作空间分解成 1,2 两个子空间．子空间 1 只含单体道，子空间 2 只含开放的二体道．$\hat{H}_0$ 在这两个子空间中都是对角的，且不含这两个子空间之间的耦合．V 则除在这两个子空间内部的运算外还包含子空间间的耦合．写成矩阵形式即是

$$\hat{H}=\begin{pmatrix}\hat{H}_1 & V_{12}\\ V_{21} & \hat{H}_2\end{pmatrix}, \tag{8.159}$$

$\hat{H}_1$ 为 $\hat{H}$ 在子空间 1 中的运算，$\hat{H}_2$ 为 $\hat{H}$ 在子空间 2 中的运算，V_{12} 和 V_{21} 为 $\hat{H}$ 在这两个子空间之间的耦合．用幺正变换 U_1 和 U_2 分别将 $\hat{H}_1$ 和 $\hat{H}_2$ 对角化．则幺正变换

$$U=\begin{pmatrix}U_1 & 0\\ 0 & U_2\end{pmatrix} \tag{8.160}$$

将 $\hat{H}$ 变换为

$$\hat{H}=U\hat{H}U^{+}=\begin{pmatrix}\hat{H}_1 & \hat{H}_{12}\\ \hat{H}_{21} & \hat{H}_2\end{pmatrix}=\hat{H}_0+\hat{H}', \tag{8.161}$$

其中

$$\hat{H}_0=\begin{pmatrix}\hat{H}_1 & 0\\ 0 & \hat{H}_2\end{pmatrix} \tag{8.162}$$

是对角的，

$$\hat{H}'=\begin{pmatrix}0 & \hat{H}_{12}\\ \hat{H}_{21} & 0\end{pmatrix} \tag{8.163}$$

只含单体道与开放的二体道之间的耦合．现在可按 (8.68) 和 (8.69) 定义复合核态和开放的二体道态．不过现在的复合核态 $|K\rangle$ 已是各单体道态之间相互耦合的结果，已有比较确定的能量，应可与实验观察到的窄共振峰对应．而二体道态 $|s\ E\ \nu\rangle$ 也已是各二体道态之间直接耦合的结果，因而已含直接作用的贡献．由于现在复合核态已不止一个，(8.70) 的第一式、(8.72) 和 (8.73) 分别应修改为

$$\langle K|K'\rangle=\delta_{KK'}, \tag{8.164}$$

$$\sum_K |K\rangle\langle K|+\sum_{s,\nu}\int \mathrm{d}E|s\ E\ \nu\rangle\langle s\ E\ \nu|=1, \tag{8.165}$$

$$\langle K|\hat{H}'|K'\rangle=\langle s\ E\ \nu|\hat{H}'|s'\ E'\nu'\rangle=0. \tag{8.166}$$

s 道入态 $|s\ E\ \nu+\rangle$ 仍由 (8.75) 定义，展开式 (8.76) 应扩充为

$$|s\ E\ \nu+\rangle=\sum_K C_K|K\rangle+\sum_{s'\nu'}\int \mathrm{d}E'C(s'\ E'\ \nu')|s'\ E'\ \nu'\rangle. \tag{8.167}$$

随后的讨论导致

$$(E-E_K)C_K=\sum_{s'\nu'}\int \mathrm{d}E'\,C(s'\ E'\ \nu')D_K(s'\ E'\ \nu'), \tag{8.168}$$

$$D_K(s'\ E'\ \nu')=\langle K|\hat{H}'|s'\ E'\nu'\rangle, \tag{8.169}$$

$$C(s'\ E'\ \nu')=\delta_{s's}\delta_{\nu'\nu}\,\delta(E'-E)+\frac{1}{E-E'+\mathrm{i}\varepsilon}\sum_{K'}C_{K'}D^*_{K'}(s'\ E'\ \nu'), \tag{8.170}$$

和

$$(E-E_K)C_K=D_K(s\ E\ \nu)-\sum_{K'}\sum_{s'\nu'}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}E'\frac{D_K(s'\ E'\nu')D^*_{K'}(s'\ E'\nu')}{E'-E-\mathrm{i}\varepsilon}C_{K'}. \tag{8.171}$$

用 (8.83) 做出积分，此式成为

$$\sum_{K'}(E\delta_{KK'}-W_{KK'})C_{K'}=D_K(s\ E\ \nu), \tag{8.172}$$

其中

$$W_{KK'}=E_K\delta_{KK'}+\sum_{s'\nu'}\int\frac{D_K(s'\ E'\ \nu)D^*_{K'}(s'\ E'\nu')}{E-E'}\,\mathrm{d}E'$$

$$-\mathrm{i}\pi\sum_{s'\nu'}D_K(s'\ \ E\ \nu')D^*_{K'}(s'\ \ E\ \nu')\ . \tag{8.173}$$

对一定的入射态，$s\ E\ \nu$ 是一定的，(8.172)为未知数 $C_{K'}$ 的线性代数方程组，$D_K(s\ E\ \nu)$ 为非齐次项．K' 和 K 均为子空间 1 的向量分量标号，(8.172)中未知数的数目和方程数均等于子空间 1 的维数．也可定义子空间 1 的列向量 $\boldsymbol{C}=(C_K)$, $\boldsymbol{D}=(D_K(s\ E\ \nu))$，和矩阵 $\boldsymbol{W}=(W_{KK'})$．方程组(8.172)可写成矢量形式

$$(E-\boldsymbol{W})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}\ . \tag{8.174}$$

为解此方程，先解它的齐次方程 $(E-\boldsymbol{W})\boldsymbol{C}=0$. 这就是矩阵 $\boldsymbol{W}$ 的本征方程．用 $W^{(r)}$ 表它的第 r 个本征值，$\Xi^{(r)}=(\xi^{(r)}_K)$ 为相应的本征矢，则有

$$\boldsymbol{W}\Xi^{(r)}=W^{(r)}\Xi^{(r)}\ . \tag{8.175}$$

设系统有时间反演对称性[①]，且这种对称性保留在等效多体理论中，可使 $\hat{H}'$ 的矩阵元 $D_K(s'\ E'\ \nu')$ 为实数．这使得(8.173)定义的 $\boldsymbol{W}$ 成为对称矩阵，它的转置 $\widetilde{\boldsymbol{W}}=\boldsymbol{W}$. 对称矩阵的本征方程必有解，且独立本征矢的个数等于矩阵的阶．不同本征值对应的本征矢相对于对称标量积而言正交，从而可使 $\boldsymbol{W}$ 的本征矢系成为这种意义下的正交系，即

$$\widetilde{\Xi}^{(r)}\Xi^{(r')}\equiv\sum_K\xi^{(r)}_K\xi^{(r')}_K=N_r\delta_{rr'}\ , \tag{8.176}$$

若归一化仍取作

$$\Xi^{(r)\dagger}\,\Xi^{(r)}=\sum_K\xi^{(r)*}_K\xi^{(r)}_K=1\ , \tag{8.177}$$

则

$$|N_r|=\left|\sum_K\xi^{(r)}_K\xi^{(r)}_K\right|\leqslant\sum_K\left|\xi^{(r)}_K\xi^{(r)}_K\right|=1\ . \tag{8.178}$$

① 关于时间反演及其有关推论见附录Ⅲ．

将方程(8.174)的解用这个完备正交矢量系展开：

$$\boldsymbol{C}=\sum_r C^{(r)}\Xi^{(r)}\ . \tag{8.179}$$

同时将右边的非齐次项作类似展开：

$$\boldsymbol{D}=\sum_r D^{(r)}(s\ \ E\ \nu)\,\Xi^{(r)}\ , \tag{8.180}$$

展开式系数由(8.176)求得为

$$D^{(r)}(s\ \ E\ \nu)=N_r^{-1}\widetilde{\Xi}^{(r)}\boldsymbol{D}=N_r^{-1}\sum_K\xi^{(r)}_K D_K(s\ \ E\ \nu)\ . \tag{8.181}$$

将(8.179)和(8.180)代入方程(8.174)两边，解得

$$C^{(r)}=\frac{D^{(r)}(s\ \ E\ \nu)}{E-W^{(r)}}\ , \tag{8.182}$$

$$C_K=\sum_r\frac{D^{(r)}(s\ \ E\ \nu)}{E-W^{(r)}}\,\xi^{(r)}_K\ . \tag{8.183}$$

现在跃迁振幅为

$$\langle s'\ E\ \nu'|\hat{H}'|s\ \ E\ \nu+\rangle=\sum_K\langle s'\ \ E\ \nu'|\hat{H}'|K\rangle\langle K|s\ \ E\ \nu+\rangle$$

$$=\sum_K D^*_K(s'\ \ E\ \nu')C_K=\sum_r N_r\frac{D^{(r)}(s\ \ E\ \nu)D^{(r)}(s'\ \ E\ \nu')}{E-W^{(r)}}\ , \tag{8.184}$$

末一等号处用了 $D_K(s'\ \ E\ \nu')$ 的实性．一般讲来，本征值 $W^{(r)}$ 为复数，可表为

$$W^{(r)}=E^{(r)}-\mathrm{i}\frac{\Gamma^{(r)}}{2}\ . \tag{8.185}$$

取方程(8.175)的厄米伴随得

$$\Xi^{(r)\dagger}\,\boldsymbol{W}^{\dagger}=\Xi^{(r)\dagger}\,W^{(r)*}\ . \tag{8.186}$$

用 $\Xi^{(r)}$ 右乘此式两边后减去 $\Xi^{(r)\dagger}$ 左乘(8.175)两边的结果，利用(8.177)和(8.185)得

$$\Gamma^{(r)}=\Xi^{(r)\dagger}\,(\boldsymbol{W}^{\dagger}-\boldsymbol{W})\Xi^{(r)}=|N_r|^2\,2\pi\sum_{s'\nu'}|D^{(r)}(s'\ \ E\ \nu')|^2\ . \tag{8.187}$$

在上述操作中将相减改为相加即得

$$E^{(r)}=\sum_{K}|\xi_K^{(r)}|^2 E_K+\sum_{s'\nu'}\int\frac{|N_r D^{(r)}(s'\ E'\ \nu')|^2}{E-E'}\ \mathrm{d}E' . \tag{8.188}$$

定义

$$\gamma_{s\nu}^{(r)}(E)=\sqrt{2\pi}\ N_r D^{(r)}(s\ E\ \nu) , \tag{8.189}$$

$$\Gamma_{s\nu}^{(r)}(E)=|\gamma_{s\nu}^{(r)}(E)|^2 , \tag{8.190}$$

(8.187), (8.188) 和 (8.184) 分别可写为

$$\Gamma^{(r)}=\sum_{s'\nu'}\Gamma_{s'\nu'}^{(r)}(E) , \tag{8.191}$$

$$E^{(r)}=\sum_{K}|\xi_K^{(r)}|^2 E_K\quad\frac{1}{2\pi}\sum_{s'\nu'}\int\frac{\Gamma_{s'\nu'}^{(r)}(E')}{E-E'}\ \mathrm{d}E' , \tag{8.192}$$

和

$$\langle s'E\nu'|\hat{H}'|s\ E\ \nu+\rangle=\frac{1}{2\pi}\sum_{r}\frac{\gamma_{s\nu}^{(r)}(E)\gamma_{s'\nu'}^{(r)}(E)}{N_r(E-E^{(r)}+\mathrm{i}\Gamma^{(r)}/2)} . \tag{8.193}$$

在 (8.175) 以下的推导中将 $D_K(s'\ E'\ \nu')$ 设定为实数．这在时间反演对称的理论中是可以做到的．不过为此要将展开式 (8.167) 的基底 $|s'\ E'\ \nu'\rangle$和 $|K\rangle$取成时间反演不变态，或者在时间反演下虽变但 $\hat{H}'$ 在它们之间的矩阵元不变．可是在这里研究的反应理论中，$|s'\ E'\nu'\rangle$应取成各道间直接作用下的入态，而跃迁矩阵元中的 $\langle s'\ E\ \nu'|$ 则应取成直接作用下的出态的伴随，并改记为$\langle\overline{s'\ E\ \nu'}|$．它们在时间反演变换下都不具有上面要求的性质．好在可将它们用具有上列时间反演性质的态展开．这种展开式有一些重要性质．例如，附录中证明了：入态的时间反演态恰为时间反演态的出态，出态的时间反演态正是时间反演态的入态．一个态的出态和它的时间反演态的入态用互为时间反演态的两组基底展开，相应系数互为复共轭．出态总以左矢出现．从右矢取伴随到左矢，系数又取一次复共轭．这使出态左矢和入态右矢的相应展开式中系数相同．这些性质在一般讨论和具体计算中都有用．将入态和出态的展开式种代原来具有简单时间反演性质的始末态，只须用其中的展开系数将原来的跃迁振幅 (8.193) 线性组合起来．而这又表现为对因子$\gamma_{s\nu}^{(r)}(E)$和 $\gamma_{s'\nu'}^{(r)}(E)$ 的线性组合．对入态因子组合的结果仍用符号 $\gamma_{s\nu}^{(r)}(E)$ 表示．由于这种组合是一定能量下的幺正变换，表达式 (8.190) ~ (8.192) 不变．对出态因子 $\gamma_{s'\nu'}^{(r)}(E)$ 组合的结果改用$\bar{\gamma}_{s'\nu'}^{(r)}(E)$表示．这两种组合的结果由于上述展开系数的关系而彼此相关．特别由于同是一定能量下的幺正变换而有

$$\Gamma^{(r)}=\sum_{s'\nu'}\bar{\Gamma}_{s'\nu'}^{(r)}(E) ,\quad \bar{\Gamma}_{s'\nu'}^{(r)}(E)=|\bar{\gamma}_{s'\nu'}^{(r)}(E)|^2 . \tag{8.191'}$$

通过复合核反应的跃迁振幅为

$$\langle\overline{s'\ E\ \nu'}|\hat{H}'|s\ E\ \nu+\rangle=\frac{1}{2\pi}\sum_{r}\frac{\gamma_{s\nu}^{(r)}(E)\bar{\gamma}_{s'\nu'}^{(r)}(E)}{N_r(E-E^{(r)}+\mathrm{i}\Gamma^{(r)}/2)} . \tag{8.194}$$

如果将 $D_K(s'\ E'\ \nu')$ 的表达式 (8.169) 右边的 $|s'\ E'\ \nu'\rangle$理解为直接作用下的入态，则 (8.181) 和 $\gamma_{s\nu}^{(r)}(E)$的表达式 (8.189) 也仍成立．

设在开放的二体道中 $\hat{H}_0$ 只含两核各自的能量和它们之间相对运动的动能，而不含核之间的任何作用．二体道中 $\hat{H}_0$ 的本征态记作 $|s\ E\ \nu\ 0\rangle$，它满足方程

$$\hat{H}_0|s\ E\ \nu\ 0\rangle=E|s\ E\ \nu\ 0\rangle . \tag{8.195}$$

(8.159) 中的 H_2 内含两核之间的作用，这种作用将各二体道直接耦合起来，称直接作用哈密顿量 $\hat{H}_D$．它可将 $|s\ E\ \nu\ 0\rangle$发展成直接作用的入态

$$|s\ E\ \nu\rangle=|s\ E\ \nu\ 0\rangle+\frac{1}{E-\hat{H}_0+\mathrm{i}\varepsilon}\ \hat{H}_D|s\ E\ \nu\rangle , \tag{8.196}$$

或者发展成直接作用的出态

$$|\overline{s\ E\ \nu}\rangle=|s\ E\ \nu\ 0\rangle+\frac{1}{E-\hat{H}_0-\mathrm{i}\varepsilon}\ \hat{H}_D|\overline{s\ E\ \nu}\rangle . \tag{8.197}$$

(8.160) 中的幺正变换 U_2 可以理解为将 $|s\ E\ \nu\ 0\rangle$变为 $|s\ E\ \nu\rangle$的变换．在 $\hat{H}_D$不足以形成二体道中两核的束缚态的条件下，这个变换确实是幺正的．随后，$\hat{H}'$ 再将 $|s\ E\ \nu\rangle$发展成入态

$$|s\ E\ v+\rangle=|s\ E\ v\rangle+\frac{1}{E-\hat{H}_0+\mathrm{i}\varepsilon}\hat{H}'|s\ E\ v+\rangle\ , \tag{8.198}$$

将 $|\overline{s\ E\ v}\rangle$ 发展成出态

$$|s\ E\ v-\rangle=|\overline{s\ E\ v}\rangle+\frac{1}{E-\hat{\boldsymbol{H}}_0-\mathrm{i}\varepsilon}\hat{H}'|s\ E\ v-\rangle\ . \tag{8.199}$$

$\hat{\boldsymbol{H}}_D$可理解为全部直接作用的哈密顿量，既包括二体道间的直接耦合，也包括单体道间的直接耦合．不过只有二体道间的直接耦合会进入方程(8.196)和(8.197)，按此理解

$$\hat{H}_0=\hat{\boldsymbol{H}}_0+\hat{\boldsymbol{H}}_D\ , \tag{8.200}$$

$$\hat{\boldsymbol{H}}_D+\hat{H}'=\boldsymbol{V}\ . \tag{8.201}$$

将(8.196)右边第二项移到左边，提出公因子 $|s\ E\ v\rangle$，将作用在它上面的算符除掉，得

$$|s\ E\ v\rangle=|s\ E\ v\ 0\rangle+\frac{1}{E-\hat{H}_0+\mathrm{i}\varepsilon}\hat{\boldsymbol{H}}_D|s\ E\ v\ 0\rangle$$

$$=-\mathrm{i}\varepsilon\, G_D(E+\mathrm{i}\varepsilon)|s\ E\ v\ 0\rangle\ , \tag{8.202}$$

其中

$$G_D(Z)=(\hat{\boldsymbol{H}}_0-Z)^{-1}\ . \tag{8.203}$$

同理，由(8.197)得

$$|\overline{s\ E\ v}\rangle=|s\ E\ v\ 0\rangle+\frac{1}{E-\hat{H}_0-\mathrm{i}\varepsilon}\hat{\boldsymbol{H}}_D|s\ E\ v\ 0\rangle$$

$$=\mathrm{i}\varepsilon\, G_D(E-\mathrm{i}\varepsilon)|s\ E\ v\ 0\rangle\ . \tag{8.204}$$

由(8.198)得

$$|s\ E\ v+\rangle=|s\ E\ v\rangle+\frac{1}{E-\hat{H}+\mathrm{i}\varepsilon}\hat{H}'|s\ E\ v\rangle$$

$$=-\mathrm{i}\varepsilon\, G(E+\mathrm{i}\varepsilon)|s\ E\ v\rangle\ , \tag{8.205}$$

其中

$$G(Z)=(\hat{H}-Z)^{-1}\ . \tag{8.206}$$

由(8.199)得

$$|s\ E\ v-\rangle=|\overline{s\ E\ v}\rangle+\frac{1}{E-\hat{H}-\mathrm{i}\varepsilon}\hat{H}'|\overline{s\ E\ v}\rangle$$

$$=\mathrm{i}\varepsilon\, G(E-\mathrm{i}\varepsilon)|\overline{s\ E\ v}\rangle\ . \tag{8.207}$$

另一方面，将(8.202)代入(8.205)第一个等号后，利用(8.203)、(8.206)、(8.161)和(8.28)得

$$|s\ E\ v+\rangle=-\mathrm{i}\varepsilon\, G(E+\mathrm{i}\varepsilon)|s\ E\ v\ 0\rangle\ , \tag{8.208}$$

同理

$$|s\ E\ v-\rangle=\mathrm{i}\varepsilon G(E-\mathrm{i}\varepsilon)|s\ E\ v\ 0\rangle\ . \tag{8.209}$$

由(8.200)和(8.201)知

$$\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}'=\hat{\boldsymbol{H}}_0+\boldsymbol{V}=\hat{\boldsymbol{H}}\ , \tag{8.210}$$

幺正变换(8.160)只是改变矩阵运算的基底，因此

$$G(Z)=(\hat{\boldsymbol{H}}-Z)^{-1}=\boldsymbol{G}(Z)\ . \tag{8.211}$$

将 $\hat{\boldsymbol{H}}$ 作分解(8.154)，由(8.27)知

$$\boldsymbol{G}(Z)=\boldsymbol{G}_0(Z)-\boldsymbol{G}_0(Z)\boldsymbol{V}\boldsymbol{G}(Z)\ . \tag{8.212}$$

将此式两边作用在 $|s\ E\ v\ 0\rangle$ 上，利用

$$-\mathrm{i}\varepsilon\, G_0(E+\mathrm{i}\varepsilon)|s\ E\ v\ 0\rangle=|s\ E\ v\ 0\rangle \tag{8.213}$$

得

$$|s\ E\ v+\rangle=|s\ E\ v\ 0\rangle+\frac{1}{E-\hat{\boldsymbol{H}}_0+\mathrm{i}\varepsilon}\boldsymbol{V}|s\ E\ v+\rangle\ . \tag{8.214}$$

类似可得

$$|s\ E\ v-\rangle=|s\ E\ v\ 0\rangle+\frac{1}{E-\hat{\boldsymbol{H}}_0-\mathrm{i}\varepsilon}\boldsymbol{V}|s\ E\ v-\rangle\ . \tag{8.215}$$

分别在这两式上左乘 $\boldsymbol{V}$，定义

$$\boldsymbol{T}(E+\mathrm{i}\varepsilon)|s\ E\ v\ 0\rangle=\boldsymbol{V}|s\ E\ v+\rangle\ , \tag{8.216}$$

$$\boldsymbol{T}(E-\mathrm{i}\varepsilon)|s\ E\ v\ 0\rangle=\boldsymbol{V}|s\ E\ v-\rangle\ , \tag{8.217}$$

得

$$\boldsymbol{T}(E\pm\mathrm{i}\varepsilon)|s\ E\ v\ 0\rangle=(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}\boldsymbol{G}_0(E\pm\mathrm{i}\varepsilon)\boldsymbol{T}(E\pm\mathrm{i}\varepsilon))|s\ E\ v\ 0\rangle\ . \tag{8.218}$$

这表明对二体道在能壳上按(8.216)和(8.217)定义的算符 $\boldsymbol{T}$，在能壳上对二体道的运算满足方程(8.149)，而这正是所要求的．因此可放

心地用(8.198)定义的入态和(8.199)定义的出态计算跃迁振幅.

在(8.207)第一个等号两边取伴随,与(8.198)表示的入态求标量积,得

$$\begin{aligned}\langle s'\ E'\ \nu'-|s\ E\ \nu+\rangle &= \langle \overline{s'\ E'\ \nu'}|s\ E\ \nu\rangle \\ &+\left(\frac{1}{E-E'+\mathrm{i}\varepsilon}-\frac{1}{E-E'-\mathrm{i}\varepsilon}\right)\langle\overline{s'\ E'\ \nu'}|\hat{H}'|s\ E\ \nu+\rangle \\ &=\langle\overline{s'\ E'\ \nu'}|\ s\ E\ \nu\rangle-2\pi\mathrm{i}\delta(E-E')\langle\overline{s'\ E'\ \nu'}|\hat{H}'|s\ E\ \nu+\rangle\ .\end{aligned} \tag{8.219}$$

在第二个等号处用了(8.83).类似地,在(8.204)第一个等号两边取伴随,与(8.196)表示的直接作用入态求标量积,利用 $\hat{H}_0$ 的本征态 $|s\ E\ \nu\ 0\rangle$ 的正交归一性得

$$\begin{aligned}\langle\overline{s' E' \nu'}|s\ E\nu\rangle &=\delta_{s's}\delta_{\nu'\nu}\delta(E'-E) \\ &-2\pi\mathrm{i}\delta(E-E')\langle s'\ E'\ \nu'\ 0|\hat{H}_{\mathrm{D}}|\ s\ E\ \nu\rangle\ .\end{aligned} \tag{8.220}$$

代入上式得由(8.24)定义的散射矩阵元

$$\begin{aligned}\langle s'\ E'\ \nu'-|s\ E\ \nu+\rangle &=\delta_{s's}\delta_{\nu'\nu}\delta(E'-E) \\ &-2\pi\mathrm{i}\delta(E-E')\langle s'\ E'\ \nu'\ 0|T|s\ E\ \nu\ 0\rangle\ ,\end{aligned} \tag{8.221}$$

$$T=T_{\mathrm{D}}+T'\ . \tag{8.222}$$

其中

$$\langle s'\ E'\ \nu'\ 0|T_{\mathrm{D}}|s\ E\ \nu\ 0\rangle=\langle s'\ E'\ \nu'\ 0|\hat{H}_{\mathrm{D}}|s\ E\ \nu\rangle \tag{8.223}$$

为直接反应的跃迁矩阵元;而

$$\langle s'\ E'\ \nu'\ 0|T'|s\ E\ \nu\ 0\rangle=\langle\overline{s'\ E'\ \nu'}|\hat{H}'|s\ E\ \nu+\rangle \tag{8.224}$$

为通过复合核反应的跃迁矩阵元,它在能壳上由(8.194)表示.将 $|s\ E\ \nu\ 0\rangle$ 取作动量的本征态,量子数集合 ν 包括动量方向 Ω 和道内各核的自旋量子数.现在用 s 不仅表示道,且还表示道内各核的自旋量子数,则 $\hat{H}_0$ 的本征态可表为 $|s\ E\ \Omega\ 0\rangle$.类似(8.95)之前的推导可得微分截面的普遍表达式

$$\begin{aligned}\sigma_{s\to s'}(E\Omega')=4\pi^2\lambda\!\!\!^{-}{}_s^2\Bigg|&2\pi\langle s'\ E\ \Omega'\ 0|\hat{H}_{\mathrm{D}}|s\ E\ \Omega\rangle \\ &+\sum_r\frac{\gamma_s^{(r)}(E\Omega)\bar{\gamma}_{s'}^{(r)}(E\Omega')}{N_r(E-E^{(r)}-\mathrm{i}\Gamma^{(r)}/2)}\Bigg|^2\ .\end{aligned} \tag{8.225}$$

此式统一地表达了直接反应和通过复合核反应对截面的贡献.这二者是相干的.此外,从 $\gamma_{s\nu}^{(r)}(E)$ 和 $\Gamma^{(r)}$ 的表达式中还可看到,与复合核相耦合的是经直接作用扭曲了的二体道运动状态.这种干涉和扭曲会在实验现象中表露出来.

本节和上节可作为讨论核反应的一个普遍理论框架,且是很灵活的.讨论对象可由(8.133)选择.可像本节前面讨论的那样把全部开放道都包括进来,建立关于通过复合核反应和直接反应的统一理论;也可只选一个道而将其他道的影响表现在这个道运动的势函数中.由于忽略了其他开放道,几率将不守恒,势函数应是复的,这就是光学模型.光学模型可纳入这个框架.也可讨论居间情况,即不只讨论一个道,却又不讨论全体开放道.由于仍忽略了一些开放道,几率仍不守恒,相互作用哈密顿量仍非厄米.这种理论可视为光学模型的推广.充分利用(8.133)选择的灵活性,可以按实际需要开发出核反应理论的新分支.

第9章 重离子反应选题

9.1 重离子反应的特点与一般描述

质量数大于4的核之间的碰撞称重离子碰撞．原子核就是将原子中的电子完全剥离后剩下的离子．不过离子并不一定要将电子完全剥离，它是一个较一般的概念．两个携带着电子的核之间的碰撞应称为离子碰撞．在重核碰撞实验中，被加速的入射粒子一般并未完全电离．因此重核碰撞就被称为重离子碰撞，由此发生的核反应就称为重离子反应．这是一种操作性称呼，实际发生的还是核过程．

重离子反应的基本特点就是参与反应的核较重，因而德布罗意(de Broglie)波长较短，两核各自作为整体的运动可视为经典的，在空间各自走一条轨道．以不太重的 ^{12}C 核为例，设它的动能也不高，只有每核子25 MeV，则它的德布罗意波长为

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{\sqrt{2mE}}=\frac{6.6\times10^{-34}}{\sqrt{2\times12^2\times1.66\times25\times1.6\times10^{-40}}}\ \text{m}=0.5\ \text{fm}\ , \tag{9.1}$$

比 ^{12}C 核的半径 $1.175\times12^{1/3}$ fm = 2.7 fm 小得多．如果将它加速到每核子100 MeV，德布罗意波长更短，只有0.25 fm．而对每核子9 MeV的 ^{238}U 核，德布罗意波长仅0.04 fm，与这个核的半径7.3 fm相比可忽略不计．可见在重离子碰撞中，每个核作为整体的运动都是经典的，走轨道，每时每刻都有确定位置．重离子反应是两个有确定位置的核之间的反应．随着时间的推移，两核位置变化，两核间也发生反应．既然两核各有明确轨道，就可定义明确的瞄准距离 b，它是靶核

到入射核轨道起始渐近线的垂直距离(图9-1)．由此还可定义两核

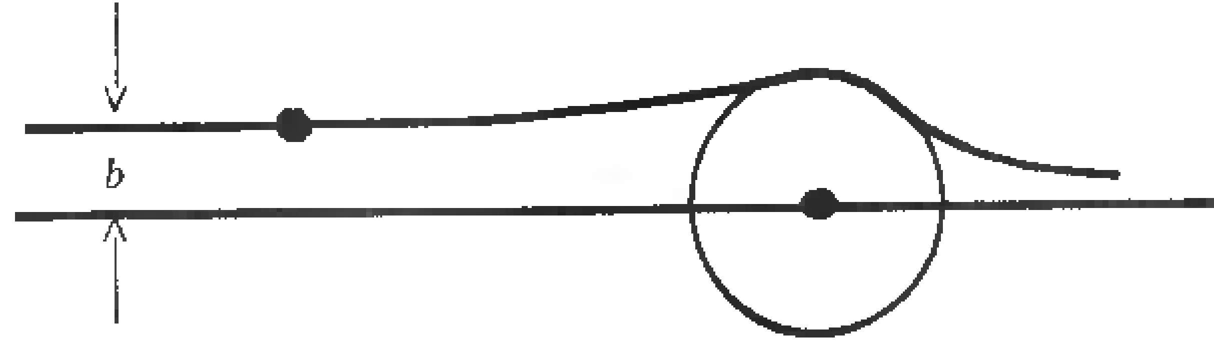


图9-1 瞄准距离 b

相对运动的明确的轨道角动量．以 $\hbar$ 为单位，它是

$$l=pb/\hbar=kb\ , \tag{9.2}$$

p 为入射核相对靶核的动量，k 为入射波波矢量长度．在瞄准距离大或入射能量低时两核不能接触，只能通过静电场相互作用，这就是库仑作用．这种作用的结果，一是库仑散射，它可用卢瑟福(Rutherford)公式很好描写；二是核在一迅速靠近而后又远离的库仑场作用下被激发，称为库仑激发．由于只涉及电磁作用，库仑激发的理论是完全清楚的．在这种过程中两核间的最近距离 R_m 与瞄准距离 b 间的关系可由角动量守恒

$$pb=p'R_m \tag{9.3}$$

和能量守恒

$$\frac{p^2}{2m}=\frac{p'^2}{2m}+\frac{\zeta}{R_m}=E \tag{9.4}$$

解得。其中 p' 为最近距离处两核的相对动量，m 为两核的折合质量，$\zeta=Z_1Z_2\hbar c\alpha$，$Z_1$ 和 Z_2 分别为两核的电荷数．解得的关系为

$$b=R_m\sqrt{1-\frac{\zeta}{ER_m}}\ , \tag{9.5}$$

$$R_m=\frac{\zeta}{2E}\left[1+\sqrt{1+(2Eb/\zeta)^2}\ \right]. \tag{9.6}$$

用 R_1 和 R_2 分别表示入射核和靶核的半径，$R_g=R_1+R_2$ 为它们的擦边距离，在这距离处两核恰相切．用 R_g 代入(9.5)中的 R_m 得到的瞄准距离记作 b_g，称为擦边瞄准距离，相应的角动量 $l_g=kb_g$ 称为擦边

角动量．前面的讨论表明 $b>b_g$ 或 $l>l_g$ 的碰撞中只会发生库仑散射和库仑激发．当然，两核原则上可穿透库仑势垒和离心势垒而接触，从而发生核反应．但一则由于重离子反应中两核电荷数高，库仑排斥强，二则由于重离子质量大，这种势垒穿透几率很小．

如果 $E>\zeta/R_g$，由 (9.5) 得到的 $b_g>0$．当 b 趋近 b_g 时，虽整个入射核穿透库仑势垒和离心势垒与靶核相遇的几率仍很小，但若干核子或核子集团穿透两核间的势垒进入另一核的几率却可能显著．由此可能发生两种过程．一是 8.2 节介绍的直接反应，一些核子直接转移到另一核中．对重离子反应，直接作用过程会因为模糊的核表面而变得复杂．转移不同数目核子的反应混在一起使分析变得困难．强库仑场对碰撞中两核运动的扭曲也增加分析的复杂性．好在库仑扭曲是完全清楚的，可明确地分离出来．另一种过程是形成准分子态．在这种过程中，在势垒两侧来回穿透的核子或核子集团扮演着类似分子中的价电子的角色，称为价核子或价集团．它们把两个核拉到一起形成寿命远长于直接反应时间的亚稳态，即准分子态．两核组成的临时复合体称为核分子，可视为一种短寿命的复合核．核分子分解成的一对末态核相对始态核而言会发生不同数目的核子转移．

若 $b<b_g$，则两核相撞．若 b 仍大于另一临界值 b_d，碰撞限于核表面，则称擦边反应．擦边过程可以是弹性散射，也可以有粒子、电荷或能量的少量转移．后者称准弹性过程．擦边过程中的转移比前面讲的通过势垒穿透的转移量还是大一些，也复杂一些．擦边反应的总截面可表为

$$\sigma_g=\pi(b_g^2-b_d^2)=\pi\lambda\!\!\!^{-2}(l_g^2-l_d^2)\ , \qquad (9.7)$$

其中 $l_d=kb_d$ 为 b_d 对应的角动量，$\lambda\!\!\!^-=\dfrac{1}{k}=\dfrac{\lambda}{2\pi}$．随着瞄准距离进一步减小，反应的深度越来越大，两核间的粒子、电荷和能量的转移越来越多，并且有越来越多的核子和核子集团抛射出来．发生大量核子、电荷和能量转移，并有大量核子和核子集团抛射出来的反应，如果还能依稀辨认出入射核和靶核的踪迹，就称为深度非弹性过程．它既有别于擦边反应，又有别于两核完全的融合．能发生深度非弹性过程的最大瞄准距离就是 b_d，而发生融合反应的最大瞄准距离记作 b_f．深度非弹性过程的总截面即是

$$\sigma_d=\pi(b_d^2-b_f^2)=\pi\lambda\!\!\!^{-2}(l_d^2-l_f^2)\ , \qquad (9.8)$$

而融合反应的总截面为

$$\sigma_f=\pi b_f^2=\pi\lambda\!\!\!^{-2}l_f^2\ . \qquad (9.9)$$

$l_f=kb_f$ 为 b_f 对应的临界角动量．融合反应中入射核与靶核几乎对心碰撞，形成复合核．随即失去对入射道的记忆，或抛射多余核子、核子集团和光子后跃迁到基态，或发生裂变，形成融合－裂变反应．在这些过程中已看不到入射核和靶核的踪迹．

融合反应，对心碰撞，在重离子反应的研究中也处于核心地位．能量较低的融合反应除用来合成新核素外还是研究原子核大幅度形变问题的手段，与裂变的研究互相补充．高能对心碰撞是形成核内高压高温环境，研究核物态方程，实现诸如 π 凝聚态、反常核态和夸克－胶子等离子体等相变的手段．一般认为，这里隐藏着核物理的最大机遇与挑战．

9.2 边缘反应，准分子态，超形变核

边缘反应包括临近擦边却尚未擦边但有核子穿透势垒而交换的反应和擦边反应．边缘反应的机制有直接反应也有通过形成准分子态的反应．直接反应已在 8.2 节作了一般讨论，本节着重讨论准分子态，以及在这类反应中形成的高自旋态和超形变核．图 9-2 表示 ^{12}C-^{12}C 碰撞中核结构因子

$$\xi(E)=E\sigma(E)/\sum_{l=0}^{10}(2l+1)T_l \qquad (9.10)$$

随质心系能量 E 的变化．式中

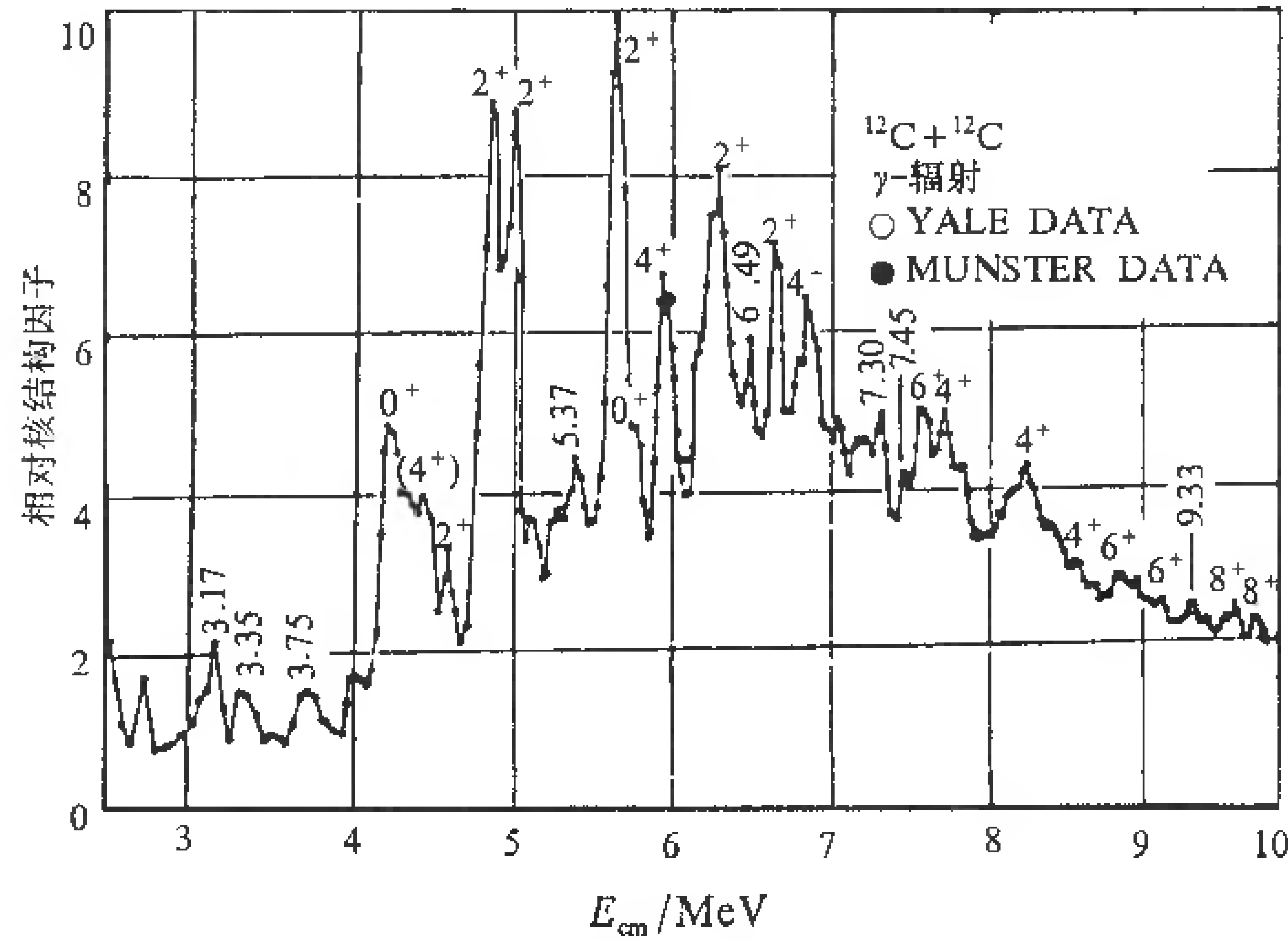


图 9-2 由 γ 辐射产额导出的 $^{12}C+^{12}C$ 反应的核结构因子 [取自Erb 1984]

$$T_l=\frac{kR_g}{F_l^2(kR_g)+G_l^2(kR_g)} \tag{9.11}$$

为 l 分波库仑势垒和离心势垒的透射系数，F_l 和 G_l 分别为正规和非正规的 l 分波库仑波函数[①]，其余符号定义如常．由于约去了核外离心势和库仑势的影响，与截面 $\sigma(E)$ 相比，核结构因子 $\xi(E)$ 较干净地反映出核作用与核动力学．约去的透射系数 T_l 是能量的缓变函数，图 9-2 显示的随能量变化的涨落完全是核结构效应．值得注意的是，在库仑势垒以下出现一系列的窄共振峰．它表明在这些共振能量处形成了较长寿命的复合系统．库仑势垒定义为两核相切位形的库仑势能

$$E_{cb}=\frac{\zeta}{R_g}. \tag{9.12}$$

① 参阅张启仁,《量子力学》, §6.6, 高等教育出版社, 1989.

由上节知，能量低于库仑势垒的碰撞中擦边瞄准距离 $b_g<0$，即按经典力学两核不可能接触．如按(6.66)取核半径 $R=1.175A^{1/3}$ fm，两 ^{12}C 核间的库仑势垒为 9.7MeV，图 9-2 中的绝大部分共振峰能量低于此值．个别能量高于此值的共振，自旋高达 8．对两个自旋为零的 ^{12}C 核组成的系统，自旋量子数即是两核相对转动的轨道量子数．轨道量子数为 8 的离心势垒也会将两核保持在擦边距离 R_g 之外．两核间要形成如此多的窄共振态，必须彼此有吸引作用，而且吸引作用要足够强以形成较长寿命的复合体．互不接触的两核间发生吸引的机制有三．其一为测不准关系导致的位置不确定性，不确定的程度可由波长估计．质心系能量若干 MeV 的两个 ^{12}C 核相对运动的波长达若干费米，这使它们在经典力学看来互不接触的条件下按量子力学有一定几率互相接触而彼此吸引．其二为核子间交换介子导致的核力有有限力程，交换 π 介子的核力在两核子相距 2fm 处仍显著．这使互不接触的两核只要表面间的最短距离小于 2fm，仍可彼此吸引．不过这两项吸引机制显然都很弱，不足以导致如此多的窄共振态．其三就是两核间交换核子和核子集团．两个 ^{12}C 核间甚至可交换一个 α 粒子形成短暂的 ^{8}Be-^{16}O 态，或交换两个 α 粒子形成短暂的 α-^{20}Ne 态．就像两个原子间交换电子可导致原子间足够强的吸引以形成分子那样，两核间交换核子或核子集团也能导致核间较强的吸引．由此形成的两核间的束缚态或共振态即是准分子态．库仑势垒下的众多窄共振是存在准分子态的实验证据．

复合核的准分子态与由原子结合成分子的机制也有重要区别．原子间交换的电子质量比原子本身的质量小数千倍．这使绝热近似很好地适用．在考虑电子的运动时原子整体可视为不动的，而在考虑原子整体的运动时极快速运动的电子可认为是完全跟随原子的．由交换电子而导致的原子间化学力可用一保守势函数表示．原子核的准分子态与此不同，两核间交换的核子质量与核质量

是可以相比的．这使绝热近似与实际相距甚远．在考虑核子的运动时核整体的运动有不可忽视的影响，在考虑核整体的运动时核子也不是完全跟随的．在交换核子或核子集团时可能导致核本身的激发．$^{12}C-^{12}C$ 碰撞中交换 α 粒子的过程是完全不能用绝热近似的．这种过程导致 $^{12}C-^{12}C$、$^{8}Be-^{16}O$ 和 $\alpha-^{20}Ne$ 诸道的耦合．核-核间通过准分子态的反应是能量在多个核子间和多道间的转移过程．正是这种多体过程导致准分子态较长的寿命，表现为低能重离子反应中的窄共振．用势函数表达的核核作用是无法解释这些窄共振的．

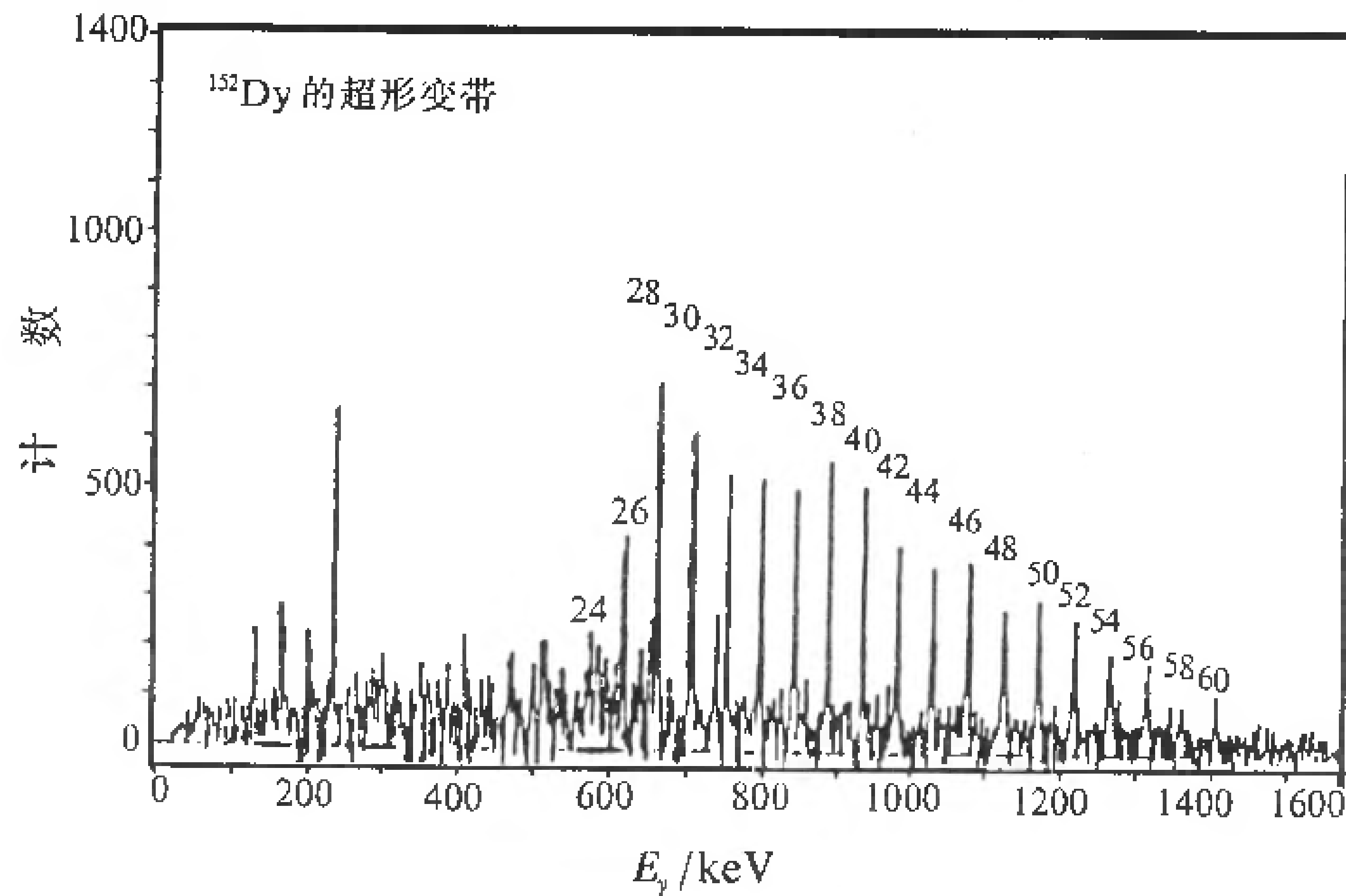


图 9-3　205MeV $^{108}Pd(^{48}Ca,4n)^{152}Dy$ 反应生成的 ^{152}Dy 核超形变带的 γ 射线谱 [取自 Twin 1986]

图 9-3 显示 205MeV 的重离子 ^{48}Ca 轰击 ^{108}Pd 核发生的 $^{108}Pd(^{48}Ca,4n)^{152}Dy$ 反应中，末态核 ^{152}Dy 的 γ 射线谱．谱线顶端的数字标志发射该线的 ^{152}Dy 核的自旋．可见在这一反应中形成了 ^{152}Dy 核的一系列高自旋态．205MeV 的 ^{48}Ca 轰击静止的 ^{108}Pd，在两核质心系中的能量为 142MeV．相对运动的波长为 0.4fm，与 ^{48}Ca 的半径 4.276fm 和 ^{108}Pd 的半径 5.679fm 相比都可忽略．反应中两核的相对运动可用经典近似．两核的擦边距离为 9.95fm，库仑势垒为 133MeV．可见，当两核靠近到擦边距离时，为克服库仑势垒已耗去相对运动能量的 94%．这一反应至多是擦边反应．用擦边距离代入 (9.5) 中的 R_m，算得此反应的擦边瞄准距离为 $b_g=2.488$fm，从而得擦边角动量量子数 $l_g=37$．由于互相碰撞的两核各自自旋均为零，相对运动轨道角动量即系统绕质心的总角动量．反应中放出的四个中子是蒸发出来的，各向同性，不携带角动量．因此，相对运动的轨道角动量也就是末态核 ^{152}Dy 的自旋．图 9-3 中的 γ 谱线多半是从 ^{152}Dy 核的自旋高于擦边量子数 37 的高自旋态发出的．在形成这些态的过程中，入射核和靶核不能直接接触，只能通过穿透势垒交换核子而相互作用．即是说，这些核态为准分子态．处于这种态中的核是长形超形变的．

擦边反应的情况则较复杂．当两核擦边相撞时会交换或转移核子．可以转移单个核子也可以转移多个核子．在转移多个核子时，可以一次转移一个核子集团，也可以分多次，每次转移一个核子．原则上这些过程可用 8.2 节的直接反应理论或它的简单推广来讨论．不过由于花样多，情形复杂，认真的理论处理会麻烦些，当然收获也会丰富些．擦边碰撞也可能导致核表面的局部激发，退激发时抛射出少量粒子．这类过程已不是简单的直接反应．擦边反应的共同点是质量、电荷、能量的转移都较轻微，抛射出的粒子也甚少，是一种准弹性过程．

9.3　深度非弹性过程

在能量足够高的核-核碰撞中，存在一临界瞄准距离 $b_d>0$，在瞄准距离 $b<b_d$ 的情形中两核的大部分彼此相撞，造成较大规模的质量、电荷和能量的转移或抛射，是为深度非弹性碰撞．深度非弹性碰撞自然比擦边碰撞复杂，内容也更丰富，却仍有它简单而普遍的规律和形象．一是反应产物主要仍是两个核，它们的质量数与电荷数分别接近入射核和靶核．这有别于融合反应．在融合反应中，两核几乎对心碰撞，形成复合核，失去关于入射道的记忆．然后复合核

或者衰变到基态，或者裂变．裂变的方式只取决于复合核的状态，而与入射道无关．二是反应中质量、电荷和能量都有较多的转移和抛射，转移和抛射的量呈统计分布，抛射可用蒸发模型处理．这有别于擦边反应的准弹性过程，表明两核相撞后原来的动能有相当一部分被耗散，转变为核内的激发能．激发最初可能是局部的，在随后的演变中扩散．两核动能的耗散大体可由含摩擦力的经典运动方程处理．在耗散的同时，两核合成一长形复合体绕垂直于反应平面的轴转动．从反应产物角分布的各向异性得知，整个深度非弹性碰撞中，这种转动不到一周角．转动的角度可用作研究碰撞中各种现象发展的时标．对实验数据的分析表明，各种可观察量按此时标的扩散类似宏观现象中的热扩散或物质扩散，类似布朗(Brown)运动．这种扩散可用福克(Fock)－普朗克方程

$$\frac{\partial f(\eta,t)}{\partial t} + v\frac{\partial f(\eta,t)}{\partial \eta} = D\,\frac{\partial^2 f(\eta,t)}{\partial \eta^2} \tag{9.13}$$

描写．η 是所考虑的观测量，$f(\eta,t)$ 是 t 时刻 η 取值的几率分布，v是这个分布的漂移速度，D 为扩散系数．若 v 和 D 都是常数，方程(9.13)可精确解得

$$f(\eta,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp\left[-\frac{(\eta-vt)^2}{4Dt}\right]. \tag{9.14}$$

在一定时刻 t，这是 η 的一个高斯分布．分布的中心位置 $\eta=vt$，以速度 v 漂移．分布的宽度为

$$\Gamma=4\sqrt{Dt\ln 2}\ , \tag{9.15}$$

它是中心两侧 f 降到峰值一半处的 η 值之差．宽度随时间增长，宽度平方 Γ^2是时间 t 的线性函数．

为了将随时间的演化与实验比较，要测出作为时标的转动角 θ．用 $\mathscr{I}$ 表示复合体的转动惯量并设它在转动过程中是一常数．用 $l\hbar$ 表复合体的转动角动量，l 应为 l_d 与 l_f间的某种平均值．转动角速度为

$$\omega=l\hbar/\mathscr{I}\ , \tag{9.16}$$

转动角为

$$\theta-\theta_0=\omega t\ . \tag{9.17}$$

实验中直接测量的是反应产物的偏转角．如图 9-4 所示，同一偏转角可以对应几种不同的反应过程．对瞄准距离 $b>b_g$ 的入射核，主要是库仑散射，排斥力将入射核推开，使它向入射的同侧偏转．随着瞄准距离的减小，向同侧的偏转角增大，直到吸引的核力直接或间接(通过交换价核子)地开始起作用．吸引作用将入射核拉向靶核，

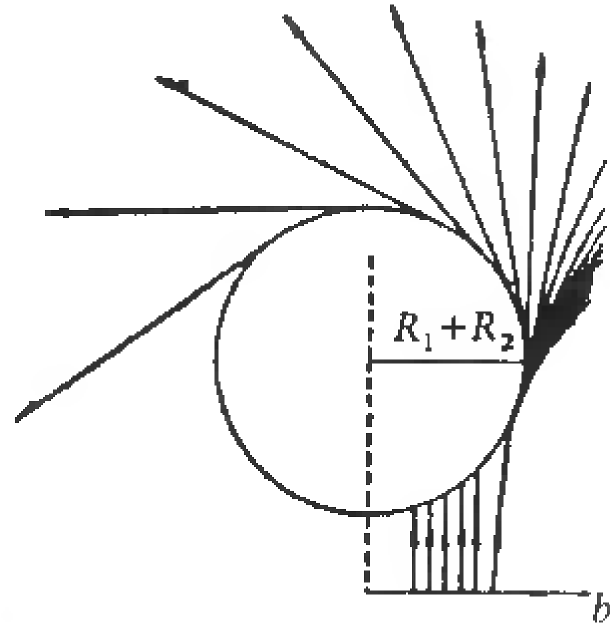


图 9-4　偏转角与反应深度和反应时间的关联

抵消着库仑斥力的作用，使偏转角减小．与此相伴随，边缘反应开始发生．随着瞄准距离进一步减小，向与入射同侧的偏转进一步减小最终到零，直至发生向靶核另一侧的偏转．以靶核位置为标准，从靶核中心作一条与入射方向相平行的轴，入射方向在此轴的一侧．将向这一侧的遍转角的符号取为正，向另一侧的偏转角的符号取作负．深度非弹性过程中形成的长形复合体由靶核到入射核的指向逆时针地由正的偏转角转向负的偏转角．在此过程中各种观察量随时间耗散，它们的分布随时间扩散．在复合体以匀角速度转动的假设下，也就是随偏转角变小而扩散．不过实验并不直接测偏转角的符号，并不知晓偏转是朝向入射核的一侧还是朝向靶核的另一侧．这要由其他辅助现象帮助确定．实验发现，在一给定方向上出射核的能量围绕两个明显不同的中心作统计分布．一个中心接近弹性散射核所应具有的能量．围绕这个中心的分布应是准弹性过程的产物．这个偏转角对这些产物应取正号．另一分布中心的能量显著低于弹性散射核所应具有的能量，表明有显著的耗散．这是深度非弹性过程的信号．与显著耗散相伴随的应是复合体的可观的转动角．这同一个偏转角对这些围绕低能中心分布的产物应取负号．确定了带符号的偏转角后就可检验各种观察量随偏转角的扩散．

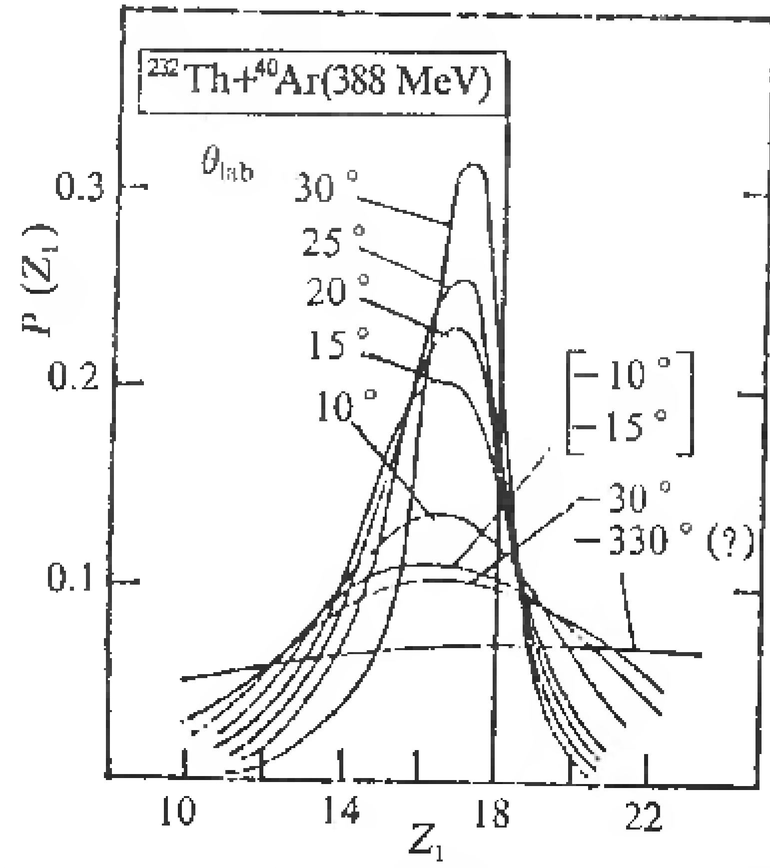


图 9-5　类入射粒子碎片的电荷数分布与偏转角的关联［取自 Nörenberg 1974)

图 9-5 表示的是在 ^{40}Ar(388 MeV)+^{232}Th 反应中不同偏转角的与入射核 ^{40}Ar 接近的出射核的电荷数 Z_1分布．看得出它们都是较好的高斯分布．从 30°到 −30°，分布中心没有显著的漂移，宽度却明显

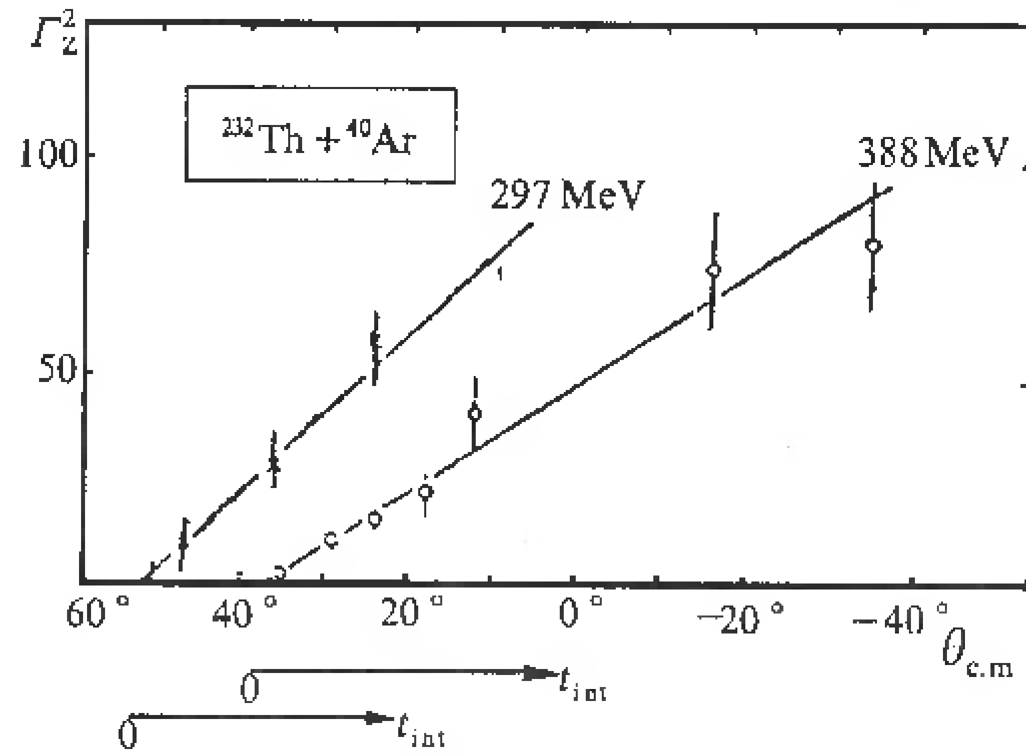


图 9-6　类入射粒子碎片的电荷分布宽度平方 Γ_Z^2 与偏转角 $\theta_{c.m}$ 的线性关系。每条直线上端标出了相应入射核能量，下方示意出作用时间 t_{int}　［取自 Nörenberg 1974］

增长了，即确实发生了扩散．宽度平方随偏转角减小的增长即随时

间的增长，表示在图 9-6 中．它们确实是相当好的线性函数，与(9.15)一致．

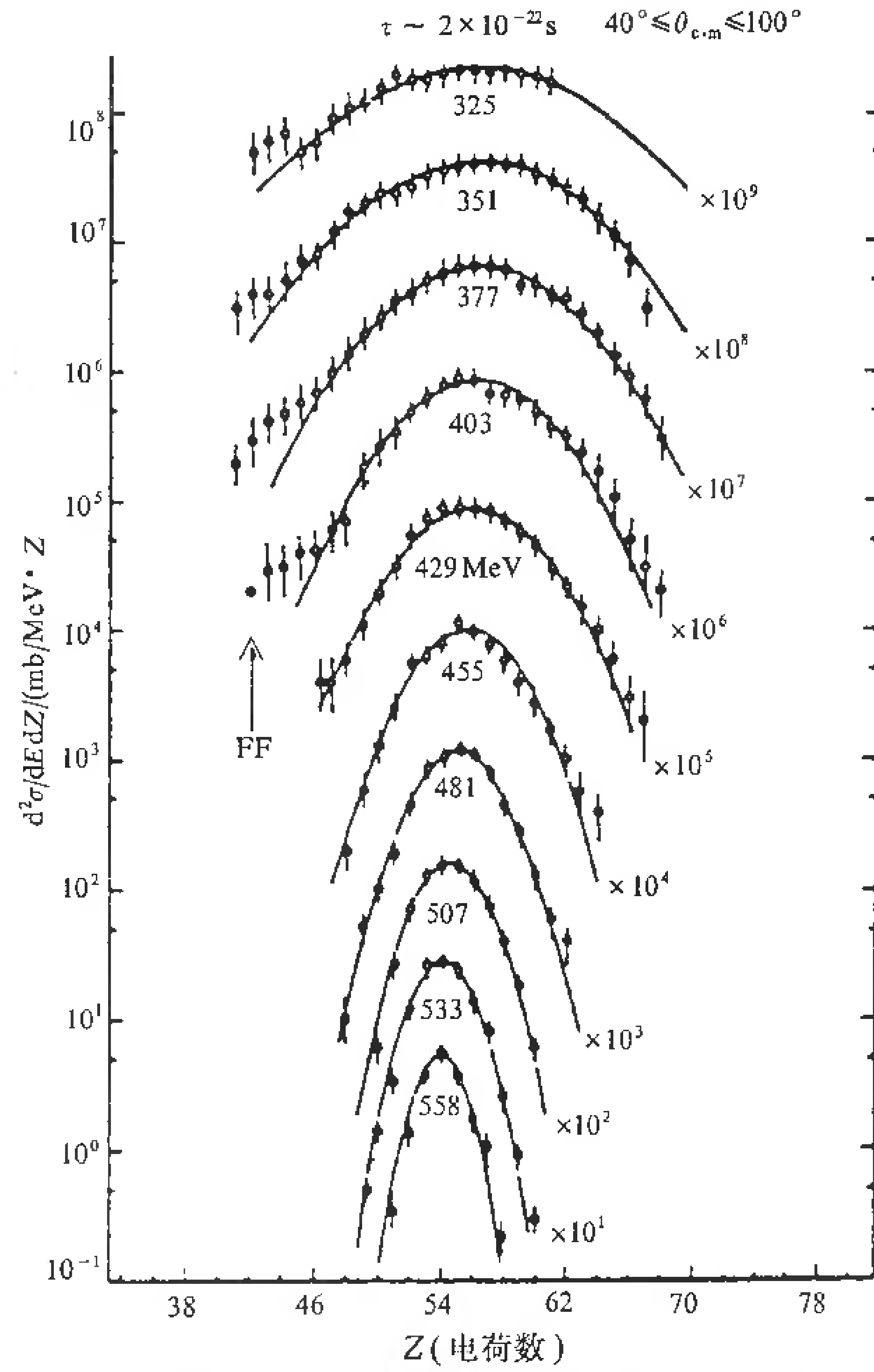


图 9-7　电荷数分布与能量耗散的关联．观测的是实验室系能量为 940 MeV 的 ^{209}Bi+^{136}Xe 反应碎片．实线为数据的高斯拟合．曲线下的数字是以 MeV 为单位的碎片能量．箭头 FF 指的是类靶碎片裂变导致的数据污染［取自 Wilcke 1980]

当然，也可用其他的量作时标．例如可利用宽度平方与时间的线性关系，将一种扩散过程的宽度平方作时标，来描写其他因素随时间的变化．也可用能量的耗散作时标．随着时间的推移，相互碰撞两核的动能越来越多的耗散为核的内部激发能，致使末态核的动能明显低于始态核的动能．末态核动能的降低程度就可作为反应经历的时间标志．图 9-7 表示出在反应 $^{136}Xe+^{209}Bi$ 中与入射核接近的出射核电荷数 Z 分布与能量耗散的关系．能量越低的出射核耗散越大，Z 分布也越宽．可以取一种因素作时标来描写其他因素的变化，实际上表示了这些因素的简单关联．这种关联也是深度非弹性过程的简单而普遍的规律和形象．

9.4　融合反应，裂变与原子核的大幅度形变

当瞄准距离 $b<b_f$，两核几乎对心碰撞．动能大量耗散为核内激发能．复合体有两种不同命运．一是逐渐达到热力学平衡，形成复合核，并通过平衡前后的抛射、蒸发和衰变到达复合核的基态．这就是融合反应．融合成复合核后也可再裂变，这就是融合－裂变反应．另一种命运是在达到平衡形成复合核前就裂变．这叫平衡前裂变，或复合核前裂变．下面着重讨论融合反应和融合－裂变反应．

用集体坐标 $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\cdots$ 表示复合体的位形，复合核即是给定位形下内部核子运动达到平衡的复合体．为讨论融合和裂变，设想复合体由两个互相连接的部分组成．ξ_1 可取为这两部分中心之间的距离．ξ_2 和 ξ_3 可分别表示质量和电荷在这两部分间的分布，……等等．研究融合和裂变过程可归结为研究这些集体坐标随时间的变化，因而可纳入原子核集体运动理论的一般框架．其实，融合和裂变都属原子核的大幅度形变．5.4 节中研究原子核集体转动的推转模型可用来研究这种大幅度形变．作为自由空间的核子多体系，原子核的哈密顿量本应与核的位形无关．然而在模型理论中，有效哈密顿

量却可依赖于核位形．如在变形核的壳模型中，控制单粒子运动的平均场就依赖于核位形．即模型理论中的有效哈密顿量 $\hat{H}(\xi)$ 依赖于集体坐标 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$，它们作为参数出现于其中．设态随时间的变化除一个相因子外完全由于集体坐标 $\xi(t)$ 的变化，t 时刻态矢量为

$$|t\rangle=\exp\left\{-\mathrm{i}\int^t\varepsilon(\xi,\dot{\xi})\mathrm{d}t'\Big/\hbar\right\}|\xi(t),\ \dot{\xi}(t)\rangle\ , \tag{9.18}$$

其中 $\dot{\xi}(t)\equiv\dfrac{\mathrm{d}\xi(t)}{\mathrm{d}t}$ 为集体运动的广义速度．代入薛定谔方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}|t\rangle}{\mathrm{d}t}=\hat{H}(\xi)|t\rangle\ , \tag{9.19}$$

得

$$\left[\hat{H}(\xi)-\mathrm{i}\hbar\sum_j\left(\dot{\xi}_j\frac{\delta}{\delta\xi_j}+\ddot{\xi}_j\frac{\delta}{\delta\dot{\xi}_j}\right)\right]|\xi,\ \dot{\xi}\rangle=\varepsilon(\xi,\dot{\xi})|\xi,\dot{\xi}\rangle\ . \tag{9.20}$$

设有动力学关系

$$\ddot{\xi}_j=F_j(\xi,\dot{\xi})\ , \tag{9.21}$$

就可从 (9.20) 中消去 $\ddot{\xi}_j$，从而得一封闭方程

$$\left[\hat{H}(\xi)-\mathrm{i}\hbar\sum_j\left(\dot{\xi}_j\frac{\delta}{\delta\xi_j}+F_j(\xi,\dot{\xi})\frac{\delta}{\delta\dot{\xi}_j}\right)\right]|\xi,\ \dot{\xi}\rangle=\varepsilon(\xi,\dot{\xi})|\xi,\ \dot{\xi}\rangle\ . \tag{9.22}$$

左边的方括号可当作一有效哈密顿量，此式可视为一准定态薛定谔方程，它的解 $|\xi,\ \dot{\xi}\rangle$ 为准定态．随集体坐标 ξ 和集体速度 $\dot{\xi}$ 变化，准定态会随时间变化，因而并非真定态．核子系的力学量 $\hat{Q}$ 在这个态中的平均值

$$Q(\xi,\dot{\xi})=\langle\xi,\ \dot{\xi}|\hat{Q}|\xi,\ \dot{\xi}\rangle \tag{9.23}$$

可代表这种位形的原子核这个力学量的值．例如原子核的能量为

$$E(\xi,\dot{\xi})=\langle\xi,\dot{\xi}|\hat{H}(\xi)|\xi,\dot{\xi}\rangle\ . \tag{9.24}$$

它不同于 (9.22) 中的本征值

$$\varepsilon(\xi,\dot{\xi})=E(\xi,\dot{\xi})-\mathrm{i}\hbar\sum_j\langle\xi,\dot{\xi}|\left(\dot{\xi}_j\frac{\delta}{\delta\xi_j}+F_j(\xi,\dot{\xi})\frac{\delta}{\delta\dot{\xi}_j}\right)|\xi,\dot{\xi}\rangle\ . \tag{9.25}$$

若 $\hat{Q}$ 为守恒量，则

$$\frac{\mathrm{d}Q(\xi,\dot{\xi})}{\mathrm{d}t}=\sum_j\left(\dot{\xi}_j\frac{\partial Q}{\partial\xi_j}+\ddot{\xi}_j\frac{\partial Q}{\partial\dot{\xi}_j}\right)=0\ . \tag{9.26}$$

此式将广义加速度 $\ddot{\xi}_j$ 与广义坐标 ξ_j 和广义速度 $\dot{\xi}_j$ 联系起来，可作为一个动力学方程．设理论中有 n 个集体坐标 ξ_j, $j=1,2,\cdots,n$, 就需要 n 个动力学方程(9.21)．为此要找 n 个守恒量，以便从 n 个形如(9.26)的关系中解出 n 个广义加速度 $\ddot{\xi}_j$．(9.22)、(9.21)和(9.26)为一自洽方程组，从中可求解大幅度集体运动．

若集体运动是缓慢的，$\dot{\xi}_j$ 为小量，可将能量(9.24)展成 $\dot{\xi}_j$ 的幂级数．由时间反演对称性知，展开式应只含 $\dot{\xi}_j$ 的偶次幂．于是有

$$E=\frac{1}{2}\sum_{j,j'}M_{jj'}(\xi)\dot{\xi}_j\dot{\xi}_{j'}+V(\xi)\ , \tag{9.27}$$

其中 $V(\xi)$ 为零次幂项，表集体运动速度为零时原子核的能量，是集体运动的势能．(9.27)右边第一项为二次幂项，表集体运动的动能．其中的系数 $M_{jj'}(\xi)$ 为集体运动的惯量参数，显然可取得

$$M_{jj'}(\xi)=M_{j'j}(\xi)\ . \tag{9.28}$$

由集体运动能量的表达式(9.27)可作出拉氏函数

$$L(\xi,\dot{\xi})=\frac{1}{2}\sum_{j,j'}M_{jj'}(\xi)\dot{\xi}_j\dot{\xi}_{j'}-V(\xi)\ . \tag{9.29}$$

由此导出的拉氏方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\xi}_j}-\frac{\partial L}{\partial\xi_j}=0,\qquad j=1,2,\cdots,n, \tag{9.30}$$

就是 n 个动力学方程．它们保证能量(9.27)守恒，且保证由对称性决定的其他守恒量确实守恒．由(9.30)可解出广义加速度 $\ddot{\xi}_j$，得到(9.21)．它和(9.22)一起为一组自洽方程．

一旦由这组方程自洽地算出了势函数 $V(\xi)$ 和惯性参数 $M_{jj'}(\xi)$，就可由拉氏函数(9.29)直接宏观地研究集体运动，而不必再理会微观方程(9.22)．还可把这个宏观理论写成正则形式并将它再一次量子化．由(9.29)知与广义坐标 ξ_j 正则共轭的广义动量为

$$\eta_j=\frac{\partial L}{\partial\dot{\xi}_j}=\sum_{j'}M_{jj'}(\xi)\dot{\xi}_{j'}\ . \tag{9.31}$$

由此可解得

$$\dot{\xi}_j=\sum_{j'}(M^{-1}(\xi))_{jj'}\eta_{j'}\ , \tag{9.32}$$

$M^{-1}(\xi)$ 为矩阵 $M(\xi)=(M_{jj'}(\xi))$ 的逆．将此式代入(9.27)可用广义动量 η_j 消去广义速度 $\dot{\xi}_j$，得

$$E=\frac{1}{2}\sum_{j,j'}\eta_j(M^{-1}(\xi))_{jj'}\eta_{j'}+V(\xi)\ . \tag{9.33}$$

将此式正则量子化，得集体运动哈密顿量算符

$$\hat{H}_c=\frac{1}{2}\sum_{j,j'}\hat{\eta}_j(M^{-1}(\hat{\xi}))_{jj'}\hat{\eta}_{j'}+V(\hat{\xi})\ , \tag{9.34}$$

其中广义坐标与广义动量间有对易关系

$$\left.\begin{aligned}&[\hat{\xi}_j,\hat{\xi}_{j'}]=[\hat{\eta}_j,\hat{\eta}_{j'}]=0\ ,\\&[\hat{\xi}_j,\hat{\eta}_{j'}]=\delta_{jj'}\ .\end{aligned}\right\} \tag{9.35}$$

由于原子核的基本动力学尚未清楚，现在还谈不上彻底贯彻这一理论思路．5.4节中介绍的转动惯量的计算已经是比较认真的了．更常采取的作法是对惯性参数和势函数作粗略的物理估算，对理论作大幅度简化．第一步的简化是给定(9.21)中的函数 F_j，从而给定 $\ddot{\xi}$ 与 $\dot{\xi}$ 和 ξ 的关系，这样可免去自洽计算．如令 $F_j=0$，并对(9.20)和(9.22)中剩下的动力学修正 $-\mathrm{i}\hbar\sum_j\dot{\xi}_j\frac{\delta}{\delta\xi_j}$ 作微扰处理，就可按5.4节中计算转动惯量的方法计算其他惯性参数．这就是推转模型．另一种作法是对(9.34)表示的哈密顿量作唯象的简化．如令

$$M_{jj'}=M_j\delta_{jj'}\ , \tag{9.36}$$

从而

$$(M^{-1})_{jj'}=M_j^{-1}\delta_{jj'}\ . \tag{9.37}$$

这使(9.34)简化为

$$\hat{H}_c=\sum_j \frac{\hat{\eta}_j^2}{2M_j}+V(\xi) \quad . \tag{9.38}$$

进一步将集体运动分成两类，一类是周期的，一类是非周期的．周期的集体运动包括质量和电荷在复合核两部分间的振动和各部分内部的集体振动等．这部分的运动可认为是快运动．非周期的集体运动包括复合核两部分中心间距离的伸长与缩短，前者走向裂变，后者走向融合；还包括复合核两部分连结的颈部变粗与变细，前者走向融合，后者走向裂变．这部分的运动可视为慢运动．采用绝热近似，即先固定慢运动的坐标，研究快运动．然后将快运动的能量附加在慢运动的势能上，研究慢运动．在慢运动的可观距离上，快运动已经历了许多周期，因而可视为是紧随慢运动的．用 ξ_1 代表非周期慢运动的坐标，ξ_2 代表周期快运动的坐标．设哈密顿量为

$$\hat{H}_c=\frac{\hat{\eta}_1^2}{2M_1}+V_1(\xi_1)+\frac{\hat{\eta}_2^2}{2M_2(\xi_1)}+\frac{1}{2}M_2(\xi_1)\omega^2(\xi_1)\xi_2^2 \quad . \tag{9.39}$$

即将周期的快运动近似为微振动，并允许它的质量参数$M_2(\xi_1)$和频率参数 $\omega(\xi_1)$ 与非周期慢运动的坐标有关．本来也可设慢运动的质量参数 M_1 和势能 V_1 与快运动的坐标ξ_2有关．由于在慢运动的可观距离上快运动已经历许多周期，这种关系可认为已平均掉了．在求解了快运动哈密顿量

$$\hat{H}_2=\frac{\hat{\eta}_2^2}{2M_2}+\frac{1}{2}M_2\omega^2\xi_2^2 \tag{9.40}$$

的本征方程后，它在(9.39)中的位置由它的本征值代替．对基态快运动

$$\hat{H}_c=\frac{\hat{\eta}_1^2}{2M_1}+V_1(\xi_1)+\frac{1}{2}\hbar\omega(\xi_1) \quad . \tag{9.41}$$

这个一维哈密顿量的本征方程可用数值方法求解．其结果，复合核或是被有效势函数

$$V_c(\xi_1)=V_1(\xi_1)+\frac{1}{2}\hbar\omega(\xi_1) \tag{9.42}$$

的一个足够深的势阱所束缚，或是穿透 $V_c(\xi_1)$ 的势垒而裂变．即使被势阱束缚，复合核一般仍处于激发态．它两部分相对运动的动能还要进一步耗散成核内核子运动的内能，并经过一系列衰变到达复合核的基态．这才是融合反应的终点．

这个理论框架的缺点是未能将耗散包括在内．为了考虑耗散须引进温度和熵，从而必须研究混合系综的量子统计理论．这是复杂的，且远未被充分研究，然而却是饶有趣味的问题．

9.5 相对论性重离子碰撞中的输运过程

质心系中每核子能量超过 1GeV 的重离子碰撞称相对论性重离子碰撞．在这种碰撞中核子的动能已超过它的静止能量，因而是相对论性的．这种能量核子的德布罗意波长已降到 0.2fm 以下，比核子自身半径小得多．因此，不仅核作为一个整体的运动是经典的，其中核子的运动也是经典的．这里，经典是指非量子，相对论自然是重要的．在强子相中这种碰撞可当作相对论的经典输运过程，量子效应只作为修正来考虑．它主要表现为全同粒子效应．由于密度高，泡利原理的作用仍是可观的．在碰撞截面的计算中也要用量子论．

设 $\boldsymbol{r}$ 处动量在 $\boldsymbol{p}$ 附近 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}$ 范围内的第 i 种强子的密度为

$$\mathrm{d}n_i=f_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \quad . \tag{9.43}$$

$f_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)$ 可视为 t 时刻第 i 种强子在相空间的密度．只考虑相对于强作用稳定的强子，并忽略弱作用和电磁作用导致的衰变．在两次碰撞间每个强子都在平均场作用下作独立粒子运动．用 $H_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$ 表示第 i 种单强子在平均场中的经典哈密顿量，单强子运动的哈密顿正则方程为

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\nabla_p H_i\ , \qquad \dot{\boldsymbol{p}}=-\nabla H_i\ , \tag{9.44}$$

其中 $\nabla=\boldsymbol{x}_0\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{y}_0\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{z}_0\frac{\partial}{\partial z}$ 为通常坐标空间的梯度算符，$\nabla_p=\boldsymbol{x}_0\frac{\partial}{\partial p_x}+\boldsymbol{y}_0\frac{\partial}{\partial p_y}+\boldsymbol{z}_0\frac{\partial}{\partial p_z}$ 为动量空间的梯度算符．分布函数 f_i 的刘维(Liouville)方程为

$$\frac{\partial f_i}{\partial t}+\nabla_p H_i \nabla f_i-\nabla H_i\cdot\nabla_p f_i=0\ . \tag{9.45}$$

按(9.44)，此式意即

$$\frac{\mathrm{d}f_i}{\mathrm{d}t}\equiv\frac{\partial f_i}{\partial t}+\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla f_i+\dot{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla_p f_i=0\ , \tag{9.46}$$

对时间的全微分沿粒子在相空间的轨道进行．可见，刘维方程或(9.46)的物理含义是一组互无关联的粒子在力学运动中所占相空间的体积不变，从而使粒子在相空间分布的密度不因力学运动而变．实际上强子会因相互碰撞而关联．这种碰撞使粒子在相空间分布的密度改变，从而使(9.46)不再成立．它的右边不再为零，而应加上一表示碰撞改变密度的项，称为碰撞项．考虑二体碰撞，即两个粒子碰撞后仍成为两个粒子的碰撞．将散射矩阵元表为

$$S_{ba}=\delta_{ba}-(2\pi)^4\mathrm{i}\delta(E_b-E_a)\delta(\boldsymbol{P}_b-\boldsymbol{P}_a)\mathscr{T}_{ba}\ , \tag{9.47}$$

其中 $\mathscr{T}_{ba}$ 为协变跃迁矩阵元，E_a、E_b 分别为始、末态能量，$\boldsymbol{P}_a$、$\boldsymbol{P}_b$ 分别为始、末态动量．在 $\hbar=1$ 的自然单位制中，单位时间在单位体积内发生跃迁的几率为

$$\frac{\mathrm{d}^4W_{ba}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t}=(2\pi)^4|\mathscr{T}_{ba}|^2\delta(E_b-E_a)\delta(\boldsymbol{P}_b-\boldsymbol{P}_a)\ . \tag{9.48}$$

现在设始态 a 为第 i 种粒子动量为 $\boldsymbol{p}$ 能量为 ε，第 i' 种粒子动量为 $\boldsymbol{p}'$ 能量为 ε' 的状态；末态 b 为第 i_1 种粒子动量为 $\boldsymbol{p}_1$ 能量为 ε_1，第 i_2 种粒子动量为 $\boldsymbol{p}_2$ 能量为 ε_2 的状态．在从 a 到 b 的跃迁中，t 时刻单位时间在 $\boldsymbol{r}$ 处单位体积内动量在 $\boldsymbol{p}$ 附近 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}$ 范围内的第 i 种粒子减少 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}I_a(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)$ 个，其中

$$I_a(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)=\sum_{i',i_1,i_2}(2\pi)^4\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2}{(2\pi)^3}|\mathscr{T}_{ba}|^2\delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon-\varepsilon')$$
$$\times\delta(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')f_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)f_{i'}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}',t)\ . \tag{9.49}$$

再设始态 a 为第 i_1 种粒子动量为 $\boldsymbol{p}_1$ 能量为 ε_1，第 i_2 种粒子动量为 $\boldsymbol{p}_2$ 能量为 ε_2 的状态；末态 b 为第 i 种粒子动量为 $\boldsymbol{p}$ 能量为 ε，第 i' 种粒子动量为 $\boldsymbol{p}'$ 能量为 ε' 的状态．在从这种 a 态到这种 b 态的跃迁中，t 时刻单位时间在 $\boldsymbol{r}$ 处单位体积内动量在 $\boldsymbol{p}$ 附近 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}$ 范围内的第 i 种粒子增加 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}I_b(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)$ 个，其中

$$I_b(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)=\sum_{i',i_1,i_2}(2\pi)^4\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2}{(2\pi)^3}|\mathscr{T}_{ba}|^2\delta(\varepsilon+\varepsilon'-\varepsilon_1-\varepsilon_2)$$
$$\times\delta(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)f_{i_1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}_1,t)f_{i_2}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}_2,t)\ . \tag{9.50}$$

由于始末态 a,b 的含义不同，(9.49) 和 (9.50) 中的协变跃迁矩阵元其实是不同的．不过两者正好互为时间反演过程，矩阵元绝对值平方 $|\mathscr{T}_{ba}|^2$ 相同．对自旋非零的粒子，$|\mathscr{T}_{ba}|^2$ 还要对末态求和并对始态求平均．如果维持表达式(9.49)和(9.50)，则其中的 $|\mathscr{T}_{ba}|^2$ 应理解为已做过这种求和和平均的．按这种理解，可将此二式合并，得 t 时刻单位时间在 $\boldsymbol{r}$ 处单位体积内动量在 $\boldsymbol{p}$ 附近 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}$ 范围中的第 i 种粒子净增加数 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}I_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)$，其中

$$I_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)=I_b(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)-I_a(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)$$
$$=\sum_{i',i_1,i_2}(2\pi)^4\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2}{(2\pi)^3}|\mathscr{T}_{ba}|^2\delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon-\varepsilon')$$
$$\times\delta(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')(f_{i_1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}_1,t)f_{i_2}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}_2,t)$$
$$-f_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)f_{i'}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}',t))\ . \tag{9.51}$$

此式没有考虑全同粒子效应．核子是全同粒子，强子也只是若干种全同粒子．在重离子碰撞形成的高密环境中全同粒子效应是必须

考虑的．特别对全同费米子，例如核子，要考虑泡利原理的影响．单位体积内 $d\boldsymbol{p}$ 动量范围中本有 $\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}$ 个轨道运动状态．如已有 $\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} f_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)$ 个态被占据，则末态密度减小至 $\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}(1-f_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t))$．可见，若 i, i', i_1 和 i_2 均为费米子，(9.51)应修正为

$$
\begin{aligned}
I_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)=&\sum_{i',i_1,i_2}(2\pi)^4\int\frac{d\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^3}\int\frac{d\boldsymbol{p}_1}{(2\pi)^3}\int\frac{d\boldsymbol{p}_2}{(2\pi)^3}\,|\mathcal{T}_{ba}|^2\delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon-\varepsilon')\\
&\times\delta(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')[f_{i_1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}_1,t)f_{i_2}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}_2,t)(1-f_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t))\\
&\times(1-f_{i'}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}',t))-f_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)f_{i'}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}',t)(1-f_{i_1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}_1,t))\\
&\times(1-f_{i_2}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}_2,t))]\ .
\end{aligned}\tag{9.52}
$$

也可利用微分截面公式

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega_1}&=\int_0^\infty p_1^2 dp_1\int d\boldsymbol{p}_2\frac{1}{(2\pi)^2 v}|\mathcal{T}_{ba}|^2\delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon-\varepsilon')\delta(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\\
&=\frac{p_1\varepsilon_1}{(2\pi)^2 v}|\mathcal{T}_{ba}|^2\ ,\qquad \text{要求能量动量守恒},
\end{aligned}\tag{9.53}
$$

其中 v 为相互碰撞两粒子的相对运动速度，将(9.52)变为

$$
\begin{aligned}
I_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)=&\sum_{i',i_1,i_2}\int\frac{d\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^3}\int d\Omega_1 v\frac{d\sigma}{d\Omega_1}\\
&\times[f_{i_1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}_1,t)f_{i_2}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}_2,t)(1-f_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t))(1-f_{i'}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}',t))\\
&-f_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)f_{i'}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}',t)(1-f_{i_1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}_1,t))(1-f_{i_2}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}_2,t))],
\end{aligned}\tag{9.54}
$$

$\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ 的取值要保证能量动量守恒．将(9.52)或(9.54)表示的 I_i 代替(9.45)右边的0，即得输运方程

$$
\frac{\partial f_i}{\partial t}+\nabla_p H_i\cdot\nabla f_i-\nabla H_i\cdot\nabla_p f_i=I_i\ ,\tag{9.55}
$$

称为VUU(Vlasov-Uehling-Uhlenbeck)方程或BUU(Boltzmann-Uhlenbeck-Uehling)方程．在单粒子哈密顿量 $H_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$ 和碰撞项 I_i 中的矩阵元 $\mathcal{T}_{ba}$ 或微分截面 $\frac{d\sigma}{d\Omega_1}$ 确定后，它是未知函数 $f_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)$ 的一组完备的微分方程，通常由数值方法求解．H_i 和 $\mathcal{T}_{ba}$ 或 $\frac{d\sigma}{d\Omega_1}$ 的确定则依赖于强子动力学的模型．将方程用于重离子碰撞，计算碰撞后各种强子的空间和动量分布，与实测结果比较，可检验和鉴别各种强子动力学模型．也曾有人用实测的微分截面代入(9.54)，以绕过不清楚的强子动力学．不过实测的是自由强子间的碰撞截面，而(9.54)中需要的却是核环境中的碰撞截面，两者未见得相同．一般认为核环境对截面有可观的影响，这只要记得核内核子的有效质量不同于自由核子质量就能明白．图9-8是用VUU方程和相对论VUU(RVUU)方程算出的重离子碰撞中强子产物的动量分布，从中可以看出相对论和核环境影响的重要性．

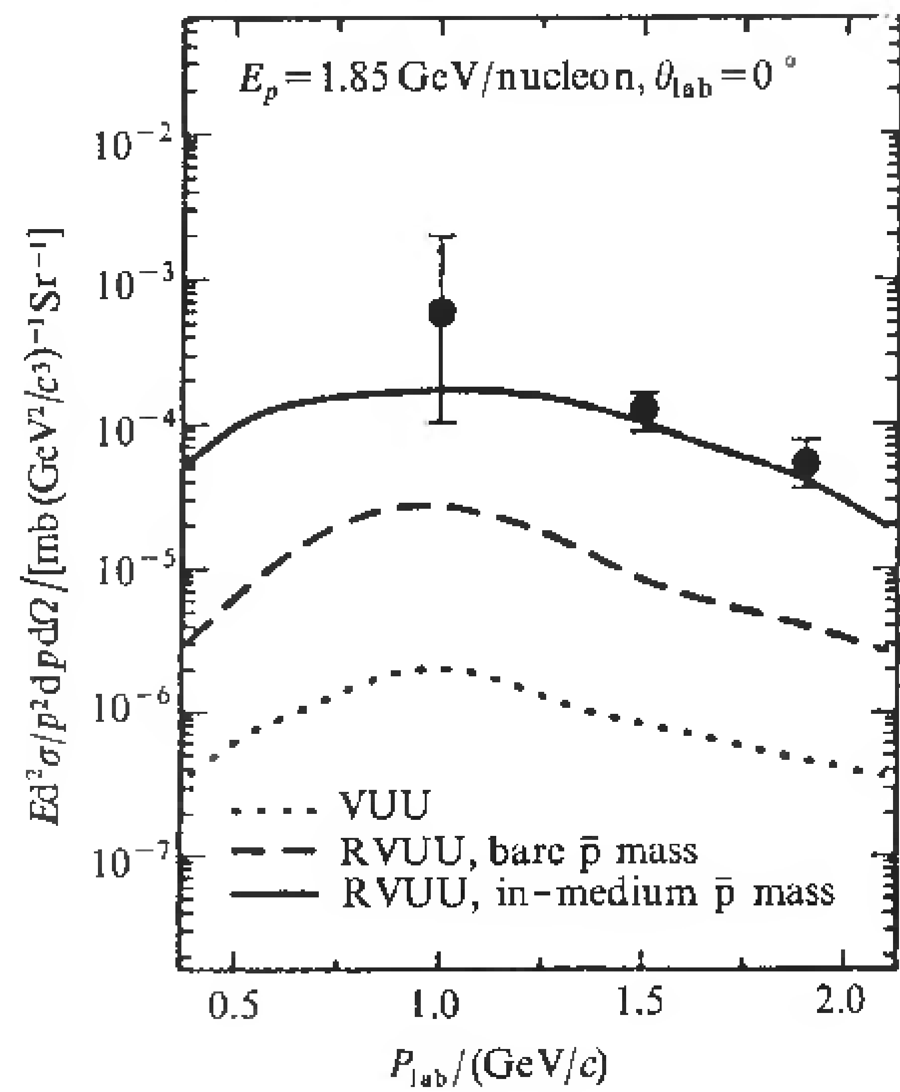


图9-8　每核子1.85 GeV的Ni+Ni碰撞中反质子的动量谱计算结果与实验的比较，其中实线表示的是考虑了核环境对反质子质量的影响后的RVUU计算结果[取自Ko 1994]

附录 I　多极场

A1.1　标量多极场的梯度

称角动量和宇称确定的单粒子波函数表示的场为多极场．例如

$$A_{JM}^{(s)}(\boldsymbol{r})=R(r)\mathrm{Y}_{JM}(\theta,\varphi) \tag{A.1.1}$$

即为一标量 2^J 极场．将梯度算符按球坐标分离变量得

$$\nabla=\boldsymbol{r}_0(\boldsymbol{r}_0\cdot\nabla)-\boldsymbol{r}_0\times(\boldsymbol{r}_0\times\nabla)\ , \tag{A.1.2}$$

其中 $\boldsymbol{r}_0$ 为单位径向量．此式可由具体算出右边第二项的向量积得证．它右边第一项只含对径向的微分；由

$$\boldsymbol{r}_0\times\nabla=\mathrm{i}\frac{\hat{L}}{\hbar r}\ ,$$

$\hat{L}$ 为轨道角动量算符，知它右边第二项只含对方位角的微分．求标量多极场(A.1.1)的梯度，利用(A.1.2)得

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{B}\equiv\nabla A_{JM}^{(s)}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2\ ,\\&\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{r}_0\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\mathrm{Y}_{JM}(\theta,\varphi)\ ,\quad \boldsymbol{B}_2=-\mathrm{i}\frac{R(r)}{\hbar r}\ \boldsymbol{r}_0\times\hat{L}\mathrm{Y}_{JM}(\theta,\varphi)\ .\end{aligned}\right\} \tag{A.1.3}$$

对(3.80)定义的 1 自旋本征矢 $\xi_\mu,\mu=0,\pm1$，有

$$\xi_\mu\cdot\boldsymbol{r}_0=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\ \mathrm{Y}_{1\mu}(\theta,\varphi)\ , \tag{A.1.4}$$

θ,φ 为 $\boldsymbol{r}_0$ 指向的方位角．因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_1\cdot\xi_\mu&=\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\ \mathrm{Y}_{1\mu}(\theta,\varphi)\mathrm{Y}_{JM}(\theta,\varphi)\ ,\\&=\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\sum_{L=|J-1|}^{J+1}\sqrt{\frac{2J+1}{2L+1}}\ \mathrm{C}_{J\,0\,1\,0}^{L\,0}\ \mathrm{C}_{J\,M\,1\,\mu}^{L\,M+\mu}\mathrm{Y}_{L\ M+\mu}(\theta,\varphi)\\&=\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\left(\sqrt{\frac{J+1}{2J+3}}\ \mathrm{C}_{J\,M\,1\,\mu}^{J+1\ M+\mu}\mathrm{Y}_{J+1\ M+\mu}(\theta,\varphi)\right.\\&\quad\left.-\sqrt{\frac{J}{2J-1}}\ \mathrm{C}_{J\,M\,1\,\mu}^{J-1\ M+\mu}\mathrm{Y}_{J-1\ M+\mu}(\theta,\varphi)\right)\ ,\end{aligned} \tag{A.1.5}$$

末一等号处已代入了 $\mathrm{C}_{J\,0\,1\,0}^{L\,0}$ 的值，它可以从表 3-1查到．另一方面

$$\boldsymbol{B}_2\cdot\ \xi_\mu=-\mathrm{i}\frac{R}{\hbar r}\ (\xi_\mu\times\boldsymbol{r}_0)\cdot\ \hat{L}\mathrm{Y}_{J\,M}(\theta,\varphi)\ . \tag{A.1.6}$$

由于$[\xi_\mu]$的正交归一性、(A.1.4)和 $\mathrm{Y}_{1\,\mu}^{\ *}=(-1)^\mu\mathrm{Y}_{1\,-\mu}$，知

$$\boldsymbol{r}_0=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\ \sum_\mu(-1)^\mu\mathrm{Y}_{1\ -\mu}(\theta,\varphi)\,\xi_\mu \tag{A.1.7}$$

因此

$$\begin{aligned}\xi_\mu\times\boldsymbol{r}_0&=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\ \sum_\nu(-1)^\nu\mathrm{Y}_{1\,\nu}(\theta,\varphi)\xi_\mu\times\xi_{-\nu}\\&=\mathrm{i}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\ \sum_\nu(-1)^\nu\mathrm{Y}_{1\,\nu}(\theta,\varphi)\mathrm{C}_{1\,\mu\,1\,-\nu}^{1\ \mu-\nu}\xi_{\mu-\nu}\\&=\mathrm{i}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\ \sum_\nu\mathrm{C}_{1\,\mu-\nu\,1\,\nu}^{1\,\mu}\mathrm{Y}_{1\,\nu}(\theta,\varphi)\xi_{\mu-\nu}\\&=-\mathrm{i}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\ \mathrm{T}_{1\,1\,\mu}(\theta,\varphi)\ .\end{aligned} \tag{A.1.8}$$

推导中还用到向量球谐函数的定义(3.85)，1 自旋算符的表达式(3.74)，(3.84)表示的角动量的一般性质

$$\hat{J}_\mu|JM\rangle=(-1)^\mu\sqrt{J(J+1)}\ \hbar\mathrm{C}_{J\ M+\mu\ 1\ -\mu}^{J\ M}|J\ M+\mu\rangle\ , \tag{A.1.9}$$

以及 CG 系数的对称性质．这里定义

$$\hat{J}_{\pm1}=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\ (\hat{J}_x\pm\mathrm{i}\hat{J}_y)\ ,\qquad \hat{J}_0=\hat{J}_z\ . \tag{A.1.10}$$

将(A.1.8)代入(A.1.6)右边得

$$\boldsymbol{B}_2\cdot\xi_\mu=\sqrt{\frac{8\pi J(J+1)}{3}}\ \frac{R(r)}{r}\sum_{\sigma\nu}\mathrm{C}_{J\ M+\sigma\ 1\ -\sigma}^{J\ M}\mathrm{C}_{1\ \mu-\nu\ 1\ \nu}^{1\ \mu}\mathrm{Y}_{1\,\nu}(\theta,\varphi)\mathrm{Y}_{J\ M+\sigma}(\theta,\varphi)\xi_{\mu-\nu}\cdot\xi_{-\sigma}$$

$$=\sqrt{\frac{8\pi J(J+1)}{3}}\ \frac{R(r)}{r}\sum_{\sigma}C_{J\ M+\sigma\ 1\ -\sigma}^{J\ M}C_{1\ \sigma\ 1\ \mu-\sigma}^{1\ \mu}Y_{1\ \mu-\sigma}(\theta,\varphi)Y_{J\ M+\sigma}(\theta,\varphi)(-1)^{\sigma}$$

$$=\sqrt{2J(J+1)(2J+1)}\ \frac{R(r)}{r}\sum_{\lambda}\frac{C_{J0\ 10}^{\lambda 0}}{\sqrt{2\lambda+1}}Y_{\lambda\ M+\mu}(\theta,\varphi)$$

$$\times\sum_{\sigma}C_{J\ M\ 1\ \sigma}^{J\ M+\sigma}C_{1\ \sigma\ 1\ \mu-\sigma}^{1\ \mu}C_{J\ M+\sigma\ 1\ \mu-\sigma}^{\lambda\ M+\mu}$$

$$=\sqrt{6J(J+1)}\ (2J+1)\frac{R(r)}{r}\sum_{\lambda}\frac{C_{J0\ 10}^{\lambda 0}}{\sqrt{2\lambda+1}}W(J\ 1\ \lambda\ 1\ J\ 1)$$

$$\times C_{J\ M\ 1\ \mu}^{\lambda\ M+\mu}Y_{\lambda\ M+\mu}(\theta,\varphi)\ . \tag{A.1.11}$$

由角动量相加的三角关系和 $C_{\lambda 0\ 10}^{\lambda 0}=0$ 知 $\lambda=J\pm1$. 通过查表和简单的计算知

$$C_{J\ 0\ 10}^{J+1\ 0}=\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}}\ ,\quad C_{J\ 0\ 10}^{J-1\ 0}=-\sqrt{\frac{J}{2J+1}}\ ,$$

$$W(J\ 1\ J+1\ 1\ J\ 1)=W(J\ J+1\ 1\ 1\ 1\ J)=-\sqrt{\frac{J}{6(J+1)(2J+1)}}\ ,$$

$$W(J\ 1\ J-1\ 1\ J\ 1)=W(J\ J-1\ 1\ 1\ 1\ J)=\sqrt{\frac{J+1}{6J(2J+1)}}\ .$$

代入(A.1.11),将结果与(A.1.5)合并得

$$\boldsymbol{B}\cdot\ \xi_{\mu}=\boldsymbol{B}_1\cdot\ \xi_{\mu}+\boldsymbol{B}_2\cdot\ \xi_{\mu}$$

$$=\sqrt{\frac{J+1}{2J+3}}\ C_{J\ M\ 1\ \mu}^{J+1\ M+\mu}\left(\frac{dR}{dr}-\frac{J}{r}R\right)Y_{J+1\ \ M+\mu}(\theta,\varphi)$$

$$-\sqrt{\frac{J}{2J-1}}\ C_{J\ M\ 1\ \mu}^{J-1\ M+\mu}\left(\frac{dR}{dr}+\frac{J+1}{r}R\right)Y_{J-1\ \ M+\mu}(\theta,\varphi)\ . \tag{A.1.12}$$

于是有

$$\nabla A_{JM}^{(s)}(\boldsymbol{r})\equiv\nabla\Big(R(r)Y_{JM}(\theta,\varphi)\Big)=\sum_{\mu}(-1)^{\mu}\xi_{-\mu}(\boldsymbol{B}\cdot\ \xi_{\mu})$$

$$=-\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}}\left(\frac{dR}{dr}-\frac{J}{r}R\right)T_{J+1\ J\ M}(\theta,\varphi)$$

$$+\sqrt{\frac{J}{2J+1}}\left(\frac{dR}{dr}+\frac{J+1}{r}R\right)T_{J-1\ J\ M}(\theta,\varphi)\ . \tag{A.1.13}$$

若按(3.95)设 $R(r)=\frac{1}{k}\,j_J(kr)$, 由球贝塞耳函数的微分公式

$$\frac{dj_l(x)}{dx}=-\frac{l+1}{x}j_l(x)+j_{l-1}(x)=\frac{l}{x}j_l(x)-j_{l+1}(x)\ , \tag{A.1.14}$$

立即得到纵 2^J 极场的表达式(3.98)

A1.2　向量多极场的旋度和散度

将梯度算符用$[\xi_{\mu}]$展开得

$$\nabla=\sum_{\mu}(-1)^{\mu}\xi_{-\mu}\nabla_{\mu}\ , \tag{A.1.15}$$

$$\nabla_{\mu}\equiv\xi_{\mu}\cdot\ \nabla\ . \tag{A.1.16}$$

于是有

$$\nabla\times[R(r)T_{LJM}(\theta,\varphi)]=\sum_{\mu\nu}(-1)^{\mu}C_{L\ M-\nu\ 1\ \nu}^{J\ M}\nabla_{\mu}[R(r)Y_{L\ M-\nu}(\theta,\varphi)]\xi_{-\mu}\times\xi_{\nu} \tag{A.1.17}$$

由

$$\xi_{-\mu}\times\xi_{\nu}=(-1)^{\mu}\sqrt{2}\ iC_{1\ \mu\ 1\ \nu-\mu}^{1\ \nu}\xi_{\nu-\mu} \tag{A.1.18}$$

和(A.1.12)知(A.1.17)右边为

$$\sqrt{2}\ i\Bigg\{\sqrt{\frac{L+1}{2L+3}}\left(\frac{dR}{dr}-\frac{L}{r}R\right)\sum_{\mu\nu J'}C_{L\ M-\nu\ 1\ \nu}^{J\ M}$$

$$\times C_{1\ \mu\ 1\ \nu-\mu}^{1\ \nu}C_{L\ M-\nu\ 1\ \mu}^{L+1\ M+\mu-\nu}C_{L+1\ M+\mu-\gamma\ 1\ \nu-\mu}^{J'\ M}T_{L+1\ J'\ M}(\theta,\varphi)$$

$$-\sqrt{\frac{L}{2L-1}}\left(\frac{dR}{dr}+\frac{L+1}{r}R\right)\sum_{\mu\nu J'}C_{L\ M-\nu\ 1\ \nu}^{J\ M}$$

$$\times C_{1\ \mu\ 1\ \nu-\mu}^{1\ \nu}C_{L\ M-\nu\ 1\ \mu}^{L-1\ M+\mu-\nu}C_{L-1\ \ M+\mu-\nu\ 1\ \nu-\mu}^{J'\ M}T_{L-1\ J'\ M}(\theta,\varphi)\Bigg\}\ .$$

利用拉卡系数的定义

$$\sum_{\mu_1\mu_2\mu_3} C^{j_{12}\mu_{12}}_{j_1\mu_1 j_2\mu_2} C^{j\mu}_{j_{12}\mu_{12} j_3\mu_3} C^{j'\mu}_{j_1\mu_1 j_{23}\mu_{23}} C^{j_{23}\mu_{23}}_{j_2\mu_2 j_3\mu_3}$$

$$=\delta_{jj'}\sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)}\ \mathrm{W}(j_1\ j_2\ j\ j_3\ j_{12}\ j_{23}) \quad (\text{A.1.19})$$

作出求和并代入(A.1.17)得

$$\nabla\times[R(r)\mathrm{T}_{LJM}(\theta,\varphi)]=\mathrm{i}\Big\{\sqrt{6(L+1)}\ \mathrm{W}(L\ 1\ J\ 1\ L+1\ 1)\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}-\frac{L}{r}R\right)$$
$$\times\mathrm{T}_{L+1\ J\ M}(\theta,\varphi)-\sqrt{6L}\ \mathrm{W}(L\ 1\ J\ 1\ L-1\ 1)$$
$$\times\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+\frac{L+1}{r}R\right)\mathrm{T}_{L-1\ J\ M}(\theta,\varphi)\Big\}. \quad (\text{A.1.20})$$

设 $L=J$, 由于

$$\mathrm{W}(J\ 1\ J\ 1\ J+1\ 1)=-\mathrm{W}(J\ J+1\ 1\ 1\ 1\ J)=\sqrt{\frac{J}{6(J+1)(2J+1)}}\ ,$$

$$\mathrm{W}(J\ 1\ J\ 1\ J-1\ 1)=-\mathrm{W}(J\ J-1\ 1\ 1\ 1\ J)=-\sqrt{\frac{J+1}{6J(2J+1)}}\ ,$$

得

$$\nabla\times[R(r)\boldsymbol{T}_{JJM}(\theta,\varphi)]=\mathrm{i}\Big\{\sqrt{\frac{J}{2J+1}}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}-\frac{J}{r}R\right)\mathrm{T}_{J+1\ J\ M}(\theta,\varphi)$$
$$+\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+\frac{J+1}{r}R\right)\mathrm{T}_{J-1\ J\ M}(\theta,\varphi)\Big\}. \quad (\text{A.1.21})$$

取 $R(r)=-\frac{\mathrm{i}}{k}\mathrm{j}_J(kr)$ 代入此式即得电 2^J 极场的表达式(3.94). 设 $L=J+1$, 由于

$$\mathrm{W}(J+1\ 1\ J\ 1\ J\ 1)=\mathrm{W}(J\ 1\ J+1\ 1\ J\ 1)=-\sqrt{\frac{J}{6(J+1)(2J+1)}}\ ,$$

得

$$\nabla\times[R(r)\mathrm{T}_{J+1\ J\ M}(\theta,\varphi)]=\mathrm{i}\sqrt{\frac{J}{2J+1}}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+\frac{J+2}{r}R\right)\mathrm{T}_{JJM}(\theta,\varphi)\ . \quad (\text{A.1.22})$$

同理得

$$\nabla\times[R(r)\mathrm{T}_{J-1\ J\ M}(\theta,\varphi)]=\mathrm{i}\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}-\frac{J-1}{r}R\right)\mathrm{T}_{JJM}(\theta,\varphi)\ . \quad (\text{A.1.23})$$

利用贝塞耳函数的微分性质(A.1.14)还可由此得

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\left[-\frac{\mathrm{i}}{k}\mathrm{j}_{J+1}(kr)\mathrm{T}_{J+1\ J\ M}(\theta,\varphi)\right]&=\sqrt{\frac{J}{2J+1}}\ \mathrm{j}_J(kr)\mathrm{T}_{JJM}(\theta,\varphi)\ ,\\ \nabla\times\left[-\frac{\mathrm{i}}{k}\mathrm{j}_{J-1}(kr)\mathrm{T}_{J-1\ J\ M}(\theta,\varphi)\right]&=-\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}}\ \mathrm{j}_J(kr)\mathrm{T}_{JJM}(\theta,\varphi)\ .\end{aligned}\right\} \quad (\text{A.1.24})$$

进而得电多极场(3.94)的旋度

$$\nabla\times\boldsymbol{A}^{(\mathrm{e})}_{JM}(k\boldsymbol{r})=-\mathrm{i}k\mathrm{j}_J(kr)\mathrm{T}_{JJM}(\theta,\varphi)=-\mathrm{i}k\boldsymbol{A}^{(\mathrm{m})}_{JM}(k\boldsymbol{r}). \quad (\text{A.1.25})$$

类似地, 可得向量多极场的散度

$$\nabla\cdot\left[R(r)\mathrm{T}_{LJM}(\theta,\varphi)\right]=\sum_\mu C^{J\ M}_{L\ M-\mu\ 1\ \mu}\nabla_\mu\left[R(r)\mathrm{Y}_{L\ M-\mu}(\theta,\varphi)\right]$$
$$=\delta_{J,\ L+1}\sqrt{\frac{J}{2J+1}}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}-\frac{L}{r}R\right)\mathrm{Y}_{L+1\ M}(\theta,\varphi)$$
$$-\delta_{J,\ L-1}\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+\frac{L+1}{r}R\right)\mathrm{Y}_{L-1\ M}(\theta,\varphi)\ . \quad (\text{A.1.26})$$

A1.3 单位径向量与向量多极场的向量积和标量积

由(A.1.7)知

$$\boldsymbol{r}_0\times\mathrm{T}_{LJM}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\sum_{\mu\nu}(-1)^\nu C^{J\ M}_{L\ M-\nu\ 1\ \nu}\mathrm{Y}_{L\ M-\nu}(\theta,\varphi)\mathrm{Y}_{1\ \mu}(\theta,\varphi)\xi_{-\mu}\times\xi_\nu$$
$$=-\mathrm{i}\sqrt{2}\sum_{\mu\nu\lambda}\sqrt{\frac{2L+1}{2\lambda+1}}\ C^{\lambda 0}_{L0\ 10}C^{J\ M}_{L\ M-\nu\ 1\ \nu}C^{1\ \nu}_{1\ \nu-\mu\ 1\ \mu}C^{\lambda\ M+\mu-\nu}_{L\ M-\nu\ 1\ \mu}\mathrm{Y}_{\lambda\ M+\mu-\nu}(\theta,\varphi)\xi_{\nu-\mu}$$

$$=\mathrm{i}\sqrt{2}\sum_{\mu\nu\lambda J'}\sqrt{\frac{2L+1}{2\lambda+1}}\mathrm{C}_{L0\,10}^{\lambda 0}\mathrm{C}_{L\,M-\nu\,1\,\nu}^{J\,M}\mathrm{C}_{1\,\mu\,1\,\nu-\mu}^{1\,\nu}\mathrm{C}_{L\,M-\nu\,1\,\mu}^{\lambda\,M+\mu-\nu}\mathrm{C}_{\lambda\,M+\mu-\nu\,1\,\nu-\mu}^{J'\,M}\mathrm{T}_{\lambda J'M}(\theta,\varphi)$$

$$=\mathrm{i}\sqrt{6(2L+1)}\sum_{\lambda}\mathrm{C}_{L\,0\,10}^{\lambda\,0}\mathrm{W}(L\ 1\ J\ 1\ \lambda\ 1)\mathrm{T}_{\lambda JM}(\theta,\varphi)\ . \tag{A.1.27}$$

因子 $\mathrm{C}_{L0\,10}^{\lambda 0}$ 不为零的条件为 $\lambda=L\pm1$. 用前面列出的 CG 系数和拉卡系数的值算得

$$\boldsymbol{r}_0\times\mathrm{T}_{JJM}(\theta,\varphi)=\mathrm{i}\left[\sqrt{\frac{J}{2J+1}}\mathrm{T}_{J+1\,J\,M}(\theta,\varphi)+\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}}\mathrm{T}_{J-1\,J\,M}(\theta,\varphi)\right], \tag{A.1.28}$$

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}_0\times\mathrm{T}_{J-1\,J\,M}(\theta,\varphi)&=\mathrm{i}\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}}\,\mathrm{T}_{J\,J\,M}(\theta,\varphi)\ ,\\ \boldsymbol{r}_0\times\mathrm{T}_{J+1\,J\,M}(\theta,\varphi)&=\mathrm{i}\sqrt{\frac{J}{2J+1}}\,\mathrm{T}_{J\,J\,M}(\theta,\varphi)\ .\end{aligned}\right\} \tag{A.1.29}$$

更简单的计算给出

$$\boldsymbol{r}_0\cdot\mathrm{T}_{L\,J\,M}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2L+1}{2J+1}}\,\mathrm{C}_{L\,0\,1\,0}^{J\,0}\mathrm{Y}_{J\,M}(\theta,\varphi)\ . \tag{A.1.30}$$

由于 $\mathrm{C}_{J\,0\,10}^{J\,0}=0$, 此式直接给出

$$\boldsymbol{r}_0\cdot\mathrm{T}_{J\,J\,M}(\theta,\varphi)=0\ . \tag{A.1.31}$$

附录 II　狄拉克粒子自旋求和的投影算符方法

A2.1　自由狄拉克粒子平面波双旋量的完备集

采用自然单位制和 7.1 节的符号，自由狄拉克粒子平面波双旋量 u 满足方程

$$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{k}+m\beta)u=\ell\omega u\ , \tag{A.2.1}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha},\beta$ 为狄拉克矩阵，m 为粒子的质量，$\boldsymbol{k}$ 为动量，$\omega=\sqrt{k^2+m^2}$ 为能量的绝对值，$\ell=\pm1$ 为能量的符号. (7.14) 是 (A.2.1) 的正能级解，对应 $\ell=1$. (A.2.1) 的解可一般地写作

$$u_{\sigma\ell}=\sqrt{\frac{\omega+\ell m}{2\omega}}\begin{bmatrix}\chi_\sigma\\ \ell\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{\omega+\ell m}\chi_\sigma\end{bmatrix}\ . \tag{A.2.2}$$

其中 $\sigma=\pm1$ 为自旋量子数，表示自旋的 z 投影为 $\frac{\sigma}{2}$；$\ell=\pm1$ 表能量的符号. 自旋旋量 χ_σ 取成归一的：$\chi_\sigma^\dagger\chi_\sigma=1$，则双旋量 (A.2.2) 也是归一的. (A.2.1) 左边括号内为厄米矩阵，$u_{\sigma\ell}$ 为它的本征矢，因此对不同的 ℓ 正交. σ 不同的自旋态自然也正交，因此对一定的动量 $\boldsymbol{k}$，

$$u_{\sigma\ell}^\dagger u_{\sigma'\ell'}=\delta_{\sigma\sigma'}\delta_{\ell\ell'}\ . \tag{A.2.3}$$

双旋量有四个分量，四个正交归一的双旋量 $u_{1\,1}$、$u_{-1\,1}$,$u_{1\,-1}$ 和 $u_{-1\,-1}$ 组成完备集，任何双旋量可用它们展开. 即对一定的动量 $\boldsymbol{k}$ 有

$$\sum_{\ell=\pm1}\sum_{\sigma=\pm1}u_{\sigma\ell}u_{\sigma\ell}^\dagger=1\ . \tag{A.2.4}$$

A2.2 正能级投影算符与正能级求和

在许多问题中只涉及正能量粒子，而不涉及反粒子，因而不涉及负能级．算符

$$P\equiv\sum_{\sigma=\pm1}u_{\sigma 1}u_{\sigma 1}^{\dagger} \tag{A.2.5}$$

作用在一个双旋量上相当于将这个双旋量用$[u_{\sigma\ell}]$展开后只取其中$\ell=1$的项，因此称为正能级投影算符．可将它表成适于应用的形式．显然有

$$\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{k}+m\beta+\omega}{2\omega}u_{\sigma\ell}=\delta_{\ell 1}u_{\sigma\ell} \ . \tag{A.2.6}$$

采用γ矩阵将它表成协变形式

$$\frac{-\mathrm{i}\gamma_\mu k_\mu+m}{2\omega}\gamma_4 u_{\sigma\ell}=\delta_{\ell 1}u_{\sigma\ell} \ , \tag{A.2.7}$$

此处沿用爱因斯坦求和约定，$(k_\mu)=(\boldsymbol{k},\mathrm{i}\omega)$为粒子的动量能量四矢量．用此式左边的矩阵左乘(A.2.4)两边得

$$P=\frac{-\mathrm{i}\gamma_\mu k_\mu+m}{2\omega}\gamma_4 \ . \tag{A.2.7}$$

用这个投影算符来计算(7.27)右边的正能级自旋求和．用这里的符号它是

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma=\pm1}\sum_{\sigma'=\pm1}u_{\sigma'1}^{\dagger}(\boldsymbol{K}')\gamma_4\gamma_\mu u_{\sigma 1}(\boldsymbol{k})u_{\sigma 1}^{\dagger}(\boldsymbol{k})\gamma_4\gamma_\nu u_{\sigma'1}(\boldsymbol{K}')\\
&=\sum_{\substack{\sigma=\pm1\\ \ell=\pm1}}\sum_{\substack{\sigma'=\pm1\\ \ell'=\pm1}}u_{\sigma'\ell'}^{\dagger}(\boldsymbol{K}')\gamma_4\gamma_\mu\frac{-\mathrm{i}\gamma_\lambda k_\lambda+m}{2\omega}\gamma_4 u_{\sigma\ell}(\boldsymbol{k})\\
&\qquad\times u_{\sigma\ell}^{\dagger}(\boldsymbol{k})\gamma_4\gamma_\nu\frac{-\mathrm{i}\gamma_{\lambda'}k_{\lambda'}'+m}{2\omega'}\gamma_4 u_{\sigma'\ell'}(\boldsymbol{K}')\\
&=\mathrm{tr}\left(\gamma_\mu\frac{-\mathrm{i}\gamma_\lambda k_\lambda+m}{2\omega}\gamma_\nu\frac{-\mathrm{i}\gamma_{\lambda'}k_{\lambda'}'+m}{2\omega'}\right) \ .
\end{aligned} \tag{A.2.8}$$

正能级自旋求和归结为计算γ矩阵多项式的阵迹．

A2.3 γ矩阵及其乘积的阵迹

由于γ_μ与γ_5的反对易性和$\gamma_5^2=1$，

$$\gamma_\mu=-\gamma_5\gamma_\mu\gamma_5 \ .$$

因此

$$\mathrm{tr}\gamma_\mu=-\mathrm{tr}\gamma_5\gamma_\mu\gamma_5=-\mathrm{tr}\gamma_5\gamma_5\gamma_\mu=-\mathrm{tr}\gamma_\mu \ .$$

可见

$$\mathrm{tr}\,\gamma_\mu=0 \ . \tag{A.2.9}$$

类似地，可证在$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$和$\gamma_4$中任取奇数个$\gamma$矩阵的乘积的阵迹为零．由于

$$\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2\delta_{\mu\nu} \tag{A.2.10}$$

且四行四列的幺矩阵阵迹为4，故

$$\mathrm{tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu)=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu)=4\delta_{\mu\nu} \ . \tag{A.2.11}$$

由此又得

$$\mathrm{tr}(\gamma_\lambda k_\lambda\gamma_{\lambda'}k_{\lambda'}')=4k_\lambda k_\lambda' \ . \tag{A.2.12}$$

由(A.2.10)知

$$\gamma_\mu\gamma_\lambda k_\lambda+\gamma_\lambda k_\lambda\gamma_\mu=2k_\mu \ . \tag{A.2.13}$$

重复用此式得

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu\gamma_\lambda k_\lambda\gamma_\nu\gamma_{\lambda'}k_{\lambda'}'&=-\gamma_\lambda k_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_{\lambda'}k_{\lambda'}'+2k_\mu\gamma_\nu\gamma_{\lambda'}k_{\lambda'}'\\
&=\gamma_\lambda k_\lambda\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_{\lambda'}k_{\lambda'}'-2\delta_{\mu\nu}\gamma_\lambda k_\lambda\gamma_{\lambda'}k_{\lambda'}'+2k_\mu\gamma_\nu\gamma_{\lambda'}k_{\lambda'}'\\
&=-\gamma_\lambda k_\lambda\gamma_\nu\gamma_{\lambda'}k_{\lambda'}'\gamma_\mu+2\gamma_\lambda k_\lambda\gamma_\nu k_\mu'-2\delta_{\mu\nu}\gamma_\lambda k_\lambda\gamma_{\lambda'}k_{\lambda'}'+2k_\mu\gamma_\nu\gamma_{\lambda'}k_{\lambda'}' \ .
\end{aligned}$$

注意此式右边第一个减号后的那项阵迹与左边的阵迹相同．因而有

$$\mathrm{tr}(\gamma_\mu\gamma_\lambda k_\lambda\gamma_\nu\gamma_{\lambda'}k_{\lambda'}')=4(k_\mu k_\nu'+k_\nu k_\mu'-\delta_{\mu\nu}k_\lambda k_\lambda') \ . \tag{A.2.14}$$

将此式和(A.2.11)代入(A.2.8)，再将结果代入(7.27)，即得(7.33)．

附录Ⅲ 时间反演态，时间反演算符与时间反演不变量的矩阵元

A3.1 时间反演态与时间反演算符

设在时间反演变换下态 $|\rangle$ 变成了 $\hat{\Theta}|\rangle$，$\hat{\Theta}$ 称为时间反演算符，$\hat{\Theta}|\rangle$ 称为态 $|\rangle$ 的时间反演态．时间反演不改变粒子的位置，却改变粒子运动的方向．用 $|\boldsymbol{r}\rangle$ 表示坐标为 $\boldsymbol{r}$ 的本征态．时间反演不改变粒子的位置即

$$\hat{\Theta}|\boldsymbol{r}\rangle=|\boldsymbol{r}\rangle \quad . \tag{A.3.1}$$

原则上可在此式右边乘以绝对值为 1 的相因子，但适当选取 $|\boldsymbol{r}\rangle$ 的相角可将此相因子吸收进 $|\boldsymbol{r}\rangle$ 而维持简单形式(A.3.1)．用

$$|\boldsymbol{p}\rangle=\int\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\,\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}|\boldsymbol{r}\rangle\mathrm{d}\tau \tag{A.3.2}$$

表示动量为 $\boldsymbol{p}$ 的本征态．时间反演态的运动方向相反即将动量为 $\boldsymbol{p}$ 的态改为动量为 $-\boldsymbol{p}$ 的态，即

$$\hat{\Theta}\,|\boldsymbol{p}\rangle=|-\boldsymbol{p}\rangle \quad . \tag{A.3.3}$$

此式与(A.3.1)和(A.3.2)一起，要求时间反演算符 $\hat{\Theta}$ 为反线性的，即

$$\hat{\Theta}(c_1|1\rangle+c_2|2\rangle)=c_1^*\hat{\Theta}|1\rangle+c_2^*\hat{\Theta}|2\rangle \quad . \tag{A.3.4}$$

如此即可保证简单关系(A.3.3)．可见时间反演将态的坐标表象即波函数取复共轭．时间反演也改变自旋方向．以 $\frac{1}{2}$ 自旋为例．用 χ_σ 表自旋 z 投影为 $\frac{\sigma}{2}\hbar$ 的态，$\sigma=\pm1$．则有

$$\hat{\Theta}\chi_\sigma=c_\sigma\chi_{-\sigma} \quad , \tag{A.3.5}$$

c_σ 为绝对值是 1 的相因子．泡利算符 σ_x 和 σ_y 以及它们的任意线性组合对自旋态的作用都改变自旋方向．为确定 $\hat{\Theta}$ 对自旋态的作用还需更深入的考虑．

设 $\hat{Q}$ 为一线性厄米算符，表示力学量 Q．考虑态 $\hat{Q}|\rangle$ 的时间反演

$$\hat{\Theta}\hat{Q}|\rangle=\hat{\Theta}\hat{Q}\hat{\Theta}^{-1}\Theta|\rangle=\hat{Q}^T\Theta|\rangle \quad , \tag{A.3.6}$$

其中

$$\hat{Q}^T\equiv\hat{\Theta}\hat{Q}\hat{\Theta}^{-1} \tag{A.3.7}$$

为力学量 $\hat{Q}$ 的时间反演．由于时间反演下自旋反向，应有

$$\sigma^T\equiv\hat{\Theta}\sigma\hat{\Theta}^{-1}=-\sigma \quad . \tag{A.3.8}$$

由泡利算符的表达式(1.125)知，应取

$$\hat{\Theta}=\mathrm{i}\sigma_y\hat{K}=\hat{\Theta}_s\hat{K} \quad , \tag{A.3.9}$$

其中 $\hat{K}$ 表示取波函数的复共轭，

$$\hat{\Theta}_s=\mathrm{i}\sigma_y \tag{A.3.10}$$

为自旋态的时间反演算符．在 σ_z 表象中

$$\chi_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad , \quad \chi_{-1}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} , \tag{A.3.11}$$

可见

$$\hat{\Theta}\chi_\sigma=(-1)^{\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{2}}\ \chi_{-\sigma} \ , \quad c_\sigma=(-1)^{\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{2}} \quad . \tag{A.3.12}$$

A3.2 角动量本征态的时间反演性质

重新将 $\frac{1}{2}$ 自旋的本征态(A.3.11)记为 χ_{sm_s}，其中 $s=\frac{1}{2}$，$m_s=\frac{\sigma}{2}$．即定义

$$\chi_{s\,m_s}\equiv\chi_\sigma \ , \quad \sigma=2m_s \quad . \tag{A.3.13}$$

(A.3.12)可记为

$$\hat{\Theta}\chi_{sm_s}=(-1)^{s-m_s}\chi_{s\,-m_s} \ . \tag{A.3.14}$$

这启发人们将轨道角动量的本征态用波函数

$$\Phi_{l\, m_l}(\theta,\varphi) \equiv \mathrm{i}^l \mathrm{Y}_{l\, m_l}(\theta,\varphi) \tag{A.3.15}$$

表示．因子 i^l 不改变角动量理论中要求的轨道角动量本征态间的相角关系，却导致时间反演性质

$$\hat{\Theta}\Phi_{l\, m_l}(\theta,\varphi)=(-1)^{l-m}\Phi_{l\, -m_l}(\theta,\varphi)\ . \tag{A.3.16}$$

CG 系数的对称性质

$$\mathrm{C}^{j\ -m}_{j_1\ -m_1\ j_2\ -m_2}=(-1)^{j-j_1-j_2}\mathrm{C}^{j\, m}_{j_1\, m_1\, j_2\, m_2} \tag{A.3.17}$$

则进一步导致如下的时间反演性质：若有两个独立的角动量 $\hat{\boldsymbol{J}}_1$ 和 $\hat{\boldsymbol{J}}_2$, $\hat{J}_1^2$, $\hat{J}_{1z}$ 的本征态 $|j_1\, m_1\rangle$ 和 $\hat{J}_2^2$, $\hat{J}_{2z}$ 的本征态 $|j_2\, m_2\rangle$ 分别有时间反演性质

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\Theta}|j_1\, m_1\rangle=(-1)^{j_1-m_1}|j_1\ -m_1\rangle\\ \text{和}\quad &\hat{\Theta}|j_2\, m_2\rangle=(-1)^{j_2-m_2}|j_2\ -m_2\rangle\ ,\end{aligned}\right\} \tag{A.3.18}$$

则它们的总角动量 $\hat{\boldsymbol{J}}=\hat{\boldsymbol{J}}_1+\hat{\boldsymbol{J}}_2$ 确定的态，即 $\hat{J}_1^2$、$\hat{J}_2^2$、$\hat{J}^2$ 和 $\hat{J}_z$ 的共同本征态

$$|j_1 j_2\, j\, m\rangle=\sum_{m_1,m_2}\mathrm{C}^{j\, m}_{j_1\, m_1\, j_2\, m_2}|j_1\, m_1\rangle\,|j_2\, m_2\rangle \tag{A.3.19}$$

必具时间反演性质

$$\hat{\Theta}|j_1 j_2 j\ m\rangle=(-1)^{j-m}|j_1\ j_2\ j\ \ -m\rangle\ . \tag{A.3.20}$$

证　由于 CG 系数均为实数，由 (A.3.18) 和 (A.3.17) 知

$$\begin{aligned}\hat{\Theta}|j_1\ j_2\ j\ m\rangle&=\sum_{m_1,m_2}\mathrm{C}^{j\, m}_{j_1\, m_1\, j_2\, m_2}(-1)^{j_1+j_2-m}|j_1\ -m_1\rangle|j_2\ -m_2\rangle\\&=(-1)^{j-m}\sum_{m_1,m_2}\mathrm{C}^{j\ -m}_{j_1\ -m_1\, j_2\ -m_2}|j_1\ -m_1\rangle|j_2\ -m_2\rangle\\&=(-1)^{j-m}|j_1\ j_2\ j\ -m\rangle\ .\end{aligned}$$

证毕

由于粒子系的角动量为各粒子轨道角动量和自旋之和，由数学归纳法知，(A.3.14) 和 (A.3.16) 保证它的任一角动量的本征态 $|j\, m\rangle$ 具有时间反演性质

$$\hat{\Theta}|j\, m\rangle=(-1)^{j-m}|j\ \ -m\rangle\ . \tag{A.3.21}$$

这是角动量本征态的一般时间反演性质，也不只适用于1/2自旋粒子系．

A3.3　时间反演不变量与时间反演对称系统

一个量 $\hat{Q}$ 若与它的时间反演量 $\hat{Q}^T$ 相等就称为时间反演不变量．例如坐标 $\boldsymbol{r}$，因

$$\boldsymbol{r}^T=\hat{\Theta}\boldsymbol{r}\hat{\Theta}^{-1}=\boldsymbol{r}\cdot\hat{\Theta}\hat{\Theta}^{-1}=\boldsymbol{r}\ \ , \tag{A.3.22}$$

故是时间反演不变量．宇称 $\hat{\Pi}$ 也是时间反演不变量：

$$\hat{\Pi}^T\equiv\hat{\Theta}\hat{\Pi}\hat{\Theta}^{-1}=\hat{\Pi}\ . \tag{A.3.23}$$

若一个系统的哈密顿量 $\hat{H}$ 是时间反演不变量，即若

$$\hat{H}^T\equiv\hat{\Theta}\hat{H}\hat{\Theta}^{-1}=\hat{H}\ , \tag{A.3.24}$$

则称这个系统具有时间反演对称性，或称它是时间反演对称的．

一个时间反演不变量 $\hat{Q}$ 的本征态的时间反演态也是这个量的本征态，且本征值与原来那个态的一样．

证　对时间反演不变量 $\hat{Q}$ 有

$$\hat{\Theta}\hat{Q}\hat{\Theta}^{-1}=\hat{Q}\ . \tag{A.3.25}$$

在此式两边右乘 $\hat{\Theta}$ 左乘 $\hat{\Theta}^{-1}$ 得

$$\hat{\Theta}^{-1}\hat{Q}\hat{\Theta}=\hat{Q}\ . \tag{A.3.26}$$

设

$$\hat{Q}|Q\rangle=Q|Q\rangle\ .$$

$\hat{Q}$ 为动力学变量，它的本征值 Q 为实数．因此

$$\begin{aligned}\hat{Q}\Theta|Q\rangle&=\hat{\Theta}\hat{\Theta}^{-1}\hat{Q}\hat{\Theta}|Q\rangle=\hat{\Theta}\hat{Q}|Q\rangle\\&=\hat{\Theta}Q|Q\rangle=Q\hat{\Theta}|Q\rangle\ .\end{aligned}$$

此式第二等号处用了 (A.3.26)，末一等号处用了 Q 为实数的性质．证毕．

设有一个力学量的完备集，其中每一个量都是时间反演不变量．它们的一组本征值唯一地确定系统的一个本征态|⟩．这个态的时间反演态仍是其中每一个量的本征态且本征值都与原来的态一样．由于这种态是唯一的，故有

$$\hat{\Theta}|\rangle = c|\rangle \ . \tag{A.3.27}$$

利用(A.3.9)并注意其中 $\hat{\Theta}_s$ 为一幺正变换，知

$$\langle|\hat{\Theta}^\dagger\hat{\Theta}|\rangle = \langle|\rangle^* = \langle|\rangle \ . \tag{A.3.28}$$

设 $|\rangle$是归一的，则 $\Theta|\rangle$也是归一的．c 为一绝对值是 1 的相因子．设 $c=e^{i\theta}$．重新定义这个力学量完备集的共同本征态矢量为

$$|\rangle' = e^{i\varphi}|\rangle \ , \tag{A.3.29}$$

它仍然是归一的．令

$$\hat{\Theta}|\rangle' = |\rangle' \ , \tag{A.3.30}$$

解得 $\varphi = \dfrac{\theta}{2}$．可见，对一个时间反演不变量的完备集，存在它们的一组完备正交归一的共同本征态系，其中每一个本征态矢量在时间反演变换下都不变．在时间反演变换下不变的态称为时间反演不变态．由于时间反演变换的反线性，恒可使这些时间反演不变态的态矢量在时间反演变换下也不变．

也可考虑一个包含角动量算符 J^2 和 J_z 的完备力学量集．由单粒子自旋的时间反演性质(A.3.8)和单粒子轨道角动量的时间反演性质

$$\hat{\Theta}\hat{\boldsymbol{L}}\hat{\Theta}^{-1} = -\hat{\boldsymbol{L}} \tag{A.3.31}$$

知，角动量一般地有时间反演性质

$$\hat{\Theta}\hat{\boldsymbol{J}}\hat{\Theta}^{-1} = -\hat{\boldsymbol{J}} \ . \tag{A.3.32}$$

这使

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2 \tag{A.3.33}$$

成为时间反演不变量．若这个力学量完备集中的其它力学量均为时间反演不变量，则它们共同的完备正交归一本征态矢量系$[|\nu J M\rangle]$中的每个态矢量均有时间反演性质

$$\hat{\Theta}|\nu J M\rangle = (-1)^{J-M}|\nu J\ -M\rangle \ , \tag{A.3.34}$$

其中 ν 为完备集中除角动量外的其它力学量的量子数．

(A.3.28)是一般关系

$$\langle 1|\hat{\Theta}^\dagger\hat{\Theta}|2\rangle = \langle 1|2\rangle^* = \langle 2|1\rangle \tag{A.3.35}$$

的特例．此式表明时间反演变换不是幺正变换，它将两态间的标量积取复共轭．这种变换叫反幺正变换．时间反演变换是反线性的反幺正变换．现在考虑在时间反演不变量完备集的表象中，一个时间反演不变量的矩阵元．这个被表象的时间反演不变量不必是完备集的成员或这些成员的函数，因而不必是对角的．如前述，可将表象的基底都取成时间反演不变的态矢量．设如此选择的表象基底为$[|\nu\rangle]$，被表象的时间反演不变量为 $\hat{Q}$．有

$$\begin{aligned}\langle \nu|\hat{Q}|\nu'\rangle^* &= \langle \nu|\hat{\Theta}^\dagger\hat{\Theta}\hat{Q}|\nu'\rangle \\ &= \langle \nu|\hat{\Theta}^\dagger\hat{Q}\hat{\Theta}|\nu'\rangle = \langle \nu|\hat{Q}|\nu'\rangle \ .\end{aligned} \tag{A.3.36}$$

第一、二和三等号处分别用了(A.3.35)、(A.3.25)和基底 $|\nu\rangle$的时间反演不变性．此式表明时间反演不变量在这个表象中的矩阵元为实数．

仍然考虑时间反演不变量 $\hat{Q}$ 的矩阵元，将表象的基底取为$[|\nu J M\rangle]$，其中 ν 为确定 $|\nu J M\rangle$的力学量完备集中除角动量外的其它时间反演不变量的量子数．进一步设 $\hat{Q}$ 为转动不变量，因而与角动量算符对易：

$$\hat{Q}\hat{\boldsymbol{J}} - \hat{\boldsymbol{J}}\hat{Q} = 0 \ . \tag{A.3.37}$$

这个条件使

$$\langle \nu J M|\hat{Q}|\nu' J' M'\rangle = \langle \nu J M|\hat{Q}|\nu' J M\rangle \delta_{JJ'}\delta_{MM'}, \tag{A.3.38}$$

且$\langle \nu J M|\hat{Q}|\nu' J M\rangle$的值与量子数 M 无关。于是有

$$\begin{aligned}\langle \nu J M|\hat{Q}|\nu' J M\rangle^* &= \langle \nu J M|\hat{\Theta}^\dagger\hat{\Theta}\hat{Q}|\nu' J M\rangle \\ &= \langle \nu J M|\hat{\Theta}^\dagger\hat{Q}\hat{\Theta}|\nu' J M\rangle \\ &= \langle \nu J\ -M|\hat{Q}|\nu' J\ -M\rangle = \langle \nu J M|\hat{Q}|\nu' J M\rangle \ .\end{aligned} \tag{A.3.39}$$

此式表明时间反演不变量在这个表象中的矩阵元也是实数．

A3.4　入态和出态的时间反演态

态 $|a\rangle$的入态 $|a+\rangle$和出态 $|a-\rangle$分别满足李普曼－许温格方程

$$
\left.\begin{aligned}
|a+\rangle &= |a\rangle + \frac{1}{E_a - \hat{H}^0 + \mathrm{i}\varepsilon} H'|a+\rangle\ , \\
\text{和} \qquad |a-\rangle &= |a\rangle + \frac{1}{E_a - \hat{H}^0 - \mathrm{i}\varepsilon} H'|a-\rangle\ .
\end{aligned}\right\} \tag{A.3.40}
$$

$|a\rangle$为 $\hat{H}_0$ 的本征态，$|a+\rangle$和 $|a-\rangle$都是 $\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}'$ 的本征态，本征值都是实数 E_a. ε 为无穷小正数. 设 $\hat{H}^0$ 和 $\hat{H}'$ 都是时间反演不变量，系统具有时间反演对称. 在(A.3.40)两边作时间反演，由此变换的反线性得

$$
\left.\begin{aligned}
\hat{\Theta}|a+\rangle &= \hat{\Theta}|a\rangle + \frac{1}{E_a - \hat{H}^0 - \mathrm{i}\varepsilon} \hat{H}'\hat{\Theta}|a+\rangle\ , \\
\hat{\Theta}|a-\rangle &= \hat{\Theta}|a\rangle + \frac{1}{E_a - \hat{H}^0 + \mathrm{i}\varepsilon} \hat{H}'\hat{\Theta}|a-\rangle\ .
\end{aligned}\right\} \tag{A.3.41}
$$

将此式与(A.3.40)比较知：入态的时间反演态为时间反演态的出态；出态的时间反演态则为时间反演态的入态.

主 要 参 考 书

Blatt J.M. and Weisskopf V.F. 1962 Theoretical Nuclear Physics (John Wiley and Sons, New York)

Eisenberg J.M. and Greiner W. 1970～1976 Nuclear Theory
  Vol. 1 Nuclear Models
  Vol. 2 Excitation Mechanisms of the Nucleus
  Vol. 3 Microscopic Theory of the Nucleus
  (North Holland, Amsterdam)

Shalit A. de and Feshbach H. 1974 Theoretical Nuclear Physics
  Vol. 1 Nuclear Structure (John Wiley and Sons, New York)

Feshbach H. 1992 Theoretical Nuclear Physics
  Vol. 2 Nuclear Reaction (John Wiley and Sons, New York)

参考文献

Abov Yu. O., Krupchitsky P.A., Bulgakov M.I., Yermakov O. N., and Karpiklin I.L. 1968 Phys. Lett. B27 16

Abov Yu.O., Krupchitsky P.A., and Oratovsky Y.A. 1965 Sov. J. Nucl. Phys. 1 341

Arima A. and Iachello F. 1976 Ann. Phys. (N.Y.) 99 253

Arima A. and Iachello F. 1978 Ann. Phys. (N.Y.) 111 201

Arima A. and Jachello F. 1978a Ann. Phys. (N.Y.) 115 325

Arima A. and Iachello F. 1979 Ann. Phys. (N.Y.) 123 468

Arnold R.G. et. al. 1984 Phys. Rev. Lett. 52 727

Aubert J.J. et. al. 1983 Phys. Lett. B123 275

Bjorken D. and Paschos E.A. 1969 Phys. Rev. 185 1975

Blaizot J.W. 1980 Phys. Rep. 64 171

Bock P. and Jenschke B. 1971 Nucl. Phys. A160 550

Bodek A. et. al. 1983 Phys. Rev. Lett. 50 1431

Bohr N. 1936 Nature 137 344

Bohr A. 1952 Kgl. Dan. Fys. Medd. 26 No14

Bohr A. and Mottelson B.R. 1955 Dan. Mat-Fys. Medd. 30 No1

Bohr A. and Mottelson B.R. 1969 Nuclear Structure (Benjamin, New York) P256

Borkowski F. et. al. 1975 Nucl. Phys. A222 269

Breit G. and Wigner E. 1936 Phys. Rev. 49 519

Brown G.E. and Rho M. 1979 Phys. Lett. B82 177

Brown G.E., Jackson A.D., Rho M., and Vento V. 1984 Phys. Lett. B140 285

Cabibbo N. 1963 Phys. Rev. Lett. 10 531

Campbel D.K., Dashen R.F., and Manassah J.T. 1975 Phys. Rev. D12 979

Chodos A., Jaffe R. L., Johnson K., Thorn C. B., and Weisskopf V.F. 1974 Phys. Rev. D9 3471

Clark A.R. et. al. 1983 Phys. Rev. Lett. 51 1826

Cook N.D. and Dallacasa V. 1987 Phys. Rev. C35 1883

Cruse D.W. and Hamilton W.D. 1969 Nucl. Phys. 125 241

Davydov A.S. and Filippov G.F. 1958 Nucl. Phys. 8 237

DeGrand T., Jaffe R.L., Johnson K., and Kiskis J. 1975 Phys. Rev. D12 2060

Detar C. 1978 Phys. Rev. D17 323

Dominicis C. De and Martin P.C. 1957 Phys. Rev. 105 1417

Dosch H.G. 1986 Phys. Rev. D33 1378

Dosch H.G. 1987 Z. Phys. C34 554

Eckart C. 1930 Rev. Mod. Phys. 2 305

Elliott J.P. 1958 Proc. Roy. Soc. A245 128,562

Erb K. and Bromley D.A. 1984 in Treatise on Heavy Ion Science (Plenum Press, New York)

Fermi E. 1933 Ric. Sci. 2 part12

Fermi E. 1934 Z. Phys. 88 161

Feynman R.P. 1969 Phys. Rev. Lett. 23 1415

Gari M. 1973 Phys. Rep. 6C 317

Glashow S.L. 1980 Rev. Mod. Phys. 52 539

Gell-Mann M. and Levy M. 1960 IL Nuovo Cim. 16 53

Gell-Mann M. 1962 Phys. Rev. 125 1067

Gell-Mann M. 1964 Phys. Lett. 8 214

Glendenning N.K. 1988 Nucl. Phys. A480 597

Goldberger M.L. and Treiman S.B. 1958 Phys. Rev.110 1178
Gove N.B. and Martin M.J. 1971 Nuclear Data Tables 10 206
Hamilton J.H. et. al. 1973 Phys. Today 26 4,42
Hamada T. and Johnston I.D. 1962 Nucl. Phys. 34 382
Huang K.(黄克孙)and Yang C.N. 1957 Phys. Rev. 105 767
Inglis D.R. 1954 Phys. Rev. 96 1059
Inglis D.R. 1955 Phys. Rev. 97 701
Jackson J.D. and Rho M. 1983 Phys. Rev. Lett. 51 751
Jaffe R.L. 1977 Phys. Rev. Lett. 38 195
Kapusta J.J. 1979 Nucl. Phys. B148 461
Kumar K. and Baranger M. 1967 Mucl. Phys. A92 608
Lacombe M. et. al. 1980 Phys. Rev. C21 861
Lassila K.E., Hull M.H., Jr., Ruppel H.M., MacDonald F.A., and Breit G. 1962 Phys. Rev. 126 881
Lee T.D.(李政道) and Yang C.N. 1956 Phys. Rev. 104 254
Lee T.D. and Wick G.C. 1974 Phys. Rev. D9 2291
Lee T.D. 1981 Particle Physics and Introduction to Field Theory (Harwood Academic, New York)
Lippmann B.A. and Schwinger J. 1950 Phys. Rev. 79 469
Lipson E.D., Boehm F., and Vanderleeden J.C. 1971 Phys. Lett. B35 307
Lobashov V.M., Nazarenko V.A., Saenko L.F., and Smotritskii L.M. 1967 Phys. Lett. B25 104
Lurie D. 1968 Particles and Fields (Interscience Publishers, New York)
Ma B. -Q.(马伯强), Zhang Q.-R., Rischke D.H., and Greiner W. 1993 Phys. Lett. B315 29
Machleidt R. et. al. 1987 Phys. Rep. 149 1
Montanet 1980 Phys. Rep. 63 201

Myers W.D. and Swiatecki W.J. 1974 Ann. Phys. (N.Y.) 84 186
Nawa S., Tamagaki R., Tatsumi T., and Yoro S. 1990 Progr. Theor. Phys. 84 1170
Ne'eman Y. 1961 Nucl. Phys. 26 222
Nörenberg W. 1974 Phys. Lett. B52 289
Nilsson S.G. 1955 Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 29 No16
Oakes R.J. 1963 Phys. Rev. 131 2239
Okubo S. 1962 Progr. Theor. Phys. 27 949
Pauli W. 1958 Theory of Relativity (Pergamon Press, London)
Pratt W., Schermer R.I., Sites J.R., and Steyert W.A. 1970 Phys. Rev. C2 1499
Reid R.V., Jr., 1968 Ann. Phys. (N.Y.) 50 411
Rho M., Goldhaber A.S., and Brown G.E. 1983 Phys. Rev. Lett. 51 747
Rischke D.H., Gorenstein M.I., Stöcker H., and Greiner W. 1991 Z. Phys. C51 485
Rojo O. and Levinger J.S. 1961 Phys. Rev. 123 2177
Salam A. 1980 Rev. Mod. Phys. 52 525
Shalit A. de and Feshbach H. 1974 Theoretical Nuclear Physics Vol. 1 Nuclear Structure (John Wiley and Sons, New York)
Skyrme T.H.R. 1961 Proc. Roy. Soc. A260 127
Twin P.J. et. al. 1986 Phys. Rev. Lett. 57 811
Vanderleeden J.C. and Boehm F. 1970 Phys. Rev. C2 748
Vepstas L., Jackson A.D., and Goldhaber A.S. 1984 Phys. Lett. B140 280
Waffler H. 1972 见 Gari 73 中的引文
Walet N.R., Amado R.D., and Hosaka A. 1992 Phys. Rev. Lett. 68 3849
Weinberg S. 1980 Rev. Mod. Phys. 52 515

Wigner E. 1931 Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren (Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig) P264

Wilcke W.W. et. al. 1980 Phys. Rev. C22 128

Witten E. 1983 Nucl. Phys. B223 422,433

Wu C.L. (吴成礼), Feng D.H., Chen X.G., Chen J.Q., and Guidry M.W. 1986 Phys. Lett. B168 313

Wu C.L., Feng D.H., Chen X.G., Chen J.Q., and Guidry M. W. 1987 Phys. Rev. C36 1157

Wu C.L., Feng D.H., and Guidry M.W. 1993 Ann. Phys. (N. Y.) 222 187

Wu C.S. (吴健雄) et. al. 1957 Phys. Rev. 105 1413

Xie S.−Q. (谢淑琴) and Zhang Q.−R. 1984 Phys. Lett. B143 441

Yang C.N. (杨振宁) and Mills R.L. 1954 Phys. Rev. 96 191

Yazaki K. 1987 Suppl. Progr. Theor. Phys. 91 146

Youngblood D.H. et. al. 1976 Phys. Rev. C13 994

Yu Y.-W. (于友文) and Zhang Z.−Y. 1984 Nucl. Phys. A426 557

Yu Y.-W. 1986 Nucl. Phys. A455 737

Yu Y.-W. 1988 Comm. Theor. Phys. 10 303

Yu Y.-W., Zhang Z.-Y., and Shen P.-N. 1991 Nucl Phys. A528 513

Zhang Q.-R. (张启仁) 1981 Phys. Lett. B104 347

张启仁 1981a 高能物理与核物理 5 15

张启仁 1981b 高能物理与核物理 5 314

Zhang Q.-R., Derreth C., Schäfer A., and Greiner W.1986 J. Phys. G12 L19

Zhang Q.-R.1988 J. Phys. G14 287

Zhang Q.-R. 1990 J. Phys. G16 545

Zhang Q.-R. 1990a J. Phys. G16 559

Zhang Q.-R. 1991 Comm. Theor. Phys. 16 223

Zhang Q.-R. and Li X.-G. 1992 Z. Phys. A343 337

Zhang Q.-R., Ma B.-Q., and Greiner W. 1992a J. Phys. G18 2051

Zhang Q.-R. and Liu H.−M. 1992b Phys Rev. C46 2294

Zhang Q.-R.1995 Z. Phys. A351 89

Zhang Z.-Y. (张宗烨), Yu Y.-W., Shen P.-N., and Shen X.-Y. 1993 Nucl. Phys. A561 595